Fortgeschrittene Programmierung Vorlesung WS 09,10; SS 12–14, 16–19, 21–24

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

16. Mai 2024

1 Organisatorisches

Ablauf Lehrveranstaltung und Prüfung

- jede Woche eine Vorlesung, dort werden Hausaufgaben gestellt
- Aufgaben zur Präsentation in der nächsten Übung
  jeder soll (als Teil einer Gruppe) insgesamt 3 mal präsentieren
- Aufgaben in autotool (selbständige Bearbeitung innerhalb der nächsten zwei Wochen)
  jeder soll insgesamt 50 % der Pflichtaufgaben erledigen
- Prüfung (vorbehaltlich Beschluß Prüfungsausschuß)
  in elektrischer Form (autotool, in Präsenz unter Aufsicht)

Quellen

- Skript (Woche für Woche) `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/lehre.html`
  Plan: vgl. *How I Teach Functional Programming*, WFLP 2017, `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/17/wflp/`
- Quelltexte aus Vorlesung, Vorbereitung Hausaufgaben (zur Präsentation): `https://gitlab.dit.htwk-leipzig.de/johannes.waldmann/fop-ss24`
  Einschreiben! (Projekt wird dann *private* geschaltet)

- Hausaufgaben (individuell) `https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/new/vorlesung/324/aufgaben/aktuell`
  Einschreiben! (Übungsgruppe wählen)

Übungen KW 15 (vor Vorlesung)

- Arbeiten im Pool: Shell, `$PATH`, `ghci`, vgl. `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/`

```
$ cabal update
#   $HOME/.config/cabal/config  editieren (-haddock)
$ cabal install --lib leancheck
$ ghci
GHCi, version 9.8.2: https://www.haskell.org/ghc/  :? for help
ghci> import Test.LeanCheck
ghci> check $ \ p q -> (p && q) == (q && p)
ghci> :doc check
```

- `ssh-keygen`, `.ssh/id_rsa.pub` ⇒ `gitlab.dit`, `git clone`
- wenn Zeit ist: autotool 15-1, `https://www.mathekalender.de/wp/de/kalender/aufgaben/2023-01-de/`

2 Einleitung

Programmierung im Studium bisher

- 1. Sem: Modellierung (formale Spezifikationen (von konkreten und abstrakten Datentypen))
- 1./2. Sem Grundlagen der (AO) Programmierung
  - imperatives Progr. (Programm ist Folge von Anweisungen, bewirkt Zustandsänderung)
  - strukturiertes P. (genau ein Eingang/Ausgang je Teilp.)
  - objektorientiertes P. (Interface = abstrakter Datentyp, Klasse = konkreter Datentyp)
- 2. Sem: Algorithmen und Datenstrukturen
  (Spezifikation, Implementierung, Korrektheit, Komplexität)
- 3. Sem: Softwaretechnik (industrielle Softwareproduktion)

Worin besteht jetzt der Fortschritt?

- *deklarative* Programmierung

  (Programm *ist* ausführbare Spezifikation)
- insbesondere: *funktionale* Programmierung

  Def: Programm berechnet *Funktion* f : Eingabe $\mapsto$ Ausgabe,

  (kein Zustand, keine Zustandsänderungen)
-
  - Daten (erster Ordnung) sind Bäume
  - Programm ist Gleichungssystem
  - Programme sind auch Daten (höherer Ordnung)
- ausdrucksstark, sicher, effizient, parallelisierbar

Formen der deklarativen Programmierung

- funktionale Programmierung: `foldr (+) 0 [1,2,3]`

  ```
  foldr f z l = case l of
      [] -> z ; (x:xs) -> f x (foldr f z xs)
  ```
- logische Programmierung: `append(A,B,[1,2,3]).`

  ```
  append([],YS,YS).
  append([X|XS],YS,[X|ZS]):-append(XS,YS,ZS).
  ```
- Constraint-Programmierung

  ```
  (set-logic QF_LIA) (set-option :produce-models true)
  (declare-fun a () Int) (declare-fun b () Int)
  (assert (and (>= a 5) (<= b 30) (= (+ a b) 20)))
  (check-sat) (get-value (a b))
  ```

Definition: Funktionale Programmierung

- Rechnen = Auswerten von Ausdrücken (Termbäumen)
- Dabei wird ein *Wert* bestimmt

  und es gibt keine (versteckte) *Wirkung*.

  (engl.: side effect, dt.: Nebenwirkung)

- Werte können sein:
  - "klassische" Daten (Zahlen, Listen, Bäume...)
    `True :: Bool`, `[3.5, 4.5] :: [Double]`
  - Funktionen (Sinus, ...)
    `[sin, cos] :: [Double -> Double]`
  - Aktionen (Datei lesen, schreiben, ...)
    `readFile "foo.text" :: IO String`

Softwaretechnische Vorteile

...der funktionalen Programmierung

- Beweisbarkeit: Rechnen mit Programmen wie in der Mathematik mit Termen
- Sicherheit: es gibt keine Nebenwirkungen und Wirkungen sieht man bereits am Typ
- Aussdrucksstärke, Wiederverwendbarkeit: durch Funktionen höherer Ordnung (sog. Entwurfsmuster)
- Effizienz: durch Programmtransformationen im Compiler,
- Parallelität: keine Nebenwirkungen ⇒ keine *data races*, fktl. Programme sind *automatisch parallelisierbar*

Beispiel Spezifikation/Test

```
import Test.LeanCheck

append :: forall t . [t] -> [t] -> [t]
append [] y = y
append (h : t) y = h : (append t y)

associative f =
   \ x y z -> f x (f y z) == f (f x y) z
commutative f = \ x y -> ...

test = check
  (associative (append::[Bool]->[Bool]->[Bool]))
```

Übung: Kommutativität (formulieren und testen)

Beispiel Verifikation

```
app :: forall t . [t] -> [t] -> [t]
app [] y = y
app (h : t) y = h : (app t y)

Lemma: app x (app y z) .=. app (app x y) z

Proof by induction on List x
  Case []
    To show: app [] (app y z) .=. app (app [] y) z
  Case h:t
    To show: app (h:t) (app y z) .=. app (app (h:t) y) z
    IH: app t (app y z) .=. app (app t y) z
```

CYP `https://github.com/noschinl/cyp`,
ist vereinfachte Version von Isabelle `https://isabelle.in.tum.de/`

Beispiel Parallelisierung (Haskell)

```
-- Länge der Collatz-Folge
collatz :: Int -> Int
collatz x = if x <= 1 then 0
  else 1 + collatz (if even x then div x 2 else 3*x+1)
-- Summe der Längen
main :: IO ()
main = print $ sum
    $ map collatz [1 .. 10^7]
```

wird parallelisiert durch *Strategie-Annotation*:

```
import Control.Parallel.Strategies
...
main = print $ sum
  $ withStrategy (parListChunk (10^5) rseq)
  $ map collatz [1 .. 10^7]
```

Beispiel Parallelisierung (C#, PLINQ)

- Die Anzahl der 1-Bits einer nichtnegativen Zahl:

```
Func<int,int>f =
   x=>{int s=0; while(x>0){s+=x%2;x/=2;}return s;}
```

- $\sum_{x=0}^{2^{26}-1} f(x)$ `Enumerable.Range(0,1<<26).Select(f).Sum()`
- automatische parallele Auswertung, Laufzeitvergleich:

```
Time(()=>Enumerable.Range(0,1<<26).Select(f).Sum())
Time(()=>Enumerable.Range(0,1<<26)
            .AsParallel().WithDegreeOfParallelism(4)
                                    .Select(f).Sum())
```

vgl. *Introduction to PLINQ* https://msdn.microsoft.com/en-us/library/dd997425(v=vs.110).aspx

Softwaretechnische Vorteile

...der statischen Typisierung

> The language in which you write profoundly affects the design of programs written in that language.
>
> For example, in the OO world, many people use UML to sketch a design. In Haskell or ML, one writes type signatures instead. Much of the initial design phase of a functional program consists of writing type definitions.
>
> **Unlike UML, though, all this design is incorporated in the final product, and is machine-checked throughout.**

Simon Peyton Jones, in: Masterminds of Programing, 2009; http://shop.oreilly.com/product/9780596515171.do

Deklarative Programmierung in der Lehre

- funktionale Programmierung: diese Vorlesung
- logische Programmierung: in *Grundl. Künstl. Intell.*
- Constraint-Programmierung: als Wahlfach (WS 23)

Beziehungen zu weiteren LV: Voraussetzungen

- Bäume, Terme (Modellierung, Alg.+DS)
- Logik (Grundlagen TI, Softwaretechnik)

Anwendungen:

- Softwarepraktikum
- weitere Sprachkonzepte in *Prinzipien v. Programmiersprachen*
- *Programmverifikation* (vorw. f. imperative Programme)

Konzepte und Sprachen

Funktionale Programmierung ist ein *Konzept*. Realisierungen:

- in prozeduralen Sprachen:
  - Unterprogramme als Argumente (in Pascal)
  - Funktionszeiger (in C)
- in OO-Sprachen: Befehlsobjekte
- Multi-Paradigmen-Sprachen:
  - Lambda-Ausdrücke in C#, Scala, Clojure
- funktionale Programmiersprachen (LISP, ML, Haskell)

Die Erkenntnisse sind sprachunabhängig.

- A good programmer can write LISP in any language.
- Learn Haskell and become a better Java programmer.

Gliederung der Vorlesung

- Terme, Termersetzungssysteme, algebraische Datentypen, Pattern Matching, Persistenz
- Funktionen (polymorph, höherer Ordnung), Lambda-Kalkül, Rekursionsmuster
- Typklassen zur Steuerung der Polymorphie
  (Anwendung: automatische Testdatenerzeugung)
- Bedarfsauswertung, unendl. Datenstrukturen
- Konstruktorklassen (Functor, Applicative, Monad)
- Collections (endliche Mengen, Abbildungen, Folgen)
  als Anwendung vorher gezeigter Konzepte

Anwendungen dieser Konzepte

- algebraische Datentypen, Pattern Matching, Termersetzungssysteme
  Scale: case class, Java: Entwurfsmuster Kompositum,
  immutable objects (`record`), das Datenmodell von Git
- Funktionen (höherer Ordnung), Lambda-Kalkül, Rekursionsmuster
  Lambda-Ausdrücke in C#, Entwurfsmuster Besucher
  Codequalität, code smells, Refaktorisierung
- Typklassen zur Steuerung der Polymorphie: Interfaces
- Bedarfsauswertung, unendl. Datenstrukturen
  Iteratoren, Ströme, LINQ
- Functor, Applicative, Monad: `map`, `flatMap`

Literatur (allgemein)

- wissenschaftliche Quellen zur aktuellen Forschung und Anwendung der funktionalen Programmierung
  - Journal of Functional Programming (CUP) `https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-functional-programming`
  - Intl. Conference Functional Programming (ACM SIGPLAN) `https://www.icfpconference.org/`
  - Intl. Workshop Trends in Functional Programming in Education `https://wiki.tfpie.science.ru.nl/`
- `http://haskell.org/` (Sprachstandard, Werkzeuge, Bibliotheken, Tutorials),

Literatur (speziell diese VL)

- Skript aktuelles Semester `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/lehre.html`
- How I Teach Functional Programming (WFLP 2017) `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/17/wflp/`
- Kriterium für Haskell-Tutorials und -Lehrbücher:

- wo werden `data` (benutzerdefinerte algebraische Datentypen) und `case` (pattern matching) erklärt?

  Je später, desto schlechter!

