

Compilerbau

Vorlesung

WS 2008–11,13,15,17,19,SS 22,24

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

12. Mai 2024

Organisatorisches (Ü KW 15)

- Skript (Woche für Woche) `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/lehre.html`
- Quelltexte aus VL, Diskussion Hausaufgaben
`https://gitlab.dit.htwk-leipzig.de/johannes.waldmann/cb-ss24` *Einschreiben!* wird dann *private*.
- autotool `https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/new/vorlesung/325/aufgaben/aktuell` . *Einschreiben!*
- Wdhlg: Arbeiten im Pool: `$PATH`, `ghci` (9.8.2),
mit `git(lab.dit)` (`ssh-keygen`, `.ssh/id_rsa.pub`)
- Haskell-Tooling (`cabal`, `ghc -haddock`, `:doc`)
- Diskussion Klausur PPS WS23 bei Bedarf

Beispiel: C-Compiler

- ```
int gcd (int x, int y) {
 while (y>0) { int z = x%y; x = y; y = z;
 return x; }
```

- `gcc -S -O2 gcd.c` erzeugt `gcd.s`:

```
.L3: movl %edx, %r8d ; cld ; idivl %r8d
 movl %r8d, %eax ; testl %edx, %edx
 jg .L3
```

Ü: was bedeutet `cld`, warum ist es notwendig?

Ü: welche Variable ist in welchem Register?

- identischer (!) Assembler-Code für

```
int gcd_func (int x, int y) {
 return y > 0 ? gcd_func (y, x % y) : x;
}
```

- vollständige Quelltexte: siehe Repo
- Bsp Java-Kompilation: <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/safe-speed/>











# Inhalt der Vorlesung

## Konzepte von Programmiersprachen

- Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- lokale Namen, • Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

- Interpretation, • Kompilation

Hilfsmittel:

- Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

# Einleitung: Sprachverarbeitung

- mit Interpreter:
  - Quellprogramm, Eingaben  $\xrightarrow{\text{Interpreter}}$  Ausgaben
- mit Compiler:
  - Quellprogramm  $\xrightarrow{\text{Compiler}}$  Zielprogramm
  - Eingaben  $\xrightarrow{\text{Zielprogramm}}$  Ausgaben
- Mischform:
  - Quellprogramm  $\xrightarrow{\text{Compiler}}$  Zwischenprogramm
  - Zwischenprogramm, Eingaben  $\xrightarrow{\text{virtuelle Maschine}}$  Ausgaben
- reale Maschine (CPU) ist Interpreter für Maschinensprache (Interpretation in Hardware, in Microcode)
- gemeinsam ist: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung oder Übersetzung)

# Literatur

- Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: *Design Concepts in Programming Languages*, MIT Press, 2008.  
<http://cs.wellesley.edu/~fturbak/>
- Guy Steele, Gerald Sussman: *Lambda: The Ultimate Imperative*, MIT AI Lab Memo AIM-353, 1976  
(the original 'lambda papers',  
<https://web.archive.org/web/20030603185429/http://library.readscheme.org/page1.html>)
- Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman: *Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)* Addison-Wesley, 2007, <http://dragonbook.stanford.edu/>
- J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der GI-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/>

# Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- Implementierung höherer Programmiersprachen
- architekturspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankabfragesprachen)
- Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)
- domainspezifische Sprachen

# Organisation der Vorlesung

- pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
  - Theorie,
  - Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)  
Bei Interesse und nach voriger Absprache: Ersatz eines Teiles der Klausur durch vorherige Hausarbeit  
z.B. Reparaturen an autotool-Aufgaben oder anderem open-source-Projekt (Ihrer Wahl), bei denen Techniken des Compilerbaus angewendet werden

# Beispiel: Interpreter f. arith. Ausdrücke

```
data Exp = Const Integer
 | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
deriving (Show)
```

```
ex1 :: Exp
```

```
ex1 =
```

```
Times (Plus (Const 1) (Const 2)) (Const 3)
```

```
value :: Exp -> Integer
```

```
value x = case x of
```

```
 Const i -> i
```

```
 Plus x y -> value x + value y
```

```
 Times x y -> value x * value y
```

**das ist syntax-gesteuerte Semantik:**

**Wert des Terms wird aus Werten der Teilterme kombiniert**

# Beispiel: lokale Variablen und Umgebungen

```
data Exp = ... | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" (Const 3)
 (Times (Ref "x") (Ref "x"))
type Env = (String -> Integer)
extend n w e = \ m -> if m == n then w else e m
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
 Ref n -> env n
 Let n x b -> value (extend n (value env x) env) b
 Const i -> i
 Plus x y -> value env x + value env y
 Times x y -> value env x * value env y
test2 = value (\ _ -> 42) ex2
```

# Bezeichner sind Strings — oder nicht?

- ... | `Let String Exp Exp` — wirklich?
- es gilt `type String = [Char]`, also
  - einfach verkettete Liste von Zeichen
  - mit Bedarfsauswertung (lazy Konstruktoren)
- das ist
  - ineffizient (in Platz *und* Zeit)
  - egal (für unseren einfachen Anwendungsfall)
  - gefährlich (wenn man es für andere Anwendungen übernimmt)
- deswegen jetzt schon Diskussion ...
  - von alternativen Implementierungen
  - und wie man diese versteckt



