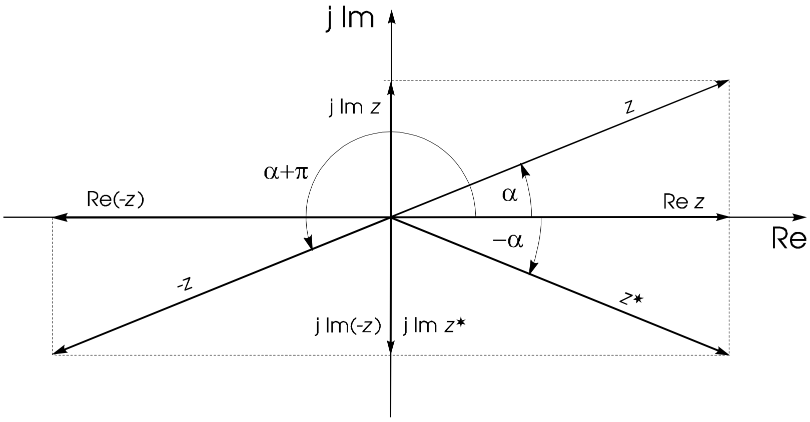
A 4 Einige Rechenregeln zu komplexen Zahlen

Eulersche Formel : $\boxed{\exp(\mathrm{j}\alpha) = e^{\pm \mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha}$

Da $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ als Projektionen eines Einheitsvektors auf zwei orthogonale Achsen eines Koordinatensystems aufgefaßt werden können, ergibt sich heraus die Möglichkeit zur Darstellung einer komplexen Größe in der Gaußschen Zahlenebene.



<u>komplexe Zahl z:</u>

$$z = x + \mathrm{j}\,y = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,z$$

$$z = |z|\,\exp(\mathrm{j}\alpha) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$$

<u>konjugiert komplexe Zahl z^*:</u>

$$z^* = x - \mathrm{j}\,y = \mathrm{Re}\,z - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,z$$

$$z^* = |z|\,\exp(-\mathrm{j}\alpha) = |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}$$

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt: $|z| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\,z\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot z^*}$.

Die Phase α ergibt sich aus der Darstellung in der Gauß-Ebene zu: $\alpha = \arctan\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}$

Weitere wichtige Beziehungen sind: $\cos\alpha = \dfrac{e^{\mathrm{j}\alpha}+e^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$ sowie $\sin\alpha = \dfrac{e^{\mathrm{j}\alpha}-e^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\,j}$.

Im Übrigen gelten auch bei Rechnungen mit komplexen Zahlen die Regeln der Arithmetik. So lassen sich z.B. Real- und Imaginärteil bei den häufig auftretenden komplexen Brüchen durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner trennen und wie folgt Betrag und Phase bestimmen:

$$z = \frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d} = \frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d}\cdot\frac{c-\mathrm{j}d}{c-\mathrm{j}d} = \frac{ac+bd+\mathrm{j}(bc-ad)}{c^2+d^2}; \quad |z| = \sqrt{\frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d}\cdot\frac{a-\mathrm{j}b}{c-\mathrm{j}d}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{bc-ad}{ac+bd}$$