Alternative Quellen

- - Q: Aber in Wikipedia/Stackoverflow steht, daß ...
  - A: Na und.
- Es mag eine in Einzelfällen nützliche Übung sein, sich mit dem Halbwissen von Nichtfachleuten auseinanderzusetzen. (Aber `https://xkcd.com/386/`)
- In VL und Übung verwenden und diskutieren wir die durch Dozenten/Skript/Modulbeschreibung vorgegebenen Quellen (Lehrbücher, referierte Original-Artikel, Standards zu Sprachen und Bibliotheken)
- ... gilt entsprechend für Ihre Bachelor- und Master-Arbeit.
- Wikipedia: benutzen—ja (um Primärquellen zu finden), zitieren—nein (ist keine wissenschaftliche Quelle).

Organisation der LV

- jede Woche eine Vorlesung, eine Übung
- Hausaufgaben
  - gruppenweise: markierte Aufgaben aus dem Skript: anmelden (Wiki), diskutieren (Issue-Tracker), vorrechnen (in der jeweils nächsten Übung)
  - individuell (jeweils 2 Wochen Bearbeitungszeit) `https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/new/`
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten der Übungsaufgaben.
  - Vorrechnen: 3 mal,
  - Autotool: 50 Prozent der Pflicht-Aufgaben,
- Prüfung: Klausur 120 min, keine Hilfsmittel

Übungen

- Informationen zur VL: `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/lehre.html`
- digitale Selbstverteidigung: Browser und Suchmaschine datenschutzgerecht auswählen und einstellen.

  Das Geschäftsmodell der Überwachungswirtschaft ist es, Ihren Bildschirmplatz, und damit Ihre Aufmerksamkeit und Ihre Lebenszeit an Anzeigenkunden zu verkaufen. Um dabei höhere Erlöse zu erzielen, wird Ihr Verhalten vermessen, gespeichert, vorhergesagt und beeinflußt. Die dazu angelegten Personenprofile erlauben eine umfassende privatwirtschaftliche und staatliche Überwachung. Diese soll verschleiert, verharmlost und legalisiert werden.

  Siehe auch

  - OS Überwachungskapitalismus `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/19/ubkap/`,
  - VL Informatik (Nebenfach) `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ws21/inf/folien/#(11)`
- Benutzung Rechnerpool (ssh, tmux, ghci) `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/`
- Beispiel Funktionale Programmierung

```
$ /usr/local/waldmann/opt/ghc/latest/bin/ghci

ghci> length $ takeWhile (== ’0’) $ reverse $ show $ foldr (*) 1 [1
```

  - Typ und Wert von Teilausdrücken feststellen, z.B.

    ```
    ghci> :set +t
    ghci> foldr (*) 1 [1..100 :: Integer]
    ```
  - Beachte polymorphe numerische Literale.
    (Auflösung der Polymorphie durch Typ-Annotation.)
    Warum ist 100 Fakultät als `Int` gleich 0?
  - Welches ist der Typ der Funktion `takeWhile`? Beispiel:

```
odd 3 ==> True ; odd 4 ==> False
takeWhile odd [3,1,4,1,5,9] ==> [3,1]
```

  - ersetze in der Lösung `takeWhile` durch andere Funktionen des gleichen Typs (suche diese mit Hoogle), erkläre Semantik
  - typische Eigenschaften dieses Beispiels (nachmachen!)

    statische Typisierung, Schachtelung von Funktionsaufrufen, Funktion höherer Ordnung, Benutzung von Funktionen aus Standardbibliothek (anstatt selbstgeschriebener).
  - schlechte Eigenschaften (vermeiden!)

    Benutzung von Zahlen und Listen (anstatt anwendungsspezifischer Datentypen) vgl. `http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/list-or-not-list/`

- Haskell-Entwicklungswerkzeuge
  - Compiler, REPL: ghci (Fehlermeldungen, Holes)
  - API-Suchmaschine `http://www.haskell.org/hoogle/`
  - Editor: Emacs `https://xkcd.com/378/`,

    IDE? gibt es, brauchen wir (in dieser VL) nicht `https://hackage.haskell.org/package/haskell-language-server`
- Softwaretechnik im autotool: `http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/se/`

Aufgaben (allgemeines)

- benutzen Sie gitlab.imn zur Koordinierung: (einmalig) Einteilung in Dreiergruppen, (wöchentlich) Bearbeitung der Aufgaben. Benutzen Sie Wiki und Issues mit sinnvollen Titeln/Labeln. Schließen Sie erledigte Issues.
- Jede der markierten Aufgabe kann in jeder Übung aufgerufen werden (Bsp: Aufg. 3 in den INB-Übungen und in der MIB-Übung) Es kann dann eine vorher gemeinsam (von mehreren Gruppen) vorbereitete Lösung präsentiert werden—die aber von jedem einzelnen Präsentator auch verstanden sein sollte.
- Auch die nicht markierten Aufgaben können in den Übungen diskutiert werden—wenn dafür Zeit ist.

Aufgaben

SS 24: Aufgabe 1

1. Digitale Selbstverteidigung

   (a) Welche Daten gibt Ihr Browser preis?

   Starten Sie in einer Konsole den Befehl `ncat --listen --source-port 9999`

   (Konsole soll sichtbar bleiben)

   Rufen Sie im Browser die Adresse `http://localhost:9999` auf, beobachten Sie die Ausgabe in der Konsole.

   Wie (personen)spezifisch ist diese Information?

   (b) Wie können weitere Informationen extrahiert werden? Verwenden Sie `https://www.eff.org/press/releases/test-your-online-privacy-protection-` (Electronic Frontier Foundation, 2015–)

   (c) Stellen Sie Firefox datenschutzgerecht ein. (Das beginnt mit der Default-Startseite!)

   Zeigen Sie die Benutzung von temporary containers, von Profilen (z.B. ein Profil für Browsing im Screen-Share).

   Führen Sie Browser-Plugins `uMatrix`, `uBlockOrigin` vor.

2. zu: E. W. Dijkstra: *Answers to Questions from Students of Software Engineering* (Austin, 2000) (EWD 1035)

   - „putting the cart before the horse“
     - übersetzen Sie wörtlich ins Deutsche,
     - geben Sie eine entsprechende idiomatische Redewendung in Ihrer Muttersprache an,
     - wofür stehen *cart* und *horse* hier konkret?

3. sind die empfohlenen exakten Techniken der Programmierung für große Systeme anwendbar?

   Erklären Sie „lengths of ... grow not much more than linear with the lengths of ...“.

   - Welche Längen werden hier verglichen?

   Modellieren Sie das System als Graph, die Knoten sind die Komponenten, die Kanten sind deren Beziehungen (direkte Abhängigkeiten).

- Welches asymptotische Wachstum ist bei undisziplinierter Entwicklung des Systems zu befürchten?
- Welche Graph-Eigenschaft impliziert den linearen Zusammenhang?
- Wie gestaltet man den System-Entwurf, so daß diese Eigenschaft tatsächlich gilt? Welchen Nutzen hat das für Entwicklung und Wartung?

4. Über ein Monoid $(M, \circ, 1)$ mit Elementen $a, b \in M$ (sowie eventuell weiteren) ist bekannt: $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$.

   Dabei ist ab eine Abkürzung für $a \circ b$ und a^2 für aa, usw.

   - Geben Sie ein Modell mit $1 \neq a \neq b \neq 1$ an.
   - Überprüfen Sie $ab = ba$ in Ihrem Modell.
   - Leiten Sie $ab = ba$ aus den Monoid-Axiomen und gegebenen Gleichungen ab.

   Das ist eine Übung zur Wiederholung der Konzepte *abstrakter* und *konkreter* Datentyp sowie *Spezifikation*.

5. im Rechnerpool live vorführen:

   - ein Terminal öffnen
   - `ghci` starten (in der aktuellen Version), Fakultät von 100 ausrechnen
   - Datei `F.hs` mit Texteditor anlegen und öffnen, Quelltext `f = ...` (Ausdruck mit Wert `100!`) schreiben, diese Datei in `ghci` laden, `f` auswerten

   Dabei wg. Projektion an die Wand:

   Schrift 1. groß genug und 2. schwarz auf weiß.

   Vorher Bildschirm(hintergrund) aufräumen, so daß bei Projektion keine personenbezogenen Daten sichtbar werden. Beispiel: `export PS1="$ "` ändert den Shell-Prompt (versteckt den Benutzernamen).

   Wer eigenen Rechner im Pool benutzt:

   - Aufgaben wie oben *und*
   - `ssh`-Login auf einen Rechner des Pools
     (damit wird die Ausrede *GHC (usw.) geht auf meinem Rechner nicht* hinfällig)
   - `ssh`-Login oder remote-Desktop-Zugriff *von* einem Rechner des Pools auf Ihren Rechner (damit das projiziert werden kann, *ohne* den Beamer umzustöpseln)

(falls das alles zu umständlich ist, dann eben doch einen Pool-Rechner benutzen)

6. welcher Typ ist zu erwarten für die Funktion,

   - (wurde bereits in der Übung behandlelt) die das Spiegelbild einer Zeichenkette berechnet?
   - die die Liste aller (durch Leerzeichen getrennten) Wörter einer Zeichenkette berechnet?

     ```
     f "foo bar" = [ "foo", "bar" ]
     ```

   Suchen Sie nach Funktionen dieses Typs mit `https://www.haskell.org/hoogle/`, erklären Sie einige der Resultate, welches davon ist das passende, rufen Sie diese Funktion auf (in ghci).

3 Daten

Wiederholung: Terme

- (Prädikatenlogik) *Signatur* Σ ist Menge von Funktionssymbolen mit Stelligkeiten
  ein Term t in Signatur Σ ist
  - Funktionssymbol $f \in \Sigma$ der Stelligkeit k mit Argumenten $(t_1, \ldots, t_k)$, die selbst Terme sind.

  $\mathrm{Term}(\Sigma)$ = Menge der Terme über Signatur Σ
- (Graphentheorie) ein Term ist ein gerichteter, geordneter, markierter Baum
- (Datenstrukturen)
  - Funktionssymbol = Konstruktor, Term = Baum

Beispiele: Signatur, Terme

- Signatur: $\Sigma = \{Z/0, S/1, f/2\}$
- Elemente von $\mathrm{Term}(\Sigma)$:
  $Z(), \quad S(S(Z())), \quad f(S(S(Z())), Z())$
- Abkürzung: das leere Argument-Tupel (die Klammern) nach nullstelligen Symbolen weglassen, $f(S(S(Z)), Z)$

- Signatur: $\Gamma = \{E/0, A/1, B/1\}$
- Elemente von $\operatorname{Term}(\Gamma)$: ...
- Bezeichnung: für Signatur Σ und $k \in$:
  Σ_k bezeichnet Menge der Symbole aus Σ mit Stelligkeit k
  $\Sigma_0 = \{Z\}, \Sigma_1 = \{S\}, \Sigma_2 = \{f\}$,
  $\Gamma_0 = \{E\}, \Gamma_1 = \dots, \Gamma_2 = \dots$

Abmessungen von Termen

- die Größe: ist Funktion $|\cdot| : \operatorname{Term}(\Sigma) \to$ mit
  - für $f \in \Sigma_k$ gilt $|f(t_1, \dots, t_k)| = 1 + |t_1| + \dots + |t_k|$

  die Größe eines Terms ist der Nachfolger der Summe der Größen seiner Kinder
- Bsp: $|S(S(Z()))| = 1 + |S(Z())| = 1 + 1 + |Z()| = 1 + 1 + 1$
  $|f(S(S(Z())), Z()| = \dots$
- die Höhe: ist Funktion $\mathsf{height} : \operatorname{Term}(\Sigma) \to$:
  für $t = f(t_1, \dots, t_k)$ gilt
  - wenn $k = 0$, dann $\mathsf{height}(t) = 0$
  - wenn $k > 0$, dann $\mathsf{height}(t) = 1 + \max(\mathsf{height}(t_1), \dots, \mathsf{height}(t_k))$

Induktion über Termaufbau (Beispiel)

- Satz: $\forall t \in \operatorname{Term}(\{a/0, b/2\}) : |t| \equiv 1 \pmod 2$ (die Größe ist ungerade)
- Beweis durch Induktion über den Termaufbau:
  - IA (Induktions-Anfang): $t = a()$
    Beweis für IA: $|t| = |f()| = 1 \equiv 1 \pmod 2$
  - IS (I-Schritt): $t = b(t_1, t_2)$
    zu zeigen ist: IB (I-Behauptung): $|t| \equiv 1 \pmod 2$
    dabei benutzen: IV (I-Voraussetzung) $|t_1| \equiv |t_2| \equiv 1 \pmod 2$
    Beweis für IS: $|t| = |b(t_1, t_2)| = 1 + |t_1| + |t_2| \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod 2$
- Bezeichnung: das heißt IV, und nicht I-Annahme, damit es nicht mit I-Anfang verwechselt wird

Algebraische Datentypen (benannte Notation)

- Beispiel: Deklaration des Typs

```
data Foo = Con {bar :: Int, baz :: String}
    deriving Show
```

- Bezeichnungen:
  - `Foo` ist Typname
  - `Con` ist Konstruktor
  - `bar, baz` sind Komponenten-Namen des Konstruktors
  - `Int, String` sind Komponenten-Typen
- Beispiel: Konstruktion eines Datums dieses Typs

```
Con { bar = 3, baz = "hal" } :: Foo
```

  der Ausdruck (vor dem `::`) hat den Typ `Foo`

Algebraische Datentypen (positionelle Not.)