# Datentypen für Folgen (von Zeichen)

- `type String = [Char]`: einfach verkettet, lazy: ist in den allermeisten Fällen unzweckmäßig
- `data Vector a`: Array (d.h., zusammenhängender Speicherbereich, deswegen effiziente Indizierung) mit kostenlosem *slicing* (Abschnitt-Bildung)
- `data ByteString`:  $\approx$  Vektor von Bytes (d.h., für rein binären Datenaustausch)
- `data Text` (aus `Modul Data.Text`) *efficient packed, immutable Unicode text type*, (d.h., Zeichen = Bytefolge)
- `Modul Data.Text.Lazy`: lazy Liste von (strikten) `Text`-Abschnitten, für Stream-Verarbeitung

# Verstecken von Implementierungsdetails

- Implementierung direkt sichtbar:

```
data Exp = ... | Let Text Exp Exp
```

- Verschieben der Implementierungs-Entscheidung:

```
type Id = Text; data Exp = ... | Let Id Exp
```

bleibt aber sichtbar (`type`-Deklarationen werden bei Kompilation immer expandiert)

- Verstecken der Entscheidung:

```
modul Id (Id) where data Id = Id Text
```

exportiert wird Typ-Name, aber nicht der Konstruktor der Anwender (Importeur) von `Id` sieht `Text` nicht

- `data`-Deklaration mit genau einem Konstruktor:

```
erstetzen durch newtype Id = Id Text
```

dieser kostet *gar nichts* (keine Zeit, keinen Platz)

# Verwendung standardisierter Namen

- alle benötigten Funktionen (einschl. Konstruktoren) für `Id` implementieren und exportieren (es sind nicht viele)

```
eqId :: Id -> Id -> Bool; eqId (Id s) (Id t) = s == t
```

- diese spezifischen Namen will sich keiner merken  $\Rightarrow$  verwende standardisierte Typklassen, Bsp.

```
instance Eq Id where (Id s) == (Id t) = s == t
```

der Importeur von `Id` sieht den Namen `(==)` bereits, weil er in `Prelude` definiert ist

- wenn die Implementierung einer standardisierten Klasse eine einfache Delegation ist, kann sie vom Compiler erzeugt werden

```
newtype Id = Id Text deriving Eq
```

# Einsparung von Konstruktor-Aufrufen

- `-- Implementierung des Konstruktors`  
`import qualified Data.Text as T`  
`fromString :: String -> Id; fromString s = Id (T.pack s)`  
`-- Anwendung:`  
`foo :: Id ; foo = fromString "bar"`
- **der Schreibaufwand wird verringert durch**

```
 -- bei Implementierung:
import Data.String;
instance IsString Id where fromString = T.pack
 -- bei Anwendung:
{-# language OverloadedStrings #-}
foo :: Id ; foo = "bar"
```

**String-Literale sind dann *überladen*  $\Rightarrow$  Compiler setzt `fromString` vor jedes (`"bar"`  $\Rightarrow$  `fromString "bar"`)**

# Übung (Haskell)

- Wiederholung Haskell
  - Interpreter/Compiler: `ghci` <http://haskell.org/>
  - Funktionsaufruf nicht `f (a, b, c+d)`, sondern  
`f a b (c+d)`
  - Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion
- Wiederholung funktionale Programmierung/Entwurfsmuster
  - rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)  
(OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)

- rekursive Funktion

- Wiederholung Pattern Matching:

- beginnt mit `case ... of`, dann Zweige

- jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck

- falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck ausgewertet

# Übung (Interpreter)

- Benutzung:
  - Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten Let
  - Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist
- Erweiterung:

Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:

Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

```
data Exp = ...
 | If Exp Exp Exp
```

# Übung (effiziente Imp. von Bezeichnern)

- welche Operationen auf `Id` werden benötigt?
  - Konstruktion (`fromString`)
  - Gleichheit
  - Ausgabe (nur für Fehlermeldungen!)
- für `newtype Id = Id Text deriving Eq`:  
wie teuer ist Vergleich? wie könnte man das verbessern?
- für `type Env` und `extend` wie angegeben: wie teuer ist das Aufsuchen des Wertes eines Namens in einer Umgebung, die durch  $n$  geschachtelte `extend` entsteht?  
wie könnte man das verbessern?  
Hinweis: mit `Env` als Funktion: gar nicht.  
Welcher andere Typ könnte verwendet werden?



# Inferenz-Systeme

## Motivation

- inferieren = ableiten
- Inferenzsystem  $I$ , Objekt  $O$ ,  
Eigenschaft  $I \vdash O$  (in  $I$  gibt es eine Ableitung für  $O$ )
- damit ist  $I$  eine *Spezifikation* einer Menge von Objekten
- man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- Anwendungen im Compilerbau:  
Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

# Definition

ein *Inferenz-System*  $I$  besteht aus

- Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion)

Schreibweise  $\frac{P_1, \dots, P_n}{K}$

- Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)

eine *Ableitung* für  $F$  bzgl.  $I$  ist ein Baum:

- jeder Knoten ist mit einem Objekt beschriftet
- jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von  $I$
- Wurzel (Ziel) ist mit  $F$  beschriftet

Def:  $I \vdash F : \iff \exists I\text{-Ableitungsbaum mit Wurzel } F.$

# Regel-Schemata

- um unendliche Menge zu beschreiben, benötigt man unendliche Regelmengen
- diese möchte man endlich notieren
- ein *Regel-Schema* beschreibt eine (mglw. unendliche) Menge von Regeln, Bsp:  $\frac{(x, y)}{(x - y, y)}$
- Schema wird *instantiiert* durch Belegung der Schema-Variablen

