Ausführliche Lösungen

1.1 Lohnsteuer: $\frac{34{,}56\,€}{0{,}09} = 384{,}00\,€$, Lohnsteuersatz: $\frac{384\,€}{2.300\,€} = 16{,}70\%$

1.2 a) $K_{\mathrm{B}}^{\mathrm{brutto}} = \underbrace{\frac{19.950\,€}{1{,}16}}_{\text{Netto A}} \cdot \underbrace{1{,}03}_{\substack{\text{Zuschlags-}\\\text{faktor B}\\\text{gegenüber A}}} \cdot \underbrace{1{,}16}_{\substack{\text{Zuschlag}\\\text{MWSt}}} = 20.548{,}50\,€$

Der MWSt-Faktor 1,16 kann gekürzt werden, der Bruttopreis ist also bei B ebenfalls 3% höher als bei A.

b) $K_{\text{A vor 5 J.}}^{\mathrm{brutto}} = \underbrace{\frac{19.950\,€}{1{,}16}}_{\text{Netto heute}} \cdot \underbrace{\frac{1}{0{,}95^5}}_{\substack{\text{Division}\\\text{durch}\\\text{Abnahmefaktoren}}} \cdot \underbrace{1{,}15}_{\substack{\text{Zuschlag}\\\text{MWSt}\\\text{vor 5 J.}}} = 25.560{,}23\,€$

c) $\frac{19.950\,€}{25.560{,}23\,€} = 1 + i \Rightarrow i = -21{,}95\%$

d) Die Zu-/Abschläge erfolgen nacheinander, also nach (1.8):

$i = \sqrt[3]{1{,}071 \cdot 1{,}039 \cdot 0{,}979} - 1 = 2{,}8954\%$

Falsch wäre: $i = A(7{,}1\%; 3{,}9\%; -2{,}1\%) = 2{,}9667\%$

1.3 a) Grundwert $K = 56{,}9\% + 10{,}7\% + 22{,}2\% = 89{,}8\%$

Sitze: CDU $\frac{56{,}9\%}{89{,}8\%} \cdot 120 = 76$, SPD $\frac{10{,}7\%}{89{,}8\%} \cdot 120 = 14$, PDS $\frac{56{,}9\%}{89{,}8\%} \cdot 120 = 30$

b) Grundwert 1994: $K^{1994} = 58{,}1\% + 16{,}6\% + 16{,}5\% = 91{,}2\%$

Sitzanteile: CDU $\frac{58{,}1\%}{91{,}2\%} = 63{,}71\%$, SPD $\frac{16{,}6\%}{91{,}2\%} = 18{,}20\%$,

PDS $\frac{16{,}5\%}{91{,}2\%} = 18{,}09\%$

Sitze: CDU $63{,}71\% \cdot 120 + 1 = 77$, SPD $18{,}2\% \cdot 120 = 22$,

PDS $18{,}09 \cdot 120 - 1 = 21$

Sitzveränderung 1999: CDU: –1, SPD: –8, PDS: +9

1.4 $a_2 = 2 + 5 = 7$, $a_{12} = 2 + 11 \cdot 5 = 57$, $a_{55} = 2 + 54 \cdot 5 = 272$, $s_1 = 2$,

$s_2 = 2 + 7 = 9$, $s_{10} = 11(2 + \frac{10}{2} \cdot 5) = 297$

1.5 $a_2 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$, $a_5 = 0{,}25 \cdot 2^4 = 4$, $a_{10} = 0{,}25 \cdot 2^9 = 128$,

$s_2 = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$, $s_5 = 0{,}25 \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 7{,}75$, $s_{11} = 0{,}25 \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 511{,}75$

1.6 Z. B. Bisektionsverfahren: $x_0 = 1{,}2037$ (einzige Nullstelle)

2.1 Nach (2.4) bis (2.7) ergibt sich

t	Z_t	q_t	d_t	i_t (einf. Verz.)	i_t (mit Zinseszins)
0		1	1		
1	1.200,00 €	1,6	0,9434	6,0 %	6,0 %
2	1.144,80 €	1,1172	0,8951	5,7240 %	5,4 %
3	1.251,31 €	1,1798	0,8476	6,2566 %	5,6 %
4	1.486,56 €	1,2541	0,7974	7,4328 %	6,3 %

2.2 Anwendung von (2.14):

a) $K_9 = 5.000\,€(1+9\cdot 0{,}006) = 5.270\,€$

b) $5.500\,€ = K(1+9\cdot 0{,}006) \Rightarrow K = \dfrac{5.500\,€}{1+9\cdot 0{,}006} = 5.218{,}22\,€$

c) $5.500\,€ = 5.000\,€\cdot(1+n\cdot 0{,}006) \Rightarrow n = \dfrac{1}{0{,}006}\left(\dfrac{5.500\,€}{5.500\,€}-1\right) = 16\tfrac{2}{3}$ [Mon.]