- Beispiel: Deklaration des Typs

```
data Foo = Con Int String
```

- Bezeichnungen:
  - `Foo` ist Typname
  - `Con` ist zweistelliger Konstruktor
    ...mit anonymen Komponenten
  - `Int`, `String` sind Komponenten-Typen
- Beispiel: Konstruktion eines Datums dieses Typs

```
Con 3 "hal" :: Foo
```

- auch ein Konstruktor mit benannten Komponenten kann positionell aufgerufen werden

Datentyp mit mehreren Konstruktoren

- Beispiel (selbst definiert)

  ```
  data T = A { foo :: Bool }
         | B { bar :: Ordering, baz :: Bool }
      deriving Show
  ```

- Bespiele (in Standardbibliothek (Prelude) vordefiniert)

  ```
  data Bool = False | True
  data Ordering = LT | EQ | GT
  ```

- Konstruktion solcher Daten:

  ```
  False :: Bool
  A { foo = False } :: T ; A False :: T
  B EQ True :: T
  ```

Mehrsortige Signaturen

- (bisher) einsortige Signatur

  ist Abbildung von Funktionssymbol nach Stelligkeit

- (neu) mehrsortige Signatur
  - Menge von Sortensymbolen $S = \{S_1, \ldots\}$
  - msS ist Abb. von Funktionssymbol nach Typ
  - *Typ* ist Element aus $S^* \times S$

    Folge der Argument-Sorten, Resultat-Sorte

Bsp.: $S = \{Z, B\}, \Sigma = \{0 \mapsto ([], Z), p \mapsto ([Z, Z], Z),\ e \mapsto ([Z, Z], B), a \mapsto ([B, B], B)\}$.

- $\mathrm{Term}(\Sigma, B)$ (Terme dieser Signatur mit Sorte B): …

Rekursive Datentypen

- Konstruktoren mit benannten Komponenten

```
data Tree = Leaf {}
    | Branch { left :: Tree , right :: Tree }
```

- mit anonymen Komponenten

```
data Tree = Leaf | Branch Tree Tree
```

- Objekte dieses Typs erzeugen, Bsp:

```
Leaf :: Tree; Branch (Branch Leaf Leaf) Leaf :: Tree
```

- Bezeichnung `data Tree = ... | Node ...` ist falsch (irreführend), denn sowohl äußere Knoten (Leaf) als auch innere Knoten (Branch) *sind* Knoten (Node)
- Ü: die data-Dekl. für $S = \{Z, B\}$, $\Sigma = \{0 \mapsto ([], Z), p \mapsto ([Z, Z], Z), e \mapsto ([Z, Z], B), a \mapsto ([B, B], B)\}$.

Daten mit Baum-Struktur

- mathematisches Modell: Term über Signatur
- programmiersprachliche Bezeichnung: *algebraischer Datentyp* (die Konstruktoren bilden eine Algebra)
- praktische Anwendungen:
  - Formel-Bäume (in Aussagen- und Prädikatenlogik)
  - Suchbäume (in VL Algorithmen und Datenstrukturen, in `java.util.TreeSet<E>`)
  - DOM (Document Object Model) `https://www.w3.org/DOM/DOMTR`
  - JSON (Javascript Object Notation) z.B. für AJAX `https://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-404.htm`

Übung Terme

- Geben Sie die Signatur des Terms $\sqrt{a \cdot a + b \cdot b}$ an.
- Bestimmen Sie $|\sqrt{a \cdot a + b \cdot b}|$, $\mathsf{height}(\sqrt{a \cdot a + b \cdot b})$.

- Geben Sie ein Element $t \in \mathrm{Term}(\{f/1, g/3, c/0\})$ an mit $|t| = 5$ und $\mathsf{height}(t) \le 2$.
- die Menge $\mathrm{Term}(\{f/1, g/3, c/0\})$ wird realisiert durch den Datentyp `data T = F T | G T T T`
  deklarieren Sie den Typ in ghci, erzeugen Sie o.g. Term t (durch Konstruktoraufrufe)
- Holes (Löcher) in Ausdrücken als Hilfsmittel bei der Programmierung durch schrittweises Verfeinern

```
ghci> data T = A Bool | B T deriving Show
ghci> A _

<interactive>:2:3: error:
    • Found hole: _ :: Bool
    • In the first argument of 'A', namely '_'
      In the expression: A _
      In an equation for 'it': it = A _
    • Relevant bindings include ...
      Valid hole fits include ...
        False :: Bool
        True :: Bool
        ...
```

Hausaufgaben

SS 24: Aufgaben 2, 3, 4.

1. autotool-Aufgabe 15-2

   Allgemeine Hinweise zur Bearbeitung von Haskell-Lückentext-Aufgaben in autotool:

   - Schreiben Sie den angezeigten Quelltext (vollständig! ohne zusätzliche Leerzeichen am Zeilenanfang!) in eine Datei mit Endung `.hs`, starten Sie ghci mit diesem Dateinamen als Argument
   - ändern Sie den Quelltext: ersetzen Sie `undefined` durch einen geeigneten Ausdruck, hier z.B.

     ```
     solution = S.fromList [ False, G ]
     ```

     im Editor speichern, in ghci neu laden (`:r`)
   - reparieren Sie Typfehler, werten Sie geeignete Terme aus, hier z.B. `S.size solution`

- werten Sie `test` aus, wenn `test` den Wert True ergibt, dann tragen Sie die Lösung in autotool ein.

2. Geben Sie einen Typ T (eine `data`-Deklaration) an, der alle Terme der einsortigen Signatur $\Sigma = \{E/0, F/2, G/3\}$ enthält.

   Konstruieren Sie Elemente dieses Typs.

   Geben Sie $t \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ an mit

   - $\mathsf{height}(t) = 2$ und $|t|$ möglichst klein
   - $\mathsf{height}(t) = 2$ und $|t|$ möglichst groß

Allgemeine Hinweise zu Arbeit und Präsentation im Pool:

- beachten Sie `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/` (`PATH` und ggf. `LD_LIBRARY_PATH`)
- Freigabe (für Dozenten-Rechner) mit `krfb`, Einmalpaßwort
- Schrift schwarz auf weiß! Vernünftige Schriftgröße (Control-Plus)!! Gleichzeitig sichtbar (d. h.: keine Verdeckungen, Umschaltungen): Aufgabenstellung, Programmtext, Ausgabe/Fehlermeldungen. Wenn der Desktop-Hintergrund sichtbar ist—wurde Platz verschenkt!!!

3. Geben Sie einen Typ (eine `data`-Deklaration) mit genau 71 Elementen an. Sie können weitere Data-Deklarationen benutzen. Minimieren Sie die Gesamt-Anzahl der Konstruktoren.

   Bsp: `data Bool = False | True ; data T = X Bool Bool` dieses `T` hat 4 Elemente, 3 Konstruktoren (`False,True,X`)

4. Beweisen Sie $\forall \Sigma : \forall t \in \mathrm{Term}(\Sigma) : \mathsf{height}(t) \le |t| - 1$.

   durch Induktion über den Term-Aufbau.

   - Induktions-Anfang: $t = f()$ (nullstelliges Symbol f)
   - Induktions-Schritt:
     $t = f(t_1, \dots, t_k)$ (k-stelliges Symbol f, für $k > 0$)
     dabei Induktions-Voraussetzung: die Behauptung gilt für $t_1, \dots, t_k$.
     Induktions-Behauptung: … für t.

   Für welche Terme t gilt Gleichheit? Wo sieht man das im Beweis?

5. wieviele Elemente des Datentyps `data T = L | B T T` haben …

   - die Größe 9
   - die Größe ≤ 9
   - die Höhe $0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots$

   Sie müssen diese Elemente nicht alle einzeln angeben.

   Bestimmen sie ihre Anzahl durch dynamische Programmierung (von Hand).

Aufgaben autotool

1. Ersetzen Sie `undefined`, so daß der Ausdruck `test` den Wert True hat.

```
module Blueprint where
import qualified Data.Set as S
-- aus Prelude importiert:
-- data Bool = False | True
data C = R | G | B deriving (Eq, Ord, Show)
data T = X C Bool | Y Bool | Z deriving (Eq, Ord, Show)
solution :: S.Set T
solution = S.fromList undefined
test :: Bool
test = S.size solution == 9
```

Ansatz einer Lösung:

```
solution = S.fromList [ X R False, Y True ]
```

2. einen Term in einer mehrsortigen Signatur angeben (Programmiersprache: Java)

```
Gesucht ist ein Ausdruck vom Typ int
in der Signatur
    Foo e;
    String g;
    static char a ( Bar x, String y, String z );
    static Bar b ( Foo x );
    static int c ( int x, String y );
    static int d ( char x, Foo y, String z );
    static Foo f ( int x );
    static String h ( Foo x, String y, char z );
```

Lösungsansatz

```
d (a (b (e), ...), ...)
```

4 Programme

Plan

- wir haben: für Baum-artige Daten:
  - mathematisches Modell: Terme über einer Signatur
  - Realisierung als: algebraischer Datentyp (`data`)
- wir wollen: für Programme, die diese Daten verarbeiten:
  - mathematisches Modell: Termersetzung
  - Realisierung als: Pattern matching (`case`)

Bezeichnungen für Teilterme

- *Position*: Folge von natürlichen Zahlen
  (bezeichnet einen Pfad von der Wurzel zu einem Knoten)
  Beispiel: für $t = S(f(S(S(Z())), Z()))$
  ist $[0, 1]$ eine Position in t.
- $\operatorname{Pos}(t) =$ die Menge der Positionen eines Terms t
  Definition: wenn $t = f(t_0, \ldots, t_{k-1})$, d.h., k Kinder
  dann $\operatorname{Pos}(t) = \{[]\} \cup \{[i] \cdot p \mid 0 \le i < k \wedge p \in \operatorname{Pos}(t_i)\}$.

dabei bezeichnen:

- $[]$ die leere Folge,
- $[i]$ die Folge der Länge 1 mit Element i,
- $\cdot$ den Verkettungsoperator für Folgen

Operationen mit (Teil)Termen

- $t[p] =$ der Teilterm von t an Position p
  Beispiel: $S(f(S(S(Z())), Z()))[0, 1] = \ldots$
  Definition (durch Induktion über die Länge von p): …
- $t[p := s]$: wie t, aber mit Term s an Position p
  Beispiel: $S(f(S(S(Z())), Z()))[[0, 1] := S(Z)] = \ldots$
  Definition (durch Induktion über die Länge von p): …

Operationen mit Variablen in Termen

- $\operatorname{Term}(\Sigma, V) =$ Menge der Terme über Signatur Σ mit Variablen aus V
  Beispiel: $\Sigma = \{Z/0, S/1, f/2\}, V = \{y\}$, $f(Z(), y) \in \operatorname{Term}(\Sigma, V)$.
- Substitution σ: partielle Abbildung $V \to \operatorname{Term}(\Sigma)$
  Beispiel: $\sigma_1 = \{(y, S(Z()))\}$
- eine Substitution auf einen Term anwenden: $t\sigma$:
  Intuition: wie t, aber statt v immer $\sigma(v)$
  Beispiel: $f(Z(), y)\sigma_1 = f(Z(), S(Z()))$
  Definition durch Induktion über t

Termersetzungssysteme

- Daten = Terme (ohne Variablen)
- Programm R = Menge von Regeln
  Bsp: $R = \{(f(Z(), y), y),\ (f(S(x), y), S(f(x, y)))\}$
- Regel = Paar (l, r) von Termen mit Variablen
- Relation $\to_R$ ist Menge aller Paare (t, t') mit
  - es existiert $(l, r) \in R$
  - es existiert Position p in t
  - es existiert Substitution $\sigma : (\mathrm{Var}(l) \cup \mathrm{Var}(r)) \to \mathrm{Term}(\Sigma)$
  - so daß $t[p] = l\sigma$ und $t' = t[p := r\sigma]$.