Bsp: Belegung  $x \mapsto 13, y \mapsto 5$

ergibt Regel  $\frac{(13, 5)}{(8, 5)}$

# Inferenz-Systeme (Beispiel)

- Grundbereich = Zahlenpaare  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Axiom:  $\frac{}{(13, 5)}$
- Regel-Schemata:  $\frac{(x, y)}{(x - y, y)}$ ,  $\frac{(x, y)}{(x, y - x)}$
- gilt  $I \vdash (1, 1)$  ?
- Ü: Beziehung zu einem alten Algorithmus (früh im Studium, früh in der Geschichte der Menschheit)

# Primalitäts-Zertifikate

- **Satz:**  $p \in \mathbb{P} \iff \exists g : g \text{ ist primitive Wurzel mod } p:$   
 $[g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}]$  ist Permutation von  $[1, 2, \dots, p-1]$   
  
let {p = 7; g = 3}  
in map (`mod` p) \$ take (p-1) \$ iterate (\*g) 1  
 $[1, 3, 2, 6, 4, 5]$
- **Inferenzregel**  $\frac{g_1 : p_1, \dots, g_k : p_k}{g : p}$ ,  
falls  $p-1 = q_1^{e_1} \dots q_k^{e_k}$  und  $\forall i : g^{(p-1)/q_i} \neq 1 \pmod p$
- Vaughan Pratt, *Each Prime has a Succinct Certificate*,  
SIAM J. Comp. 1975
- es folgt  $\mathbb{P} \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$ , aber  $\mathbb{P}$  *not known to be in P*
- Agrawal, Kayal, Saxena: *Primes is in P*, 2004

# Inferenz von Typen

- später implementieren wir das, als statische Analyse im Interpreter/Compiler,

jetzt geben wir nur die Regel an: 
$$\frac{f : T_1 \rightarrow T_2, x : T_1}{fx : T_2}$$

- Bsp. für Verwendung eines Inferenzsystems: Manuel Chakravarty, Gabriele Keller, Simon Peyton Jones, Simon Marlow, *Associated Types with Class*, POPL 2005

Absch. 4.2 (Fig. 2) Grundbereich:  $\Theta | \Gamma \vdash e : \sigma$

means that in type environment  $\Gamma$  and instance environment  $\Theta$  the expression  $e$  has type  $\sigma$

Bsp. für ein Regelschema: 
$$\frac{(v : \sigma) \in \Gamma}{\Theta | \Gamma \vdash v : \sigma} (var)$$

# Inferenz von Werten

- Grundbereich: Aussagen  $\text{wert}(p, z)$  mit  $p \in \text{Exp}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$

`data Exp = Const Integer`

`| Plus Exp Exp | Times Exp Exp`

- Axiome:  $\text{wert}(\text{Const } z, z)$

- Regeln:

$$\frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Plus } X \ Y, a + b)}, \quad \frac{\text{wert}(X, a), \text{wert}(Y, b)}{\text{wert}(\text{Times } X \ Y, a \cdot b)}, \dots$$

- das ist syntaxgesteuerte Semantik:

für jeden Konstruktor von  $p \in \text{Exp}$

gibt es genau eine Regel mit Konklusion  $\text{wert}(p, \dots)$

# Umgebungen (Spezifikation)

- Grundbereich: Aussagen der Form  $\text{wert}(E, p, z)$   
(in Umgebung  $E$  hat Programm  $p$  den Wert  $z$ )

Umgebungen konstruiert aus  $\emptyset$  und  $E[v := b]$

- Regeln für Operatoren  $\frac{\text{wert}(E, X, a), \text{wert}(E, Y, b)}{\text{wert}(E, \text{Plus } XY, a + b)}, \dots$

- Regeln für Umgebungen

$$\frac{}{\text{wert}(E[v := b], v, b)}, \quad \frac{\text{wert}(E, v', b')}{\text{wert}(E[v := b], v', b')} \text{ für } v \neq v'$$

- Regeln für Bindung:  $\frac{\text{wert}(E, X, b), \text{wert}(E[v := b], Y, c)}{\text{wert}(E, \text{let } v = X \text{ in } Y, c)}$



# Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert

Realisierungen: `type Env = String -> Integer`

Operationen:

- `empty :: Env` leere Umgebung
- `lookup :: Env -> String -> Integer`

Notation:  $e(x)$

- `extend :: String -> Integer -> Env -> Env`

Notation:  $e[v := z]$

## Beispiel

`lookup (extend "y" 4 (extend "x" 3 empty)) "x"`

entspricht  $(\emptyset[x := 3][y := 4])x$

# Übung

## 1. Primalitäts-Zertifikate

- welche von 2, 4, 8 sind primitive Wurzel mod 101?
- vollst. Primfaktorzerlegung von 100 angeben
- ein vollst. Prim-Zertifikat für 101 angeben.
- bestimmen Sie  $2^{(101-1)/5} \pmod{101}$  von Hand  
Hinweise: 1. das sind *nicht* 20 Multiplikationen,  
2. es wird *nicht* mit riesengroßen Zahlen gerechnet.