2.3 Zinstage nach 30/360-Methode: 23 (Jan
) + 5·30 (Feb-Jun) + 22 (Jul) = 195.

$n = \frac{195}{360}$. Zahlbetrag ohne Mahngebühren: $7.887{,}50\,€ - 5{,}00\,€ = 7882{,}50\,€$

$$7.882{,}50\,€ = 7.200\,€\cdot(1+\frac{195}{360}\cdot i) \Rightarrow i = \frac{360}{195}\left(\frac{7.882{,}50\,€}{7.200\,€}-1\right) = 17{,}5\%\text{ p.a.}$$

2.4 a) $Z_1' = Z_2' = \tfrac{1}{2}Z_1 = 600{,}00\,€,\ \ Z_3' = Z_4' = \tfrac{1}{2}Z_2 = 572{,}40\,€,$

$Z_5' = Z_6' = \tfrac{1}{2}Z_3 = 625{,}66\,€,\ \ Z_7' = Z_8' = \tfrac{1}{2}Z_4 = 743{,}28\,€$

Verzinsungs und Diskontfolge:

$q_0' = 1, q_1' = 1{,}03, q_2' = q_1 = 1{,}06, q_3' = 1{,}08862, \ldots, q_8' = q_4 = 1{,}25413,$

$d_0' = 1, d_1' = 0{,}9709, d_2' = d_1 = 0{,}9434, d_3' = 0{,}9186, \ldots, d_8' = d_4 = 0{,}7974$

b) $i_1' = i_2' = 3\%, i_3' = i_4' = 2{,}7\%, i_5' = i_6' = 2{,}8\%, i_7' = i_8' = 3{,}15\%$

$q_0' = 1, q_1' = 1{,}03, q_2' = 1{,}0609, q_3' = 1{,}08954, \ldots, q_8' = 1{,}25817$

$K_8' = Kq_8' = 25.163{,}44\,€$

2.5 a) $K \underset{(2.21)}{=} \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{50.000\text{ €}}{1{,}03^{4\cdot 8}} = 19.416{,}85\text{ €}$ bzw. $= \dfrac{50.000\text{ €}}{1{,}05^{4\cdot 50}} = 2{,}89\text{ €}$

b) $i \underset{(2.21)}{=} \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K}} - 1 = \sqrt[12\cdot 3]{\dfrac{50.000\text{ €}}{40.000\text{ €}}} - 1 = 0{,}62\%$ p.M.

c) Ansatz mit (2.21): $2K = K(1+i)^n \Rightarrow n = \log_{1+i} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}06} \approx 11{,}9$ [Hj.]

Berechnung der Zinstage t_2 in der 12.Periode mit (2.26'):

$$2K = K(1+i)^{11}(1+\frac{2t_2}{360}i) \Rightarrow t_2 = \left(\frac{2}{1{,}06} - 1\right)\frac{180}{0{,}06} \approx 161 \text{ [Tage]}$$

2.6 $i_1 = i_2 = 0{,}5\%, i_3 = i_4 = 1{,}5\%, i_5 = i_6 = 2{,}5\%, \ldots, i_{13} = i_{14} = 6{,}5\%, i_{15} = 7{,}5\%$

$\Rightarrow i = \sqrt[15]{1{,}005^2 1{,}015^2 1{,}025^2 1{,}035^2 1{,}045^2 1{,}055^2 1{,}065^2 1{,}075} - 1 = 3{,}7439\%$

2.7 a) Konform ist der exponentiell proportionale Zinssatz, also mit (2.24)

$i_{12} = \sqrt[12]{1{,}09} - 1 = 0{,}7207\%$ p.M.

b) $i/12 = 0{,}75\% \Rightarrow i^* \underset{(2.25)}{=} 1{,}0075^{12} - 1 = 9{,}3807\%$

c) Effektivzinssätze zu $i = 12$ %:

m	1	2	4	12	**360**	360·24
i^*	9 %	9,2025 %	9,3083 %	9,3807 %	**9,4162 %**	9,4174 %

Es handelt sich also um tägliche Verzinsung.