Termersetzungssysteme als Programme

- $\to_R$ beschreibt *einen* Schritt der Rechnung von R,
- transitive und reflexive Hülle $\to_R^*$ beschreibt *Folge* von Schritten.
- *Resultat* einer Rechnung ist Term in R-Normalform (:= ohne $\to_R$-Nachfolger)

dieses Berechnungsmodell ist im allgemeinen

- *nichtdeterministisch* $R_1 = \{C(x, y) \to x, C(x, y) \to y\}$
  (ein Term kann mehrere $\to_R$-Nachfolger haben, ein Term kann mehrere Normalformen erreichen)
- *nicht terminierend* $R_2 = \{p(x, y) \to p(y, x)\}$
  (es gibt eine unendliche Folge von $\to_R$-Schritten, es kann Terme ohne Normalform geben)

Konstruktor-Systeme

Für TRS R über Signatur Σ: Symbol $s \in \Sigma$ heißt

- *definiert*, wenn $\exists (l, r) \in R : l[] = s(\dots)$ (das Symbol in der Wurzel ist s)
- sonst *Konstruktor*.

Das TRS R heißt *Konstruktor-TRS*, falls:

- definierte Symbole kommen links *nur* in den Wurzeln vor

Übung: diese Eigenschaft formal spezifizieren

Beispiele: $R_1 = \{a(b(x)) \to b(a(x))\}$ über $\Sigma_1 = \{a/1, b/1\}$,
$R_2 = \{f(f(x,y),z) \to f(x, f(y,z))$ über $\Sigma_2 = \{f/2\}$:
definierte Symbole? Konstruktoren? Konstruktor-System?

Funktionale Programme sind ähnlich zu Konstruktor-TRS.

Funktionale Programme (Bsp. und Vergleich)

- Termersetzungssystem:
  - Signatur: $\{(S,1),(Z,0),(f,2)\}$, Variablenmenge $\{x', y\}$
  - Ersetzungssystem $\{f(Z,y) \to y, f(S(x'),y) \to S(f(x',y))\}$.
  - ist Konstruktor-System, definierte Symbole: $\{f\}$, Konstruktoren: $\{S, Z\}$,
  - Startterm $f(S(S(Z)), S(Z))$.
- funktionales Programm:

```
data N = Z | S N -- Signatur für Daten
f :: N -> N -> N -- Signatur für Funktion
f Z y = y ; f (S x') y = S (f x' y) -- Gleichungen
f (S (S Z)) (S Z) -- Benutzung der definierten Fkt.
```

Alternative Notation f. Gleichungssystem

- für die Definition einer Funktion f mit diesem Typ `data N = Z | S N ; f :: N -> N -> N`
- (eben gesehen) *mehrere* Gleichungen

```
f Z y = y
f (S x') y = S (f x' y)
```

- äquivalente Notation: *eine* Gleichung,
  in der rechten Seite: Verzweigung (erkennbar an `case`)
  mit zwei Zweigen (erkennbar an `->`)

```
f x y = case x of
    { Z   -> y  ;  S x' -> S (f x' y) }
```

Pattern Matching

```
data N = Z | S N ; data Bool = False | True
positive :: N -> Bool
positive x = case x of { Z -> False ; S x' -> True }
```

- Syntax: case <Diskriminante> of { <Muster> -> <Ausdruck> ; ... }
- <Muster> enthält Konstruktoren und Variablen, entspricht linker Seite einer Term-Ersetzungs-Regel, <Ausdruck> entspricht rechter Seite
- statische Semantik (eines case-Ausdrucks mit Typ T)
  - jedes <Muster> hat gleichen Typ wie <Diskrim.>,
  - jeder <Ausdruck> hat den Typ T
- dynamische Semantik:
  - Def.: t *paßt* zum Muster l: es existiert σ mit $l\sigma = t$
  - für das erste Muster, das zum Wert der Diskriminante paßt, wird $r\sigma$ ausgewertet

Eigenschaften von Case-Ausdrücken

ein case-Ausdruck heißt

- *disjunkt*, wenn die Muster nicht überlappen

  (es gibt keinen Term, der zu mehr als 1 Muster paßt)

- *vollständig*, wenn die Muster den gesamten Datentyp abdecken

  (es gibt keinen Term, der zu keinem Muster paßt)

Bespiele (für data T = A | B T | F T T)

- nicht disjunkt:

  ```
  case t of { F (B x) y -> .. ; F x (B y) -> .. }
  ```

- nicht vollständig case t of { F x y -> .. ; A -> .. }

data und case

typisches Vorgehen beim Verarbeiten algebraischer Daten vom Typ T:

- Für jeden Konstruktor des Datentyps

  ```
  data T = C1 ...
         | C2 ...
  ```

- schreibe einen Zweig in der Fallunterscheidung

```
f x = case x of
   { C1 ... -> ...
   ; C2 ... -> ... }
```

- Argumente der Konstruktoren sind Variablen ⇒ Case-Ausdruck ist disjunkt und vollständig.

Pattern Matching in versch. Sprachen

- Scala: case classes https://docs.scala-lang.org/tutorials/tour/case-classes.html
- Java (ab JDK 21)

```
jshell --enable-preview  # Version 21-ea
interface I {}
record A (int x) implements I {}
I o = new A(4)
switch (o) {
  case A(var y) : System.out.println(y);
  default : }
```

- Nicht verwechseln mit *regular expression matching* zur String-Verarbeitung. Es geht um algebraische (d.h. baum-artige) Daten!

Rechnen mit Wahrheitswerten

- der Datentyp

```
import qualified Prelude
data Bool = False | True
  deriving Prelude.Show
```

- die Negation

```
not :: Bool -> Bool
not x = case x of { False -> _ ; True -> _ }
```

- die Konjunktion (als Operator geschrieben)

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
x && y = case x of { False -> _ ; True -> _ }
```

Syntax für Unterprogramm-Aufrufe

- die Syntax eines Namens bestimmt, ob er als Funktion oder Operator verwendet wird:
  - Name aus Buchstaben (Bsp.: `not`, `plus`)
    steht als Funktion vor den Argumenten
  - Name aus Sonderzeichen (Bsp.: `&&`)
    steht als Operator zw. erstem und zweitem Argument
- zwischen Funktion und Operator umschalten:
  - in runden Klammern: Operator als Funktion
    `(&&)::Bool->Bool->Bool`, `(&&) False True`
  - in Backticks: Funktion als Operator
    `` 3 `plus` 4 ``

Syntax für Fallunterscheidungen

- `not x = case x of { False -> _; True -> _ }`

  Alternative Notation (links), Übersetzung (rechts)

  ```
  not x = case x of              not x = case x of
    False -> _                     {False -> _
    True -> _                      ;True -> _
                                 }
  ```

- Abseitsregel (offside rule): wenn das nächste (nicht leere) Zeichen nach `of` kein { ist, werden eingefügt:
  - { nach `of`
  - `;` nach Zeilenschaltung bei gleicher Einrückung
  - } nach Zeilenschaltung bei höherer Einrückung

Übung Term-Ersetzung

Für die Signatur $\Sigma = \{f/1, g/3, c/0\}$:

- geben Sie ein $t \in \operatorname{Term}(\Sigma))$ an mit $t[1] = c$.
- Beweisen Sie $\forall \Sigma : \forall t \in \operatorname{Term}(\Sigma) : |t| = |\operatorname{Pos}(t)|$.

Für die Signatur $\Sigma = \{Z/0, S/1, f/2\}$:

- für welche Substitution σ gilt $f(x, Z)\sigma = f(S(Z), Z)$?
- für dieses σ: bestimmen Sie $f(x, S(x))\sigma$.

Dabei wurde angewendet:

Abkürzung für Anwendung von 0-stelligen Symbolen: anstatt $Z()$ schreibe Z. (Vorsicht: dann kann man Variablen nicht mehr von 0-stelligen Symbolen unterscheiden. Man muß dann immer die Signatur explizit angeben oder auf andere Weise vereinbaren, wie man Variablen erkennt, z.B. „Buchstaben am Ende das Alphabetes $(\dots, x, y, \dots)$ sind Variablen", das ist aber riskant)

Übung Pattern Matching, Programme

- Für die Deklarationen

  ```
  -- data Bool = False | True    (aus Prelude)
  data T = F T | G T T T | C
  ```

  entscheide/bestimme für jeden der folgenden Ausdrücke:

  - syntaktisch korrekt?
  - statisch korrekt?
  - Resultat (dynamische Semantik)
  - disjunkt? vollständig?