## 2. Geben Sie den vollständigen Ableitungsbaum an für die Auswertung von

```
let {x = 5} in let {y = 7} in x
```

# Semantische Bereiche

- bisher: Wert eines arithmetischen Ausdrucks ist Zahl.
- jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

```
data Val = ValInt Int
 | ValBool Bool
```

- typische Verarbeitung:

```
value env x = case x of
 Plus l r ->
 case value env l of
 ValInt l ->
 case value env r of
 ValInt r ->
 ValInt (i + j)
```

# Continuations

- Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
 ValInt i -> k i
 _ -> error "expected ValInt"
```

$k$  ist die *continuation* (die Fortsetzung im Erfolgsfall)

- eben geschriebenen Code refaktorisieren zu:

```
value env x = case x of
 Plus l r ->
 with_int (value env l) $ \ i ->
 with_int (value env r) $ \ j ->
 ValInt (i + j)
```

# Aufgaben

## 1. Bool im Interpreter

- Boolesche Literale
- relationale Operatoren (`==`, `<`, o.ä.),
- Inferenz-Regel(n) für Auswertung des `if`
- Implementierung der Auswertung von `if/then/else` mit `with_bool`,

## 2. Striktheit der Auswertung

- einen Ausdruck  $e :: \text{Exp}$  angeben, für den `value undefined e` eine Exception ist (zwei mögliche Gründe: nicht gebundene Variable, Laufzeit-Typfehler)
- mit diesem Ausdruck: diskutiere Auswertung von `let {x = e} in 42`

### 3. bessere Organisation der Quelltexte

- Cabalisierung (Quelltexte in `src/`, Projektbeschreibungsdatei `cb.cabal`), Anwendung: `cabal repl` usw.
- **separate Module** für `Exp`, `Env`, `Value`,







# Unterprogramme

## Beispiele

- in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:
  - Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm
- allgemeinstes Modell:
  - Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

# Interpreter mit Funktionen

- abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...
 | Abs { par :: Name , body :: Exp }
 | App { fun :: Exp , arg :: Exp }
```

- konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x } in f (f 3)
```

- konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x } in f (f 3)
```

# Semantik (mit Funktionen)

- erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... | ValFun (Val -> Val)
```

- erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
```

```
value env x = case x of
```

```
 ... | Abs n b -> _ | App f a -> _
```

- mit Hilfsfunktion `with_fun :: Val -> ...`

- Testfall (in konkreter Syntax)

```
let { x = 4 } in let { f = \ y -> x * y }
 in let { x = 5 } in f x
```

# Let und Lambda

- `let { x = A } in Q`

kann übersetzt werden in

`(\ x -> Q) A`

- `let { x = a , y = b } in Q`

wird übersetzt in ...

- beachte: das ist nicht das `let` aus Haskell

# Mehrstellige Funktionen

... simulieren durch einstellige:

- mehrstellige Abstraktion:

$$\lambda x y z \rightarrow B := \lambda x \rightarrow (\lambda y \rightarrow (\lambda z \rightarrow B))$$

- mehrstellige Applikation:

$$f P Q R := ((f P) Q) R$$

(die Applikation ist links-assoziativ)

- der Typ einer mehrstelligen Funktion:

$$T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3 \rightarrow T4 := \\ T1 \rightarrow (T2 \rightarrow (T3 \rightarrow T4))$$

(der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

# Semantik mit Closures

- **bisher:** `ValFun` ist Funktion als Datum der Gastsprache

```
value env x = case x of ...
 Abs n b -> ValFun $ \ v ->
 value (extend n v env) b
 App f a ->
 with_fun (value env f) $ \ g ->
 with_val (value env a) $ \ v -> g v
```

- **alternativ: Closure:** enthält Umgebung `env` und Code `b`

```
value env x = case x of ...
 Abs n b -> ValClos env n b
 App f a -> ...
```

# Closures (Spezifikation)

- Closure konstruieren (Axiom-Schema):

$$\frac{}{\text{wert}(E, \lambda n.b, \text{Clos}(E, n, b))}$$

- Closure benutzen (Regel-Schema, 3 Prämissen)

$$\frac{\text{wert}(E_1, f, \text{Clos}(E_2, n, b)), \text{wert}(E_1, a, w), \text{wert}(E_2[n := w], b, r)}{\text{wert}(E_1, f a, r)}$$

- Ü: Inferenz-Baum für Auswertung des vorigen Testfalls (geschachtelte Let) zeichnen
- ... oder Interpreter so erweitern, daß dieser Baum ausgegeben wird

# Rekursion?

- Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let { x = 1 + x } in x
```

- aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x -> if x > 0
 then x * f (x - 1) else 1
 } in f 5
```

(nächste Woche)

- aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:



## Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }
in let { s x = x + 1 }
 in t t t t s 0
```

- auf dem Papier den Wert bestimmen
- mit selbstgebaudem Interpreter ausrechnen
- mit Haskell ausrechnen
- in JS (node) ausrechnen

# Repräsentation von Fehlern

- Fehler explizit im semantischen Bereich des Interpreters repräsentieren (anstatt als Exception der Gastsprache)

```
data Val = ... | ValErr Text
```

- strikte Semantik: `ValErr` *niemals* in Umgebung (bei Let-Bindung oder UP-Aufruf)
- **Ü**: realisieren durch Aufruf (an geeigneten Stellen) von