2.8 $i_A^* = (1+\frac{0{,}029}{12})^{12} - 1 = 2{,}9389\%$, $i_B^* = (1+\frac{0{,}0295}{6})^6 - 1 = 2{,}9865\%$,

$i_C^* = (1+\frac{0{,}03}{3})^3 - 1 = 3{,}0301\%$, also ist Variante C am rentabelsten.

Anpassen der Variantent A und B:

$$(1+\frac{i_A}{12})^{12} - 1 = (1+\frac{0{,}03}{3})^3 - 1 \Rightarrow i_A = 12\left(\sqrt[4]{1+\frac{0{,}03}{3}} - 1\right) = 2{,}9888\%,$$

$$(1+\frac{i_B}{6})^6 - 1 = (1+\frac{0{,}03}{3})^3 - 1 \Rightarrow i_B = 6\left(\sqrt{1+\frac{0{,}03}{3}} - 1\right) = 2{,}9925\%$$

2.9 Wir setzen $\alpha = \lambda(t-n), \beta = (1-\lambda)(t-n), 0 \le \lambda \le 1$, wobei $n := [t]$.

$$K_{\alpha,n,\beta} \underset{(2.26)}{=} K(1+\lambda(t-n)i)(1+i)^n(1+(1-\lambda)(t-n)i)$$

$$= K(1+i)^n(1+(t-n)i + \lambda(1-\lambda)(t-n)^2 i^2)$$

wird am größten, wenn der quadratische Ausdruck $\lambda(1-\lambda)$ maximal wird.

Dies ist genau am Scheitelpunkt bei $\lambda = 1/2$ der Fall, also muss $\alpha = \beta$ sein.
$\rightleftharpoons$

2.10 a) $i(s)$ ist stückweise linear mit Anstiegen i_1 im Intervall (0,1), i_2 im Intervall (1,2), i_3 im Intervall (2,3), i_4 im Intervall (3,4), also

$$\ln q(t) \underset{(2.32)}{=} \begin{cases} i_1 t & \text{falls } 0 < t \le 1, \\ i_1 + i_2(t-1) & \text{falls } 1 < t \le 2, \\ i_1 + i_2 + i_3(t-2) & \text{falls } 2 < t \le 3, \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4(t-3) & \text{falls } 3 < t \le 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}063t & \text{falls } 0 < t \le 1, \\ 0{,}061t + 0{,}002 & \text{falls } 1 < t \le 2, \\ 0{,}057t + 0{,}01 & \text{falls } 2 < t \le 3, \\ 0{,}062t - 0{,}005 & \text{falls } 3 < t \le 4 \end{cases}$$

b) Durchschnittliche Zinsintensität:

$$i \underset{(2.33)}{=} \frac{1}{4} q(4) = \frac{0{,}062 \cdot 4 - 0{,}005}{4} = 6{,}075\% = A(i_1, i_2, i_3, i_4)$$

c) Vergleich mit Verzinsungsfolge (q_t) im diskreten Modell:

t	0	1	2	3	4
$q(t)$	1	1,065	1,132	1,1984	1,2751
q_t	1	1,063	1,1278	1,1921	1,266

3.1 a) $t = 0$ sei Fälligkeit der Zahlung bei Variante A. Dann ist die Zahlung bei Variante B fällig bei $t = 20/360$.

$$K_0^{\text{A}} = 0{,}98R,\ K_0^{\text{B}} = \frac{R}{1 + \frac{20}{360} 0{,}12} \approx 0{,}9934R,\ \ R = \text{Rechnungsbetrag}$$

Also ist Variante A günstiger.

b) $$0{,}98R = \frac{R}{1 + \frac{20}{360} i} \Rightarrow i = \left(\frac{1}{0{,}98} - 1 \right) \frac{360}{20} = 36{,}7347\% \text{ p.a.}$$

c) $$(1-s)R = \frac{R}{1 + \frac{d}{360} i} \Rightarrow i = \left(\frac{1}{1-s} - 1 \right) \frac{360}{d} = \frac{s}{1-s} \frac{360}{d}$$

3.2 $$4.000\ € - 1.000\ € = \frac{R}{1 + \frac{1}{12} 0{,}099} + \ldots + \frac{R}{1 + \frac{6}{12} 0{,}099} \approx 5{,}8377R \Rightarrow R = 514{,}34\ €$$