  ```
  1. case False of { True -> C }
  2. case False of { C -> True }
  3. case False of { False -> F F }
  4. case G (F C) C (F C) of { G x y z -> F z }
  5. case F C of { F (F x) -> False }
  6. case F C of { F x -> False ; True -> False }
  7. case True of { False -> C ; True -> F C }
  8. case True of { False -> C ; False -> F C }
  9. case C of { G x y z -> False; F x -> False; C -> True }
  ```

- Listen von Wahrheitswerten:

  ```
  data List = Nil | Cons Bool List deriving Prelude.Show

  and :: List -> Bool
  and l = case l of ...
  ```

  entsprechend `or :: List -> Bool`

- (Wdhlg.) welche Signatur beschreibt binäre Bäume

  (jeder Knoten hat 2 oder 0 Kinder, die Bäume sind; es gibt keine Schlüssel)

- geben Sie die dazu äquivalente `data`-Deklaration an: `data T = ...`

- implementieren Sie dafür die Funktionen

  ```
  size  :: T -> Prelude.Int
  depth :: T -> Prelude.Int
  ```

  benutze `Prelude.+` (das ist Operator), `Prelude.min, Prelude.max`

- für Peano-Zahlen `data N = Z | S N`

  implementieren Sie *plus, mal, min, max*

Hausaufgaben

SS 24: Aufgaben 1, 4, 5

1. Arithmetik auf Peano-Zahlen

   - Für $R = \{f(S(x), y) \to f(x, S(y)), f(Z, y) \to y\}$
     bestimme alle R-Normalformen von $f(S(Z), S(Z))$.
   - für $R_d = R \cup \{d(x) \to f(x, x)\}$
     bestimme alle R_d-Normalformen von $d(d(S(Z)))$.
   - Bestimme die Signatur Σ_d von R_d.
     Bestimme die Menge der Terme aus $\operatorname{Term}(\Sigma_d)$, die R_d-Normalformen sind.
   - Welche Rechenoperationen simulieren die Regeln für f, für d?
   - welche Terme haben große Normalformen?
   - Zusatz: Geben Sie eine Funktion $c :\to$ an, für die gilt: $\forall n \in: \forall t, t' \in \operatorname{Term}(\Sigma_d) :$
     $|t| \le n \wedge t \to_{R_d}^* t' \Rightarrow |t'| \le c(n)$.

2. Simulation von Wort-Ersetzung durch Term-Ersetzung.

   Abkürzung für mehrfache Anwendung eines einstelligen Symbols: $A(A(A(A(x)))) = A^4(x)$

   - für $\{A(B(x)) \to B(A(x))\}$
     über Signatur $\{A/1, B/1, E/0\}$:
     bestimme Normalform von $A^k(B^k(E))$
     für $k = 1, 2, 3$, allgemein.
   - für $\{A(B(x)) \to B(B(A(x)))\}$
     über Signatur $\{A/1, B/1, E/0\}$:
     bestimme Normalform von $A^k(B(E))$
     für $k = 1, 2, 3$, allgemein.

3. für die Signatur $\{A/2, D/0\}$:

   - definiere Terme $t_0 = D, t_{i+1} = A(t_i, D)$.
     Zeichne t_3. Bestimme $|t_i|, \operatorname{depth}(t_i)$.
   - für $S = \{A(A(D, x), y) \to A(x, A(x, y))\}$
     bestimme S-Normalform(en), soweit existieren, der Terme $t_0, t_1, \ldots, t_4$.
     Geben Sie für t_2 die ersten Ersetzungs-Schritte explizit an.
   - Normalform von t_i allgemein.

4. Für die Deklarationen

```
-- data Bool = False | True    (aus Prelude)
data S = A Bool | B | C S S
```

   entscheide/bestimme für jeden der folgenden Ausdrücke:

   - syntaktisch korrekt?
   - Resultat-Typ (statische Semantik)
   - Resultat-Wert (dynamische Semantik)
   - Menge der Muster ist: disjunkt? vollständig?

```
1. case False of { True -> B }
2. case False of { B -> True }
```

```
3. case C B B of { A x -> x }
4. case A True of { A x -> False }

5. case A True of { A x -> False ; True -> False }
6. case True of { False -> A ; True -> A False }
7. case True of { False -> B ; False -> A False }
8. case B of { C x y -> False; A x -> x; B -> True }
```

weitere Beispiele selbst herstellen und dann in der Übung die anderen Teilnehmer fragen.

5. für selbst definierte Wahrheitswerte: deklarieren, implementieren und testen Sie:

   - die zweistellige Antivalenz,
   - die Implikation,
   - die dreistellige Majoritätsfunktion.

   ```
   import qualified Prelude
   data Bool = False | True deriving Prelude.Show
   not :: ...
   xor :: ...
   ...
   ```

   Definieren Sie die Majorität auf verschiedene Weisen

   - mit *einer* Gleichung (evtl. mit `case`, evtl. geschachtelt)
   - *ohne* `case` (evtl. mehrere Gleichungen)
   - mit einer Gleichung ohne Fallunterscheidung, mittels anderer (selbst definierter) Funktionen

6. für binäre Bäume ohne Schlüssel

   ```
   data Tree = Leaf | Branch Tree Tree
   ```

   deklarieren, implementieren und testen Sie ein einstelliges Prädikat über solchen Bäumen, das genau dann wahr ist, wenn das Argument eine ungerade Anzahl von Blättern enthält.

   Diese Anzahl *nicht* ausrechnen, sondern direkt den Wahrheitswert!

Aufgaben autotool

1. gesucht ist für das System

```
 TRS { variables = [ x, y, z ]
    , rules =
      [ f ( f ( x, y ), z ) -> f ( x, f ( y, z ) )
      , f ( x, f ( y, z ) ) -> f ( f ( x, y ), z )
      ]   }
```

   eine Folge von Schritten

```
von     f ( a, f ( f ( b, f ( c, d ) ), e ) )
nach    f ( f ( a, f ( b, c ) ), f ( d, e ) )
```

   Lösungs-Ansatz:

```
( f ( a, f ( f ( b, f ( c, d ) ), e ) )
, [ Step  { rule_number = 1  , position = [ ]
     , substitution = listToFM
        [ (x, a), (z, e), (y, f (b, f (c, d))) ]
     }                  ] )
```

5 Beweise

Motivation

- Programmierer (Software-Ingenieur) muß beweisen, daß Programm (Softwareprodukt) die Spezifikation erfüllt

  vgl. (Maschinen)Bau-Ingenieur: Brücke, Flugzeug

- vgl. Dijkstra (EWD 1305) zum Verhältnis von *Programmieren* (Wagen) und *Beweisen* (Pferd)

- für funktionale Programmierung: direkte Entsprechung zw. Konstruktion/Ausführung von Programm und Beweis:

  – Auswertungs-Schritte: Gleichungskette
  – Verzweigung (case): Fallunterscheidung
  – strukturelle Rekursion: vollständige Induktion

Formale Beweise

- verschiedene Formen des Beweises:
  - Beweis durch *hand waving*, durch Autorität
  - formaler Beweis (handschriftlich, LaTeX)
  - formaler Beweis *mit maschineller Prüfung*
- statische Programm-Eigenschaften:
  - als Typ-Aussagen formuliert (Bsp: `f x :: Bool`)
  - und durch Compiler bewiesen
- für Eigenschaften, die sich (in Haskell) nicht als Typ formulieren lassen (Bsp: `f x == True`), Benutzung anderer Notation und Werkzeuge.
  wir verwenden CYP (Noschinski et al.)
- ausdrucksstärkere Programmiersprachen ist z.B. Agda

CYP: Gleichungsketten

- ```
  data Bool = False | True

  not :: Bool -> Bool
  not False = True
  not True  = False

  Lemma nnf: not (not False) .=. False
  Proof by rewriting   not (not False)
    (by def not) .=. not True
    (by def not) .=. False
  QED
  ```
- vgl. Definition/Autotool-Aufgabe Term-Ersetzung

CYP: Fallunterscheidung

- ```
  Lemma nnx: forall x::Bool : not (not x) .=. x
  Proof by case analysis on x :: Bool
    Case False
  ```

```
      Assume XF :  x .=. False
      Then Proof by rewriting  not (not x)
        (by XF) .=. not (not False)
        ...
      QED
    ...
  QED
```

- vollständige Menge der Muster in der Fallunterscheidung
- Notation `...` für Lücken auch in Autotool-Aufgaben

Peano-Zahlen

- Axiome von G. Peano: $0 \in, \forall x : x \in \Rightarrow (1 + x) \in$
- realisiert als algebraischer Datentyp

  ```
  data N = Z     -- Null, Zero
         | S N   -- Nachfolger, Successor
  ```

  Zahl $n \in$ dargestellt als $S^n(Z)$, Bsp: $2 = S(S(Z))$
- Ableitung der Implementierung der Addition

  ```
  plus :: N -> N -> N
  plus x y = case x of Z -> y ; S x' -> ...
  ```

  benutze Assoziativität $x + y = (1 + x') + y = \ldots$

Spezifikation und Test

Bsp: Addition von Peano-Zahlen

- Spezifikation:
  - Typ: `plus :: N -> N -> N`
  - Axiome (Bsp): `plus` ist kommutativ
- Test der Korrektheit durch

- Aufzählen einzelner Testfälle
  `plus(S (S Z))(S Z) == plus(S Z)(S (S Z))`
- Notieren von Eigenschaften (*properties*)

  ```
  plus_comm :: N -> N -> Bool
  plus_comm x y = plus x y == plus y x
  ```

  und automatische typgesteuerte Testdatenerzeugung
  `Test.LeanCheck.checkFor 10000 plus_comm`

Spezifikation und Verifikation

Beweis für: Addition von Peano-Zahlen ist assoziativ

- zu zeigen ist `plus a (plus b c) == plus (plus a b) c`
- Beweismethode: Induktion (nach `a`)
  und Umformen mit Gleichungen (äquiv. zu Implement.)

  ```
  plus  Z     y = y
  plus (S x') y = S (plus x' y)
  ```

- Anfang: `plus Z (plus b c) == ..`
- Schritt: `plus (S a') (plus b c) ==`

  `== S (plus a' (plus b c)) == ..`

Bezeichnungen in Beweisen durch Induktion

- Es ist $\forall t \in \text{Term}(\Sigma) : P(t)$ zu zeigen
  P gilt für alle Terme der Signatur Σ.
- Beweis durch strukturelle Induktion
  - (IA) Induktions-Anfang:
    wir zeigen $P(t)$ für alle Terme $t = f()$, d.h., Blätter
  - (IS) Induktions-Schritt
    wir zeigen $P(t)$ für alle Terme $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ mit $n \geq 1$,
    d.h., innere Knoten

    - (IV) Induktions-Voraussetzung:
      $P(t_1) \wedge \cdots \wedge P(t_n)$, d.h., P gilt für alle Kinder von t
    - (IB) Induktions-Behauptung: $P(t)$
      gezeigt wird die Implikation IV $\Rightarrow$ IB.

CYP: Induktion

- ```
  Lemma plus_assoc : forall a :: N, b :: N, c :: N :
    plus a (plus b c) .=. plus (plus a b) c
  Proof by induction on a :: N
  Case Z
    Show : plus Z (plus b c) .=. plus (plus Z b) c
    Proof ... QED
  Case S a'
    Fix a' :: N
    Assume IV :
      plus a' (plus b c).=. plus (plus a' b) c
    Then Show :
      plus(S a')(plus b c) .=. plus (plus (S a') b) c
    Proof ... QED
  QED
  ```
- ausführliche Notation erforderlich — das ist Absicht

Bsp. Programm-Konstruktion/Induktion

- gegeben: Peano-Zahlen und Binärzahlen:

  ```
  data B = Zero | Even B | Odd B
  value :: B -> N
  value Zero = Z
  value (Even x) = doubleN (value x)
  value (Odd x) = S (doubleN (value x))
  ```

- gesucht: Nachfolgerfunktion für Binärzahlen

  ```
  succB :: B -> B  -- Implementierung ist zu ergänzen
  Lemma :
    forall b :: B : value (succB b) .=. S (value b)
  ```

- Renz, Schwarz, Waldmann: *Check your Students' Proofs—with Holes*, WFLP 2020, `https://arxiv.org/abs/2009.01326`
  ```

Induktion mit Generalisierung

- Bsp: im Induktionsschritt für Beweis von

  ```
  forall x::N, y::N : plus' x y .=. plus x y
  ```

  lautet die Ind.-Voraus. `plus' x' y .=. plus x' y`
- Beweis der Ind.-Behauptung benötigt Umformung von `plus' x' (S y)`. Das erfordert

  ```
  Proof by induction on x:: N generalizing y::N
  ```

- ohne `generalizing`: $\forall y : (\forall x : P(x, y))$,
  d.h., für jedes außen fixierte y eine Induktion nach x
  (I.V. muß mit genau diesem y benutzt werden)
- mit `generalizing y`: $\forall x : (\forall y : P(x, y))$,
  d.h., für jedes x wird die Behauptung für alle y gezeigt.
  (I.V. kann mit beliebiger Belegung von y benutzt werden)

Induktion über Bäume (IA)

- gegeben sind:

  ```
  data Tree = Leaf | Branch Tree Tree
  leaves :: Tree -> N
  leaves Leaf = S Z
  leaves (Branch l r) = plus (leaves l) (leaves r)
  ```