```
with_val :: Val -> (Val -> Val) -> Val
with_val v k = case v of
 ValErr _ -> v
 _ -> k v
```

# Übungen

1. eingebaute primitive Rekursion (Induktion über Peano-Zahlen):

implementieren Sie die Funktion

`fold :: r -> (r -> r) -> N -> r`

**Testfall:** `fold 1 (\x -> 2*x) 5 == 32`

durch `data Exp = .. | Fold ..` und neuen Zweig  
in `value`

Wie kann man damit die Fakultät implementieren?

2. alternative Implementierung von Umgebungen

- **bisher** `type Env = Id -> Val`

- **jetzt** `type Env = Data.Map.Map Id Val` oder `Data.HashMap`

Messung der Auswirkungen: 1. Laufzeit eines Testfalls, 2. Laufzeiten einzelner UP-Aufrufe (profiling)











# Lambda-Kalkül (Wdhlg.)

## Motivation

1. Modellierung von Funktionen:

- intensional: Fkt. ist Berechnungsvorschrift, Programm
- (extensional: Fkt. ist Menge v. geordneten Paaren)

2. Notation mit gebundenen (lokalen) Variablen, wie in

- Analysis:  $\int x^2 dx, \sum_{k=0}^n k^2$
- Logik:  $\forall x \in A : \forall y \in B : P(x, y)$
- Programmierung:  