- gesucht ist: `g :: Tree -> Bool` mit

  ```
  Lemma : even (leaves t) .=. g t
  Proof by induction on t :: Tree
  Case Leaf
    Show : even (leaves Leaf) .=. g Leaf
    Proof by rewriting ...  QED
  ...
  QED
  ```

Induktion über Bäume (IS)

- ```
  Case Branch l r
    Fix l :: Tree, r :: Tree
    Assume
      IH1: g l .=. even (leaves l)
      IH2: g r .=. even (leaves r)
    Then Show :
      g (Branch l r) .=. even (leaves (Branch l r))
    Proof by rewriting
    ...
    QED
  ```
- zwei Teile der Induktionsvoraussetzung (IH1, IH2)

Multiplikation von Peano-Zahlen

- ```
  times :: N -> N -> N
  times x y = case x of
    Z -> _  ; S x' -> _
  ```
  vervollständigen durch Umformen der Spezifikation,

  Bsp. $(1 + x') \cdot y = y + x' \cdot y$
- Eigenschaften formulieren, testen (leancheck),

  beweisen (auf Papier, mit CYP)
  - Multiplikation mit 0, mit 1,
  - Distributivität (mit Plus), Assoziativität, Kommutativität
- ähnliche für Potenzierung

Minimum

- vollständige Spezifikation:

  ```
  forall x :: N, y :: N : min (plus x y) y = y
  forall x :: N, y :: N : min x (plus x y) = x
  ```

  vollständig bedeutet: es gibt nur eine Funktion, die die Spezifikation erfüllt

- Definition durch vollständige Fallunterscheidung

```
min Z Z = _ ; min Z (S y) = _ ; min (S x) Z = _
min (S x) (S y) = S (min x y)
```

- Ü: Beweis, daß diese Imp. die Spez. erfüllt
- Ü: desgleichen für Maximum

Subtraktion

- `minus :: N -> N -> N`

  modifizierte Subtraktion, Bsp: $5 \ominus 3 = 2, 3 \ominus 5 = 0$

- Spezifikation: eigentlich $a \ominus b = \max(a - b, 0)$,

  vollst. Spez. ohne Verwendung von Hilfsfunktionen:

  - $\forall a, b \in: (a + b) \ominus b = a$
  - $\forall a, b \in: a \ominus (a + b) = 0$

- Implementierung (Muster disjunkt? vollständig?)

```
minus Z b = _ ; minus a Z = _
minus (S a') (S b') = _
```

Hausaufgaben

SS 24: Aufgaben 2, 4 von hier sowie Aufgabe 4 aus Abschnitt *Daten* ($\forall \Sigma : \forall t \in \mathrm{Term}(\Sigma) : \mathsf{height}(t) \le |t| - 1$))

1. Für die Funktion

```
f :: N -> N
f Z = Z ; f (S x) = S (S (f x))
```

   beweisen Sie (erst auf Papier, dann mit CYP)

```
f (plus x y) = plus (f x) (f y)
```

durch Induktion nach `x`.

Papier: Verwenden Sie die angegebenen Bezeichnungen für die Beweis-Schritte, geben Sie IA, IV, IB explizit an.

2. Die übliche Peano-Addition ist

   ```
   plus Z y = y ; plus (S x) y = S (plus x y)
   ```

   Eine andere Implementierung der Addition (vgl. früher angegebenes Termersetzungssystem) ist

   ```
   plus' Z y = y ; plus' (S x) y = plus' x (S y)
   ```

   Beweisen Sie mit Cyp

   ```
   forall x :: N, y :: N : plus' x y .=. plus x y
   ```

   Beweisen Sie dazu als Hilfssatz

   ```
   forall x :: N, y :: N : plus x (S y) .=. plus (S x) y
   ```

   In dieser Induktion nach x müssen Sie das andere Argument y generalisieren, da es zwischen Induktionsvoraussetzung und Induktionsbehauptung unterschiedlich ist.

3. Implementieren Sie Peano-Multiplikation und -Potenz.

   Formulieren, testen (leancheck) und beweisen (Papier, CYP) Sie einige Eigenschaften.

   CYP: formulieren Sie ggf. Hilfssätze als Axiome, d.h., ohne Beweis—aber mit Tests.

4. Für zweistelliges min (siehe Folie) und max auf :

   (a) Geben Sie eine äquivalente vollständige Spezifikation an, die keine Fallunterscheidung benutzt, sondern nur Addition.

   (b) Implementieren Sie min und max nur durch Addition und Subtraktion ($\ominus$).

   (c) testen (optional: und beweisen) Sie, daß Ihre Implementierung die Spezifikation erfüllt

   (d) Implementieren Sie nur mit min und max:

- den Median von drei Argumenten
- (optional) den Median von fünf Argumenten

Geben Sie Tests an (optional: Beweis)

5. für das TRS $R = \{A(A(D,x),y) \to A(x,A(x,y))\}$ über der Signatur $\Sigma = \{D/0, A/2\}$, vgl. frühere Aufgabe,

   (a) die Menge (Folge) aller R-Normalformen ist $N_0 = D, N_1 = A(D, N_0), \ldots, N_{k+1} = A(D, N_k), \ldots$.
   warum gibt es keine anderen R-Normalformen?

   (b) Die R-Normalform von $A(N_l, N_r)$ ist N_k mit $k = 2^l + r$.

      i. Geben Sie Beispiele an (auf Papier oder maschinell)
      ii. beweisen Sie durch vollständige Induktion nach l.
      (Auf Papier, aber mit korrekten Bezeichnungen.)
      iii. welches sind die Terme (z.B.: der Größe 11) mit größter Normalform?

Aufgabe Autotool (Beispiel)

```
a :: T -> T
b :: T -> T
axiom E : forall x :: T : a(b(a(x))) .=. x
Lemma :
  forall x :: T : a(b(b(b(a(a(x)))))) .=. b(b(a(x)))
Proof by rewriting         a(b(b(b(a(a(x))))))
    (by E) .=. _
    (by E) .=. _
    ...
           .=. b(b(a(x)))
QED
```

Das ist ein Modell für schnittstellen-orientierte Programmierung. Der abstrakte Datentyp T besteht aus Signatur ($\{a/1, b/1\}$) und Axiom E, es ist nichts bekannt über tatsächliche Implementierung.

6 Polymorphie

Definition, Motivation

- Beispiel: binäre Bäume mit Schlüssel vom Typ `e`

```
data Tree e = Leaf
            | Branch (Tree e) e (Tree e)
Branch Leaf  True Leaf :: Tree Bool
Branch Leaf (S Z) Leaf :: Tree N
```

- Definition:
  ein polymorpher Datentyp ist ein *Typkonstruktor* (= eine Funktion, die Typen auf einen Typ abbildet)
- unterscheide: `Tree` ist der Typkonstruktor, `Branch` ist ein Datenkonstruktor

Beispiele f. Typkonstruktoren (I)

- Kreuzprodukt: `data Pair a b = Pair a b`
- disjunkte Vereinigung:
  `data Either a b = Left a | Right b`
  `data Maybe a = Nothing | Just a`
- Haskell-Notation für Produkte: `(Z,True)::(N,Bool)`
  - das Komma `(,)` = Name des Typ-Konstruktors = Name des Daten-Konstruktors
  - ist gefährlich (wg. Verwechslung), aber nützlich und empfohlen, *falls* der Typ genau einen Konstruktor hat
  - Komma-Notation für Produkte mit $0, 2, 3, \ldots$ Kompon.
  - 0 Komponenten = die Einermenge: `data () = ()`
    (englische Bezeichnung: the *unit* type)

Beispiele f. Typkonstruktoren (II)

- binäre Bäume (Schlüssel in der Verzweigungsknoten)

```
data Bin a = Leaf
           | Branch (Bin a) a (Bin a)
```

- einfach (vorwärts) verkettete Listen

```
data List a = Nil
            | Cons a (List a)
```

- Bäume mit Knoten beliebiger Stelligkeit, Schlüssel in jedem Knoten

```
data Tree a = Node a (List (Tree a))
```

Anwendung von Maybe

- `data Maybe a = Nothing | Just a`
  `Nothing` drückt das Fehlen eines Wertes aus, `Just x` sein Vorhandensein
- `head :: List a -> Maybe a`
  `head Nil = Nothing; head (Cons x xs) = Just x`
- andere Ausdrucksmöglichkeiten (in anderen Sprachen)
  - falscher Typ und Ausnahme (Exception)

    `head :: List a -> a; head Nil = error "huh"; ...`
  - `Maybe T` als Zeiger-auf-T, oder auf nichts
    der *billion dollar mistake*, Algol W, Tony Hoare 1965,
  - `Optional<T>`, “may or may not contain a value” `https://docs.oracle.com/en/java/javase/21/docs/api/java.base/java/util/Optional.html`

Polymorphe Funktionen

- Beispiele:
  - Spiegelbild einer Liste:

    `reverse :: forall e . List e -> List e`
  - Verkettung von Listen mit gleichem Elementtyp:

    ```
    append :: forall e .     List e -> List e
                          -> List e
    ```

    Knotenreihenfolge eines Binärbaumes:

    `preorder :: forall e . Bin e -> List e`

- Def: der Typ einer polymorphen Funktion beginnt mit All-Quantoren für Typvariablen.
- Bsp: Datenkonstruktoren polymorpher Typen.

Bezeichnungen f. Polymorphie

```
data List e = Nil | Cons e (List e)
```

- `List` ist ein *Typkonstruktor*
- `List e` ist ein *polymorpher* Typ

  (ein Typ-Ausdruck mit *Typ-Variablen*)
- `List Bool` ist ein *monomorpher* Typ

  (entsteht durch *Instantiierung*: Substitution der Typ-Variablen durch Typen)
- polymorphe Funktion: `reverse:: forall e . List e -> List e`

  monomorphe Funktion: `xor:: List Bool -> Bool`

  polymorphe Konstante: `Nil::forall e. List e`

Operationen auf Listen (I)

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

- ```
  append xs ys = case xs of
       Nil        -> _
       Cons x xs' -> _
  ```
- Ü: formuliere, teste und beweise: `append` ist assoziativ.
- ```
  reverse xs = case xs of
       Nil        -> _
       Cons x xs' -> _
  ```
- Ü: beweise:

  ```
  forall xs ys : reverse (append xs ys)
    == append (reverse ys) (reverse xs)
  ```

Von der Spezifikation zur Implementierung

- Bsp: homogene Listen `data List a = Nil | Cons a (List a)`

  Aufgabe: implementiere `maximum :: List N -> N`

  Spezifikation:

  ```
  maximum (Cons x1 Nil) = x1
  maximum (append xs ys) = max (maximum xs) (maximum ys)
  ```

-
  - substitutiere `xs = Nil`, erhalte

    ```
      maximum (append Nil ys) = maximum ys
    = max (maximum Nil) (maximum ys)
    ```

    d.h. `maximum Nil` sollte das neutrale Element für `max` (auf natürlichen Zahlen) sein, also `0` (geschrieben `Z`).
  - substitutiere `xs = Cons x1 Nil`, erhalte

    ```
      maximum (append (Cons x1 Nil) ys)
      = maximum (Cons x1 ys)
    = max (maximum (Cons x1 Nil)) (maximum ys)
      = max x1 (maximum ys)
    ```

  Damit kann der aus dem Typ abgeleitete Quelltext

  ```
  maximum :: List N -> N
  maximum xs = case xs of
    Nil        -> _
    Cons x xs' -> _
  ```

  ergänzt werden.

  Vorsicht: für `min, minimum` funktioniert das nicht so, denn `min` hat für `N` kein neutrales Element.

Operationen auf Listen (II)

- Die vorige Implementierung von `reverse` ist (für einfach verkettete Listen) nicht effizient (sondern quadratisch, vgl.