```
static int foo (int x) { ... }
```

# Der Lambda-Kalkül

- ist der Kalkül für Funktionen mit benannten Variablen
- Alonzo Church, 1936 ... Henk Barendregt, 1984 ...
- die wesentliche Operation ist das Anwenden einer Funktion:

$$(\lambda x. B) A \rightarrow_{\beta} B[x := A]$$

Beispiel:  $(\lambda x. x * x)(3 + 2) \rightarrow_{\beta} (3 + 2) * (3 + 2)$

- Im reinen Lambda-Kalkül gibt es *nur* Funktionen  
(keine Zahlen, Wahrheitswerte usw.)

# Lambda-Terme

- Menge  $\Lambda$  der Lambda-Terme

(mit Variablen aus einer Menge  $V$ ):

- (Variable) wenn  $x \in V$ , dann  $x \in \Lambda$
- (Applikation) wenn  $F \in \Lambda$ ,  $A \in \Lambda$ , dann  $(FA) \in \Lambda$
- (Abstraktion) wenn  $x \in V$ ,  $B \in \Lambda$ , dann  $(\lambda x.B) \in \Lambda$

Beispiele:  $x$ ,  $(\lambda x.x)$ ,  $((xz)(yz))$ ,  $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))))$

- verkürzte Notation (Klammern weglassen)

- $(\dots ((FA_1)A_2) \dots A_n) \sim FA_1A_2 \dots A_n$
- $\lambda x_1.(\lambda x_2. \dots (\lambda x_n.B) \dots) \sim \lambda x_1x_2 \dots x_n.B$

mit diesen Abkürzungen simuliert  $(\lambda x_1 \dots x_n.B)A_1 \dots A_n$   
eine mehrstellige Funktion und -Anwendung

# Eigenschaften der Reduktion

- $\rightarrow_{\beta}$  auf  $\Lambda$  ist nicht terminierend (es gibt Terme mit unendlichen Ableitungen)

$$W = \lambda x.xx, \Omega = WW.$$

- es gibt Terme mit Normalform und unendlichen Ableitungen,  $KI\Omega$  mit  $K = \lambda xy.x, I = \lambda x.x$

- $\rightarrow_{\beta}$  auf  $\Lambda$  ist konfluent

$$\forall A, B, C \in \Lambda : A \rightarrow_{\beta}^* B \wedge A \rightarrow_{\beta}^* C \Rightarrow \exists D \in \Lambda : B \rightarrow_{\beta}^* D \wedge C \rightarrow_{\beta}^* D$$

- Folgerung: jeder Term hat höchstens eine Normalform

# Beziehung zur Semantik des Interpreters

- $\lambda$ -Kalkül: Rel.  $\rightarrow_{\beta}$  substituiert Variablen im Term  
schwache Reduktion: wie  $\rightarrow_{\beta}$ , aber niemals unter  $\lambda$   
unser Interpreter: realisiert schwache Reduktion, Regeln  
für  $\text{wert}(E, X, w)$  speichern Substitutionen in Umgebung
- ein Zusammenhang wird hergestellt durch *Kalküle für explizite Substitutionen*,

Pierre-Louis Curien: *An Abstract Framework for Environment Machines*, TCS 82 (1991),

[https://doi.org/10.1016/0304-3975\(91\)90230-Y](https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90230-Y)

Abadi, Cardelli, Curien, Levy: *Explicit Substitutions*, JFP 1991, <https://doi.org/10.1017/S0956796800000186>,

# Daten als Funktionen

- Simulation von Daten (Tupel) durch Funktionen (Lambda-Ausdrücke):
  - Konstruktor:  $\langle D_1, \dots, D_k \rangle := \lambda s. s D_1 \dots D_k$
  - Selektoren:  $s_i^k := \lambda t. t(\lambda d_1 \dots d_k. d_i)$

es gilt  $s_i^k \langle D_1, \dots, D_k \rangle \rightarrow_{\beta}^* D_i$

Ü: überprüfen für  $k = 2$

- Anwendungen:
  - Modellierung von Listen, Zahlen
  - Auflösung simultaner Rekursion

# Lambda-Kalkül als universelles Modell

- Wahrheitswerte:

$\text{True} := \lambda xy.x$ ,  $\text{False} := \lambda xy.y$

- Verzweigung:  $\text{if } b \text{ then } x \text{ else } y := bxy$

- natürliche Zahlen als iterierte Paare (Ansatz)

$(0) := \langle \text{True}, \lambda x.x \rangle$ ;  $(n + 1) := \langle \text{False}, n \rangle$

- $s_2^2$  ist partielle Vorgänger-Funktion:  $s_2^2(n + 1) = n$

- Verzweigung:  $\text{if } a = 0 \text{ then } x \text{ else } y := s_1^2axy$

- Ü: nachrechnen. Ü: das geht sogar mit  $(0) = \lambda x.x$

- Rekursion?

# Fixpunkt-Kombinatoren (Motivation)

- Beispiel: die Fakultät

$f = \lambda x \rightarrow \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x * f(x-1)$

erhalten wir als Fixpunkt einer Fkt. 2. Ordnung

$g = \lambda h x \rightarrow \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } x * h(x-1)$

$f = \text{fix } g \quad \text{-- d.h., } f = g f$

- Ü:  $g(\lambda z.z)7$ , Ü:  $\text{fix } g 7$

- Implementierung von  $\text{fix}$  mit Rekursion:

$\text{fix } g = g (\text{fix } g)$

- es geht aber auch *ohne Rekursion*. Ansatz:  $\text{fix} = AA$ ,

dann  $\text{fix } g = AAg = g(AAg) = g(\text{fix } g)$

eine Lösung ist  $A = \lambda xy \dots$



# Fixpunkt-Kombinatoren (Implementierung)

- Definition (der *Fixpunkt-Kombinator* von Turing)

$$\Theta = (\lambda xy.(y(xxy)))(\lambda xy.(y(xxy)))$$

- Satz:  $\Theta f \rightarrow_{\beta}^* f(\Theta f)$ , d. h.  $\Theta f$  ist Fixpunkt von  $f$
- Folgerung: im Lambda-Kalkül kann man simulieren:
  - Daten: Zahlen, Tupel von Zahlen
  - Programmablaufsteuerung durch:
    - \* Nacheinander „ausführung“:  
Verkettung von Funktionen
    - \* Verzweigung,
    - \* Wiederholung: durch Rekursion (mit Fixpunktkomb.)

# Lambda-Berechenbarkeit

*Satz:* (Church, Turing)

Menge der Turing-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Wörter auf Band)

Alan Turing: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, Proc. LMS, 2 (1937) 42 (1) 230–265

<https://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>

= Menge der Lambda-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Lambda-Ausdrücke)

Alonzo Church: A Note on the Entscheidungsproblem, J. Symbolic Logic 1 (1936) 1, 40–41

= Menge der while-berechenbaren Funktionen  
(Zahlen als Registerinhalte)

# Kodierung von Zahlen nach Church

- $c : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda : n \mapsto \lambda f x. f^n(x)$   
mit  $f^0(x) := x, f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$
- in Haskell: `c n f x = iterate f x !! n`
- Decodierung: `d e = e (\x -> x+1) 0`
- Nachfolger:  $s(c_n) = c_{n+1}$  für  $s = \lambda n f x. f(n f x)$   
1. auf Papier beweisen, 2. mit leancheck prüfen  
benutze `check $ \ (Natural x) -> ...`
- Addition: `plus c_a c_b = c_{a+b}` für `plus = \ a b f x. a f (b f x)`
- implementiere die Multiplikation, beweise, prüfe
- Potenz: `pow c_a c_b = c_{a^b}` für `pow = \ a b. b a`

# Übung Lambda-Kalkül (I)

- die Fakultät (z.B. von 7) ...
  - in Haskell (ohne Rekursion, aber mit `Data.Function.fix`)
  - in unserem Interpreter (ohne Rekursion, mit Turing-Fixpunktkombinator  $\Theta$ )
  - in Javascript (ohne Rekursion, mit  $\Theta$ )
- Kodierung von Wahrheitswerten und Zahlen (nach Church)
  - implementiere Test auf 0: `iszero cn = if n = 0 then True else False`
  - implementiere Addition, Multiplikation, Fakultät ohne `If`, `Eq`, `Const`, `Plus`, `Times`

- für nützliche Ausgaben: das Resultat nach `ValInt` dekodieren (dabei muß `Plus` und `Const` benutzt werden)

# Übung Lambda-Kalkül (II)

folgende Aufgaben aus H. Barendregt: *Lambda Calculus*

- (Abschn. 6.1.5) gesucht wird  $F$  mit  $Fxy = FyxF$ .

Musterlösung: es gilt  $F = \lambda xy.FyxF = (\lambda fxy.fyx f)F$ ,

also  $F = \Theta(\lambda fxy.fyx f)$

- (Aufg. 6.8.2) Konstruiere  $K^\infty \in \Lambda^0$  (ohne freie Variablen) mit  $K^\infty x = K^\infty$  (hier und in im folgenden hat = die Bedeutung  $(\rightarrow_\beta \cup \rightarrow_{\bar{\beta}})^*$ )

- Konstruiere  $A \in \Lambda^0$  mit  $Ax = xA$

- beweise den Doppelfixpunktsatz (Kap. 6.5)

$$\forall F, G : \exists A, B : A = FAB \wedge B = GAB$$

- (Aufg. 6.8.17, B. Friedman) Konstruiere Null, Nulltest, partielle Vorgängerfunktion für Zahlensystem mit Nachfolgerfunktion  $s = \lambda x.\langle x \rangle$  (das 1-Tupel)
- (Aufg. 6.8.14, J. W. Klop)

$$X = \lambda abcdefghijklmnopqstuvvxy zr.$$

$$r(\text{thisisa fixedpointcombinator})$$

$$Y = X^{27} = \underbrace{X \dots X}_{27}$$

Zeige, daß  $Y$  ein Fixpunktkombinator ist.





# Fixpunkte

## Motivation

Das ging bisher gar nicht:

```
let { f = \ x -> if x > 0
 then x * f (x - 1) else 1
 } in f 5
```

Lösung 1: benutze Fixpunktkombinator

```
let { Theta = ... } in
let { f = Theta (\ g -> \ x -> if x > 0
 then x * g (x - 1) else 1)
 } in f 5
```

Lösung 2 (später): realisiere Fixpunktberechnung im Interpreter (neuer AST-Knotentyp `Fix`)

# Existenz von Fixpunkten

Fixpunkt von  $f :: C \rightarrow C$  ist  $x :: C$  mit  $fx = x$ .

Existenz? Eindeutigkeit? Konstruktion?

Satz: Wenn  $C$  *pointed CPO* und  $f$  *stetig*,  
dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt.

- CPO = complete partial order = vollständige Halbordnung
- complete = jede monotone Folge besitzt Supremum (= kleinste obere Schranke)
- pointed:  $C$  hat kleinstes Element  $\perp$

Ü (Wdhlg) Def. obere Schranke, Supremum

# Beispiele f. Halbordnungen, CPOs

Halbordnung? pointed? complete?

- $\leq$  auf  $\mathbb{N}$
- $\leq$  auf  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$
- $\leq$  auf  $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\}$
- Teilbarkeit auf  $\mathbb{N}$
- Präfix-Relation auf  $\Sigma^*$
- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \vee (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\}$  auf  $\mathbb{R}^2$
- Relation  $\subseteq$  auf  $\{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$
- identische Relation  $\text{id}_M$  auf einer beliebigen Menge  $M$
- $\{(\perp, x) \mid x \in M_\perp\} \cup \text{id}_M$  auf  $M_\perp := \{\perp\} \cup M$

# Stetige Funktionen

$f$  ist stetig :=

- $f$  ist monoton:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- und für monotone Folgen  $[x_0, x_1, \dots]$  gilt:  
 $f(\sup[x_0, x_1, \dots]) = \sup[f(x_0), f(x_1), \dots]$

Beispiele: in  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq)$

- $x \mapsto 42$  ist stetig
- $x \mapsto$  if  $x < +\infty$  then  $x + 1$  else  $+\infty$
- $x \mapsto$  if  $x < +\infty$  then 42 else  $+\infty$

Satz: Wenn  $C$  pointed CPO und  $f : C \rightarrow C$  stetig, dann besitzt  $f$  genau einen kleinsten Fixpunkt ...

Beweis: ... und dieser ist  $\sup[\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots]$

# CPO auf Menge von Funktionen

- Menge der partiellen Funktionen von  $B$  nach  $B$ :

$$C = (B \multimap B)$$

- partielle Funktion  $f : B \multimap B$   
entspricht totaler Funktion  $f : B \rightarrow B_{\perp}$
- $C$  geordnet durch  $f \leq g \iff \forall x \in B : f(x) \leq g(x)$ ,  
wobei  $\leq$  die vorhin definierte CPO auf  $B_{\perp}$
- $f \leq g$  bedeutet:  $g$  ist Verfeinerung von  $f$
- Das Bottom-Element von  $C$  ist die überall undefinierte Funktion. (diese heißt auch  $\perp$ )

# Funktionen als CPO, Beispiel

- der Operator  $F =$

$\lambda g \rightarrow ( \lambda x \rightarrow \text{if } (x==0) \text{ then } 0$   
 $\qquad \qquad \qquad \text{else } 2 + g (x - 1) )$

ist stetig auf  $(\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N})$  (Beispiele nachrechnen!)

- Iterative Berechnung des Fixpunktes:

$\perp = \emptyset$  überall undefiniert

$F \perp = \{(0, 0)\}$

$F(F \perp) = \{(0, 0), (1, 2)\}$

$F^3 \perp = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

- $\text{sup}[\dots, F^k \perp, \dots] = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

# Welche Funktionale sind stetig?

- die Erfahrung (der Programmierung mit rekursiven Funktionen) lehrt: alle Operatoren  $\lambda g \rightarrow \lambda x \rightarrow \dots g \dots$  sind stetig.
- denn die Semantik der (von uns bisher benutzten) AST-Konstruktoren bildet stetige Ftk. auf stetige Fkt. ab
- Ü:  $(\lambda x. \text{if } x = \perp \text{ then } 42 \text{ else } \perp)$  ist nicht stetig.
- Diskussion: eine solche Funktion kann nicht die Semantik eines Programms sein, weil das Halteproblem nicht entscheidbar ist

# Fixpunkte und Laziness

- Fixpunkte existieren in pointed CPOs.
  - (Maschinen-) Zahlen: nicht pointed (arithmetische Operatoren sind strikt)
  - (Haskell-) Daten (Listen, Bäume usw.): pointed: (Konstruktoren sind nicht strikt)
  - Funktionen (Unterprogramme):  
Abstraktion ( $\lambda$ ) ist nicht strikt, in *jeder* Sprache!

- Beispiele in Haskell:

```
fix f = f (fix f)
```

```
xs = fix $ \ zs -> 1 : zs
```

```
g = fix $ \h -> \x -> if x==0 then 1 else x*h(x-1)
```

- in Sprachen mit strikter Semantik üblicherweise:  
keine rekursiven Daten, aber rekursive Unterprogramme



# Fixpunktberechnung im Interpreter

- Erweiterung der abstrakten Syntax:

```
data Exp = ... | Rec Name Exp
```

- Beispiel

```
App
 (Rec g (Abs v (if v==0 then 0 else 2 + g(v-1))))
5
```

- Bedeutung:  $\text{Rec } x \ B$  ist Fixpunkt von  $(\lambda x. B)$

- Semantik: 
$$\frac{\text{wert}(E, (\lambda x. B)(\text{Rec } x \ B), v)}{\text{wert}(E, \text{Rec } x \ B, v)}$$

- Ü: verwende `Let` statt `App` (`Abs ..`) ..

- Ü: das Beispiel mit dieser Regel auswerten

# Arithmetik mit Bedarfsauswertung

- über  $\mathbb{Q}$  hat  $f = \lambda x.1 + x/4$  einen Fixpunkt  $(4/3)$ ,  
aber  $\sup_k f^k \perp = \perp$ , weil die Operationen strikt sind.
- wirklich? Kommt auf die Repräsentation der Zahlen an!  
Op. auf Maschinenzahlen sind strikt. — Aber:
- Zahl als lazy Liste von Ziffern (Bsp: Basis 2)  
`x=plus(1:repeat 0)(0:0:x)=[1,0,1,0,1,0..]`
- Ü: bestimme  $y = \sqrt{2} - 1$  aus  $2 = (1 + y)^2$ ,  
d.h., als Fixpunkt von  $\lambda y.(1 - y^2)/2$
- **Kombiniere** <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.32.4249> (**Jerzy Karczmarczuk 1998**), <http://joerg.endrullis.de/publications/productivity/>

# Simultane Rekursion: letrec

- Beispiel (aus: D. Hofstadter, Gödel Escher Bach, 1979)

```
letrec { f = \ x -> if x == 0 then 1
 else x - g(f(x-1))
 , g = \ x -> if x == 0 then 0
 else x - f(g(x-1))
 } in f 15
```

Bastelaufgabe: für welche  $x$  gilt  $f(x) \neq g(x)$ ?

- weitere Beispiele:

```
letrec { y = x * x, x = 3 + 4 } in x - y
letrec { f = \ x -> .. f (x-1) } in f 3
```

# letrec nach rec (falsch)

- Plan: mit Lambda-Ausdrücken für Konstruktor, Selektor

```
LetRec [(n1, x1), .. (nk, xk)] y
=> (rec t (let n1 = select1 t
 ..
 nk = selectk t
 in tuple x1 .. xk))
 (\ n1 .. nk -> y)
```

- benutzt  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle f = f x_1 \dots x_k$
- terminiert nicht, die Auswertungsstrategie des Interpreters ist dafür zu eifrig (*eager*)
- Lösung: tuple direkt unter rec t,  
let .. tuple ..  $\Rightarrow$  tuple (let ..) (let ..)

# letrec nach rec (richtig)

- Teilausdrücke (für jedes  $i$ )

```
let { n1 = select1 t, .. nk = selectk t
 } in xi
```

äquivalent vereinfachen zu  $t (\backslash n1 .. nk \rightarrow xi)$

- `LetRec [(n1,x1), .. (nk,xk)] y`  
 $\Rightarrow$  `( rec t`  
    `( tuple ( t ( \ n1 .. nk -> x1 ) )`  
        `...`  
        `( t ( \ n1 .. nk -> xk ) ) ) )`  
    `( \ n1 .. nk -> y )`

- **Ü:** implementiere `letrec {f = _, g = _} in f 15`

# Übung Fixpunkte

1. Limes der Folge  $F^k(\perp)$  für

```
F h = \ x -> if x > 23 then x - 11
 else h (h (x + 14))
```

2. Ist  $F$  stetig? Gib den kleinsten Fixpunkt von  $F$  an:

```
F h = \ x -> if x >= 2 then 1 + h(x-2)
 else if x == 1 then 1 else h(4) - 2
```

Hat  $F$  weitere Fixpunkte?

3.  $C =$  Menge der Formalen Sprachen über  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  
halbgeordnet durch  $\subseteq$ .  $C$  ist CPO? pointed?

$g : C \rightarrow C : L \mapsto \{\epsilon\} \cup \{a\} \cdot L \cdot \{b\}$  ist stetig? Fixpunkt(e)?

$h : C \rightarrow C : L \mapsto \{a\} \cup L \cdot \{b\} \cdot (\Sigma^* \setminus L)$

4. in der Relation  $\subseteq$  auf  $\{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$ : geben Sie eine stetige Funktion an, die zwei verschiedene kleinste Fixpunkte besitzt.

Ist das ein Widerspruch zum CPO-Theorem?

5. Geben Sie Argumente aus dieser Diskussion wieder:

*... distinguish bindings that are self-referentially recursive from non-recursive bindings* <https://github.com/ghc-proposals/ghc-proposals/pull/401> (O. Charles, 8. Febr. 2021)

Vergleichen Sie mit `let (rec)` in OCaml (Primärquelle angeben, d.h., Sprachstandard)

Für Haskell-Lückentext-Aufgaben in autotool: um die Benutzung von Rekursionsmustern zu erzwingen, wäre es nützlich, beliebige Rekursion zu verbieten.