  `https://accidentallyquadratic.tumblr.com/`)

- Besser ist Verwendung einer Hilfsfunktion

  ```
  reverse xs = rev_app xs Nil
  ```

  mit Spezifikation

  ```
  rev_app xs ys = append (reverse xs) ys
  ```

- noch besser ist es, *keine* Listen zu verwenden `https://arxiv.org/abs/1808.08329` (WFLP 2018)

Operationen auf Bäumen

```
data List e = Nil | Cons e (List e)
data Bin e = Leaf | Branch (Bin e) e (Bin e)
```

Knotenreihenfolgen

- ```
  preorder :: forall e . Bin e -> List e
  preorder t = case t of ...
  ```
- entsprechend `inorder`, `postorder`
- und Rekonstruktionsaufgaben

Adressierug von Knoten (`False` = links, `True` = rechts)

- `get :: Bin e -> List Bool -> Maybe e`
- `positions :: Bin e -> List (List Bool)`

Statische Typisierung und Polymorphie

- Def: dynamische Typisierung:
  - die Daten (zur Laufzeit des Programms, im Hauptspeicher) haben einen Typ
- Def: statische Typisierung:
  - Bezeichner, Ausdrücke (im Quelltext) haben einen Typ,
    dieser wird zur Übersetzungszeit (d.h., ohne Programmausführung) bestimmt, so daß:
  ```

  - für *jede* Ausführung des Programms gilt:

    der statische Typ eines Ausdrucks ist gleich dem dynamischen Typ seines Wertes

- der dynamische Typ muß deswegen zur Laufzeit nicht repräsentiert werden (das spart Platz und Zeit)

Bsp. für Programm ohne statischen Typ

- Javascript

  ```
  function f (x) {
    if (x > 0) {
      return function () { return 42; }
    } else { return "foobar"; } } }
  ```

  Dann: Auswertung von `f(1)()` ergibt 42,

  Auswertung von `f(0)()` ergibt Laufzeit-Typfehler.

- im entsprechenden Haskell-Programm ist bereits die Definition von f statisch falsch

  ```
  f x = case x > 0 of
    True  -> \ () -> 42
    False -> "foobar"
  ```

Nutzen der stat. Typisierung und Polymorphie

- Nutzen der statischen Typisierung:

  - beim Programmieren: Entwurfsfehler werden zu Typfehlern, diese werden zur Entwurfszeit automatisch erkannt $\Rightarrow$ früher erkannte Fehler lassen sich leichter beheben
  - beim Ausführen: keine Lauzeit-Typfehler $\Rightarrow$ keine Typprüfung zur Laufzeit nötig, effiziente Ausführung

- Nutzen der Polymorphie:

  - Flexibilität, nachnutzbarer Code, z.B. Anwender einer Collection-Bibliothek legt Element-Typ fest (Entwickler der Bibliothek kennt den Element-Typ nicht)
  - gleichzeitig bleibt statische Typsicherheit erhalten

Konstruktion von Objekten eines Typs

Aufgabe (Bsp): `x :: Either (Maybe ()) (Pair Bool ())`
Lösung (Bsp):

- der Typ `Either a b` hat Konstruktoren `Left a | Right b`.
  Die Substitution für die Typvariablen ist `a = Maybe (), b = Pair Bool ()`.
  Wähle Konstruktor `Right b`.
  `x = Right y` mit `y :: Pair Bool ()`
- der Typ `Pair a b` hat Konstruktor `Pair a b`.
  die Substitution für diese Typvariablen ist `a = Bool, b = ()`.
  `y = Pair p q` mit `p :: Bool, q :: ()`
- der Typ `Bool` hat Konstruktoren `False | True`, wähle `p = False`. der Typ `()` hat Konstruktor `()`, also `q=()`

Insgesamt `x = Right y = Right (Pair False ())`

Vorgehen (allgemein)

- bestimme den Typkonstruktor
- bestimme die Substitution für die Typvariablen
- wähle einen Datenkonstruktor
- bestimme Anzahl und Typ seiner Argumente
- wähle Werte für diese Argumente nach diesem Vorgehen.

Bestimmung des Typs eines Bezeichners

Aufgabe (Bsp.) bestimme Typ von `x` (erstes Arg. von `get`):

```
at :: List N -> Tree a -> Maybe a
at p t = case t of
  Node f ts -> case p of
    Nil -> Just f
    Cons x p' -> case get x ts of
      Nothing -> Nothing
      Just t' -> at p' t'
```

Lösung:

- bestimme das Muster, durch welches `x` deklariert wird.
  Lösung: `Cons x p' ->`
- bestimme den Typ diese Musters
  Lösung: ist gleich dem Typ der zugehörigen *Diskriminante* `p`
- bestimme das Muster, durch das `p` deklariert wird
  Lösung: `at p t =`
- bestimme den Typ von `p`
  Lösung: durch Vergleich mit Typdeklaration von `at` (`p` ist das erste Argument) `p :: List N`, also `Cons x p' :: List N`, also `x :: N`.

Vorgehen zur Typbestimmung eines Namens:

- finde die Deklaration (Muster einer Fallunterscheidung oder einer Funktionsdefinition)
- bestimme den Typ des Musters (Fallunterscheidung: Typ der Diskriminante, Funktion: deklarierter Typ)

Übung Polymorphie

- Geben Sie alle Elemente dieser Datentypen an:
  - `Maybe ()`
  - `Maybe (Bool, Maybe ())`
  - `Either ((),Bool) (Maybe (Maybe Bool))`
- Operationen auf Listen:
  - append, reverse, rev_app
- Operationen auf Bäumen:
  - preorder, inorder
  - get, (positions)

Hausaufgaben

SS 24: für KW 19: 1, 2, 5; für KW 20 (Zusatz) 3, 6, 7.

1. für die folgenden Datentypen: geben Sie einige Elemente an (ghci), geben Sie die Anzahl aller Elemente an.

   (a) `Maybe (Maybe Bool)`

   (b) `Either (Bool, ()) (Maybe ())`

   (c) `Foo (Maybe (Foo Bool))` mit `data Foo a = C a | D`

   stellen Sie (dann in der Übung) ähnliche Aufgaben

   geben Sie ein möglichst kleines Programm an, das nur aus data-Deklarationen besteht, und das einen Typ mit 100 (Zusatz: 1000) Elementen definiert.

   Diskussion: vergleiche frühere Aufgabe. Ein solcher Typ ist

   ```
   Maybe (Maybe (Maybe .... (Maybe ()) .. ))
   ```

   mit insgesamt nur drei Konstruktoren (Nothing, Just, `()`).

   Also sollte man zur gerechten Messung der Programmgröße die Anzahl der Konstruktoren und die Größe der Typ-Ausdrücke addieren.

2. Implementieren Sie die Post-Order Durchquerung von Binärbäumen.

   (Zusatz: Level-Order. Das ist schwieriger.)

   Verwenden Sie nur die in der VL definierten Typen (`data List a = ...`, nicht `Prelude.[]`)

   und Programmbausteine (`case _ of`)

   Geben Sie einen Algorithmus zur Lösung der Rekonstruktions-Aufgabe (preorder, postorder) an.

3. Beweisen Sie (auf Papier, Zusatz: mit Cyp)

   ```
   forall xs . reverse (reverse xs) == xs
   ```

   Verwenden Sie ggf.

   ```
   rev (app xs ys) = app (rev ys) (rev xs)
   ```

oder andere Hilfssätze ohne Beweis (aber mit Beispielen und Tests)

4. (zu voriger Woche, Typ ist nicht polymorph)

   Definitionen ergänzen; Eigenschaften testen (Einzelfälle, Leancheck), beweisen (Papier oder Cyp)

   ```
   data Tree = Leaf | Branch Tree Tree
   size :: Tree -> N
   leaves :: Tree -> N
   branches :: Tree -> N
   odd :: N -> Bool
   Lemma :
     size t .=. plus (leaves t) (branches t)
   Lemma : odd (size t)
   ```

   Folien *Induktion über Bäume* benutzen.

5. zum Typ `Optional<T>` aus JDK (im Vergleich zu `Maybe t` aus Haskell)

   - mit `jshell` (23-ea) im Pool vorführen:

     mit `of` ein Objekt konstruieren, darauf `isPresent` anwenden
   - geben Sie den Typ von `isPresent` in Haskell an, Hinweis: `:: Maybe t -> _`, benutzen Sie `https://hoogle.haskell.org/` zur Suche nach Funktionen mit diesem Typ (geben Sie den Typ der Funktion ein, nicht den (vermuteten) Namen)

     Rufen Sie solche Funktionen auf (ggf. das passende Modul importieren. Keine neuen Bibliotheken installieren, `base` genügt)
   - geben Sie den Haskell-Typ von `orElse` (aus JDK) an. Implementieren Sie diese Funktion in Haskell.

6. für diese Deklarationen (die Konstruktor-Namen sind abgekürzt, P(air), L(eaf), B(ranch), damit man in Beispielen nicht so viel tippen muß)

   ```
   data Pair a b = P a b
   data Tree k = L k | B (Tree (Pair k k))
   ```

   ergänzen Sie den Ausdruck `B (B (L _)) :: Tree Bool`

Welche Form haben die Elemente von `Tree k` allgemein? Geben Sie weitere Beispiel an.

Bemerkung: Dieser Typkonstruktor `Tree` heißt *nicht regulär*, denn er ist rekursiv und bei Rekursion wird das Typ-Argument geändert. Zum Vergleich: `data List t = Nil | Con` ist regulär, denn das Argument von `List` bleibt `t`.

7. Darstellung von Zahlen als binäre Bäume:

```
import Numeric.Natural
data T = Z | F T T
value :: T -> Natural
value Z = 0
value (F x y) = 2 ^ value x + value y
-- Beispiel:
value (F (F (F Z Z) (F Z Z)) (F Z Z)) = 9
```

- geben Sie Terme mit Werten $0, 1, 2, 3, 4, 14, 144$ an (falls möglich, jeweils mehrere)
- begründen Sie, daß jede natürliche Zahl durch `T` darstellbar ist
- ein Baum `t :: T` heißt *vernünftig*, wenn `t == Z` oder `t = F x y` und `2 ^ value x > value y` und `x` und `y` beide vernünftig sind.

  begründen Sie, daß jede natürliche Zahl genau eine vernünftige Darstellung besitzt.
- Implementieren Sie für vernünftige Bäume:

  Vergleiche (`eq :: T -> T -> Bool`, `gt :: T -> T -> Bool`), Nachfolger (`s :: T -> T`), Addition (`p :: T -> T -> T`)

  Hinweis: mit `gen :: Natural -> T` (als Umkehrfunktion von `value`) geht das so: `p x y = gen (value x + value y)`. Gesucht sind Lösungen *ohne* Umweg über `Natural`.

  Ansatz: Klar ist `s Z = F Z Z`. Wann ist `s (F x y) = F x (s y)` falsch? Wie kann man das 1. feststellen, 2. reparieren?

7 Lambda-Kalkül: Syntax und dynamische Semantik (Auswertung)

Funktionen als Daten

- bisher: Fkt. definiert d. Gleichg. `dbl x = plus x x`
- jetzt: durch Lambda-Term `dbl = \ x -> plus x x`
  λ-Terme: mit lokalen Namen (hier: x)
- Funktionsanwendung: $(\lambda x.B)A \to B[x := A]$
  freie Vorkommen von x in B werden durch A ersetzt
- Funktionen sind Daten (Bsp: `Cons dbl Nil`)
- λ-Kalkül: Alonzo Church 1936, Henk Barendregt: *The Impact of the Lambda Calculus in Logic and Computer Science*, Bull. Symbolic Logic, 1997. `https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.25.9348`

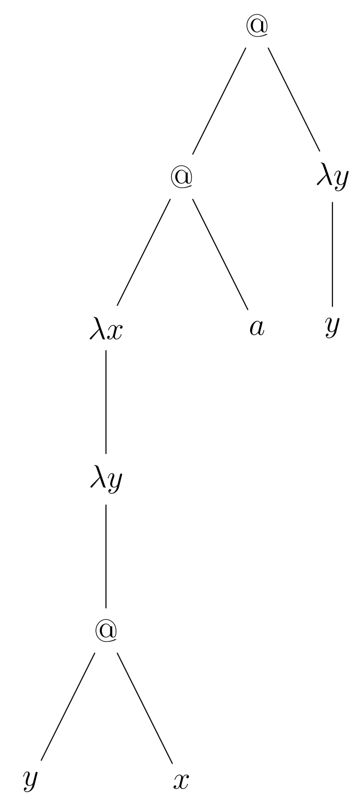
Der Lambda-Kalkül

- ist ein Berechnungsmodell, vgl.: Termersetzungssystem, Turingmaschine, Goto-Programme, While-Programme
- *Syntax*: die Menge der Lambda-Terme Λ:
  - jede Variable ist ein Term: $v \in V \Rightarrow v \in \Lambda$
  - Funktionsanwendung (Applikation):

    $F \in \Lambda, A \in \Lambda \Rightarrow @(F, A) \in \Lambda$

    abstrakte Syntax: 2-stell. Operator @,
    konkrete Syntax: Leerzeichen (!)
  - Funktionsdefinition (Abstraktion):

    $v \in V, B \in \Lambda \Rightarrow (\lambda v.B) \in \Lambda$



- *Semantik*: Relation $\to_\beta$ auf Λ
  (vgl. $\to_R$ für Termersetzungssystem R)

Freie und gebundene Variablen(vorkommen)

- Das Vorkommen von $v \in V$ an Position p in Term t heißt *frei*, wenn „darüber kein $\lambda v. \dots$ steht“
- Def. $\mathrm{fvar}(t) =$ Menge der in t frei vorkommenden Variablen (definiere durch strukturelle Induktion)
- Eine Variable x heißt in A ***gebunden***, falls A einen Teilausdruck $\lambda x.B$ enthält.
- Def. $\mathrm{bvar}(t) =$ Menge der in t gebundenen Variablen
- Bsp: $\mathrm{fvar}(x(\lambda x.\lambda y.x)) = \{x\}$, $\mathrm{bvar}(x(\lambda x.\lambda y.x)) = \{x, y\}$,

Semantik des Lambda-Kalküls: Reduktion $\to_\beta$

Relation $\to_\beta$ auf Λ (ein Reduktionsschritt)
Es gilt $t \to_\beta t'$, falls

- $\exists p \in \mathrm{Pos}(t)$, so daß
- $t[p] = (\lambda x.B)A$ mit $\mathrm{bvar}(B) \cap \mathrm{fvar}(A) = \emptyset$
- $t' = t[p := B[x := A]]$

  dabei bezeichnet $B[x := A]$ ein Kopie von B, bei der jedes freie Vorkommen von x durch A ersetzt ist

Ein (Teil-)Ausdruck der Form $(\lambda x.B)A$ heißt *Redex*. (Dort kann weitergerechnet werden.)

Ein Term ohne Redex heißt *Normalform*. (Normalformen sind Resultate von Rechnungen.)

Umbenennung von lokalen Variablen

- ```
  int x = 3;
  int f(int y) { return x + y; }
  int g(int x) { return (x + f(8)); }  // g(4) => 15
  ```
- Darf `f(8)` ersetzt werden durch $f[y := 8]$? - Nein:

  ```
  int x = 3;
  int g(int x) { return (x + (x+8)); } // g(4) => 16
  ```

  Das freie x in $(x + y)$ wird fälschlich gebunden.
  ```

- Lösung: lokal umbenennen

```
int g(int z) { return (z + f(8)); }
```

dann ist Ersetzung erlaubt

```
int x = 3;
int g(int z) { return (z + (x+8)); } // g(4) => 15
```

Falsches Binden lokaler Variablen

- dieser Ausdruck hat den Wert 15:

```
(\x->(((\f->\x->x + f 8) (\y-> x+y)) 4)) 3
```

- Redex $(\lambda f.B)A$ mit $B = \lambda x.x + f8$ und $A = \lambda y.x + y$:
- dort keine $\to_\beta$-Reduktion, $\text{bvar}(B) \cap \text{fvar}(A) = \{x\} \neq \emptyset$.
- falls wir die Nebenbedingung ignorieren, erhalten wir

```
(\x->((      \x->x + (\y-> x+y) 8)     4)) 3
```

mit Wert 16.

- dieses Beispiel zeigt, daß die Nebenbedingung semantische Fehler verhindert

Semantik . . . : gebundene Umbenennung $\to_\alpha$

- falls wir einen Redex $(\lambda x.B)A$ reduzieren möchten, für den $\text{bvar}(B) \cap \text{fvar}(A) = \emptyset$ nicht gilt,

  dann vorher dort die lokale Variable x umbenennen (hinter dem λ und jedes freie Vorkommen von x in B)
- Relation $\to_\alpha$ auf Λ, beschreibt *gebundene Umbenennung* einer lokalen Variablen.
- Beispiel $\lambda x.fxz \to_\alpha \lambda y.fyz$.

  (f und z sind frei, können nicht umbenannt werden)
- Definition $t \to_\alpha t'$:
  - $\exists p \in \text{Pos}(t)$, so daß $t[p] = (\lambda x.B)$
  - $y \notin \text{bvar}(B) \cup \text{fvar}(B)$
  - $t' = t[p := \lambda y.B[x := y]]$

Lambda-Terme: verkürzte Notation

- Applikation ist links-assoziativ, Klammern weglassen:

$$(\ldots((FA_1)A_2)\ldots A_n) \sim FA_1A_2\ldots A_n$$

  Beispiel: $((xz)(yz)) \sim xz(yz)$

  Wirkt auch hinter dem Punkt: $(\lambda x.xx)$ bedeutet $(\lambda x.(xx))$ — und nicht $((\lambda x.x)x)$

- geschachtelte Abstraktionen unter ein Lambda schreiben:

$$(\lambda x_1.(\lambda x_2.\ldots(\lambda x_n.B)\ldots)) \sim \lambda x_1x_2\ldots x_n.B$$

  Beispiel: $\lambda x.\lambda y.\lambda z.B \sim \lambda xyz.B$

Ein- und mehrstellige Funktionen

- eine einstellige Funktion zweiter Ordnung:

```
f = \ x -> ( \ y -> ( x*x + y*y ) )
```

  Anwendung dieser Funktion:

```
(f 3) 4 = ...
```

  Kurzschreibweisen (Klammern weglassen):

```
f = \ x y -> x * x + y * y ; f 3 4
```

- Übung:

  gegeben `t = \ f x -> f (f x)`

  bestimme `t succ 0, t t succ 0, t t t succ 0, t t t t succ 0, ...`

Lambda-Ausdrücke in C#

- Beispiel (Fkt. 1. Ordnung)

```
Func<int,int> f = (int x) => x*x;
f (7);
```

- Übung (Fkt. 2. Ordnung) — ergänze alle Typen:

```
???  t = (??? g) => (??? x) => g (g (x));
t (f)(3);
```

- Anwendungen bei Streams, später mehr

```
(new int[]{3,1,4,1,5,9}).Select(x => x * 2);
(new int[]{3,1,4,1,5,9}).Where(x => x > 3);
```

- Übung: Diskutiere statische/dynamische Semantik von

```
(new int[]{3,1,4,1,5,9}).Select(x => x > 3);
(new int[]{3,1,4,1,5,9}).Where(x => x * 2);
```

Lambda-Ausdrücke in Java

- *funktionales* Interface (FI): hat genau eine Methode
- Lambda-Ausdruck („burger arrow") erzeugt Objekt einer anonymen Klasse, die FI implementiert.

```
interface I { int foo (int x); }
I f = (x)-> x+1;
System.out.println (f.foo(8));
```

- vordefinierte FIs:

```
import java.util.function.*;
Function<Integer,Integer> g = (x)-> x*2;
   System.out.println (g.apply(8));
Predicate<Integer> p = (x)-> x > 3;
   if (p.test(4)) { System.out.println ("foo"); }
```

Lambda-Ausdrücke in Javascript

```
$ node

> let f = function (x){return x+3;}
undefined

> f(4)
7

> ((x) => (y) => x+y) (3) (4)
7

> ((f) => (x) => f(f(x))) ((x) => x+1) (0)
2
```

Ein AST für Lambda-Terme

- Λ (Menge der Terme = abstrakter Syntaxbäume, AST) realisiert als algebraischer Datentyp

  ```
  data Term
    = Var String | App Term Term | Abs String Term
  ```

- Positionen, Navigation zu Teilterm, Teilterm-Ersetzung

  ```
  data Dir = L | R | O ; type Pos = List Dir
  pos :: Term -> List Pos -- alle Positionen
  get :: Pos -> Term -> Maybe Term
  get Nil t = Just t
  get (Cons L p) (App l r) = get _
  put :: Pos -> Term -> Term -> Maybe Term
  put (Cons L p) t (App l r) =
    case put p t l of Just l' -> Just (App l' r)
  ```

- Mengen von Variablen:

  ```
  import qualified Data.Set as S
  var  :: L -> S.Set String -- alle Variablen
  bvar :: L -> S.Set String -- alle gebundenen
  fvar :: L -> S.Set String -- alle frei vorkommenden
  ```

API-Dokumentation: `https://hackage.haskell.org/package/containers/docs/Data-Set.html`

Ansatz:

```
bvar :: L -> S.Set String
bvar t = case t of
  Var v   -> S.empty
  App l r -> S.union _ _
  Abs v b -> S.insert v _
```

Hausaufgaben

SS 24: 6, (3 oder 4 oder 5); Zusatz: 1 (diese), 7 (vorige Woche) (Nachfolger und Plus für Zahlen als Binärbäume)

1. `bvar` und `fvar` implementieren, Testfälle vorführen (aus Skript und weitere)
2. `pos`, `get` und `put` implementieren, Testfälle vorführen.
3. für $t = \lambda fx.f(fx)$: AST von $ttSZ$ zeichnen,
   Normalform bestimmen: 1. auf Papier, 2. mit `ghci` (dabei Z und S als Konstruktoren der Peano-Zahlen)
   3. mit JS (node), dabei $Z = 0$ und $S = (x => x + 1)$.
4. für $s = \lambda xyz.xz(yz)$ und $k = \lambda ab.a$:
   Auswertung von $skk0$ in Haskell, in Javascript (`node`),
   optional: in C# (`csharp`), Java (`jshell`), oder anderer Sprache
5. Für $n \in$ bezeichnet (nur für diese Aufgabe, die eckigen Klammern bedeuten oft etwas anderes) $[n]$ den Lambda-Ausdruck $\lambda fx.f^n(x)$,
   dabei ist $f^n(x)$ die n-fach iterierte Anwendung von f auf x,
   also $[0] = \lambda fx.x$, $[1] = \lambda fx.fx$, $[2] = \lambda fx.f(fx)$, $[3] = \lambda fx.f(f(fx))$ usw.
   die Normalform von $[2]sz$ ist $s(sz)$, das entspricht der Peano-Repräsentation der Zahl 2.
   - für $p = \lambda abfx.af(bfx)$: bestimmen Sie die Normalform von $p[2][1]sz$
   - bestimmen Sie die Normalform von $[3][2]sz$
6. zur Folie *Falsches Binden lokaler Variablen* (wurde in VL durch anderes Beispiel ersetzt):

- abstrakte Syntax des Ausdrucks zeichnen (unter der Annahme eines zusätzlichen zweistelligen Symbols für Addition),
- die Variablen-Bedingung für angegebenen Redex überprüfen,
- lokale Umbenennung durchführen,
- dann reduzieren bis Normalform (unter der Annahme einer zusätzlichen arithmetischen Regel für Addition)