3.3 a) $q_1 = 1{,}063,\ \ q_2 = q_1 \cdot 1{,}061 = 1{,}12784,\ \ q_3 = q_2 \cdot 1{,}057 = 1{,}19213,$

$$q_4 = q_3 \cdot 1{,}062 = 1{,}26604.\ \Rightarrow K_4 = q_4\left(\frac{R}{q_1}+\frac{R}{q_2}+\frac{R}{q_3}+\frac{R}{q_4}\right) = 4{,}3755R$$

b) $q_1 = e^{0{,}063} = 1{,}065,\ \ q_2 = q_1 e^{0{,}061} = 1{,}13202,\ \ q_3 = q_2 e^{0{,}057} = 1{,}19842,$

$$q_4 = q_3 e^{0{,}062} = 1{,}27507.\ \Rightarrow K_4 = q_4\left(\frac{R}{q_1}+\frac{R}{q_2}+\frac{R}{q_3}+\frac{R}{q_4}\right) = 4{,}3875R$$

3.4 a) $$G_0 = \frac{8.000\ €}{1{,}12}+\frac{18.000\ €}{1{,}12^2}+\frac{24.000\ €}{1{,}12^3}+\frac{22.000\ €}{1{,}12^4}+\frac{31.500\ €}{1{,}12^5}-70.000\ €$$

$= 430{,}42\ € > 0,$ also lohnt sich die Investition.

b) $$\frac{8.000\ €}{q}+\frac{18.000\ €}{q^2}+\frac{24.000\ €}{q^3}+\frac{22.000\ €}{q^4}+\frac{31.500\ €}{q^5}-70.000\ € = 0$$

Ein Iterationsverfahren (z. B. NEWTON-Verfahren) liefert $q \approx 1{,}122084$, also $i_0 = 12{,}2084\%$.

3.5 Der verwendete Monatszinssatz ist linear proportional zum Jahreszinssatz und damit wegen der vorausgesetzten geometrischen Verzinsung *nicht* konform. Für die Verzinsungsfolge ist daher das Prinzip der gemischten Verzinsung anzuwenden (vgl. Abschnitt 2.7). Barverkaufspreis:

$$K_0 \underset{(3.7)}{=} 3.500\ € + \sum_{t=1}^{36}\frac{299\ €}{q_t} \underset{(2.26)}{=} 3.500\ € + \sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{12}\frac{299\ €}{1{,}075^{\lambda-1}(1+\mu\frac{0{,}075}{12})}$$

$$= 3.500\ € + \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{299\ €}{1{,}075^{\lambda-1}}\sum_{\mu=1}^{12}\frac{1}{1+\mu\frac{0{,}075}{12}} = 3.500\ € + \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{299\ €}{1{,}075^{\lambda-1}}\cdot 11{,}536492$$

$$= 3.500\ € + 11{,}536492\cdot 299\ €\,\frac{1{,}075^{-3}-1}{1{,}075^{-1}-1} = 13.143{,}05\ €$$

3.6 Als Nullstellen von $G_0(i)$ ergeben sich $i_1 = 2\ \%$, $i_2 = 5\ \%$, $i_3 = 8\ \%$.

3.7 $$\bar{t} = \frac{\ln\sum_{t=1}^{n} A_t - \ln\sum_{t=1}^{n}\frac{A_t}{1{,}12^t}}{\ln 1{,}12} = 3{,}3967$$

3.8 a) Wegen der Monotonie der Verzinsungsfolge (Satz 2.1) gilt

$$\sum_{t=0}^{n} A_t \ge \sum_{t=0}^{n}\frac{A_t}{q_t} \ge \frac{1}{q_n}\sum_{t=0}^{n} A_t \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{q_{\bar{t}}} \ge \frac{1}{q_n} \Leftrightarrow q_0 = 1 \le q_{\bar{t}} \le q_n .$$

Erneut aus der Monotonie ergibt sich $0 \le \bar{t} \le n$. Gleichheit besteht dabei in allen Ungleichungen genau in den aufgeführten Fällen.

b) Setzt man in Satz 2.4 (1) $K = 1$, so ergibt sich $q_t^{(\text{geom})} \ge q_t^{(\text{lin})}$. Daraus folgt sofort die Behauptung mittels (3.14). $\rightleftharpoons$

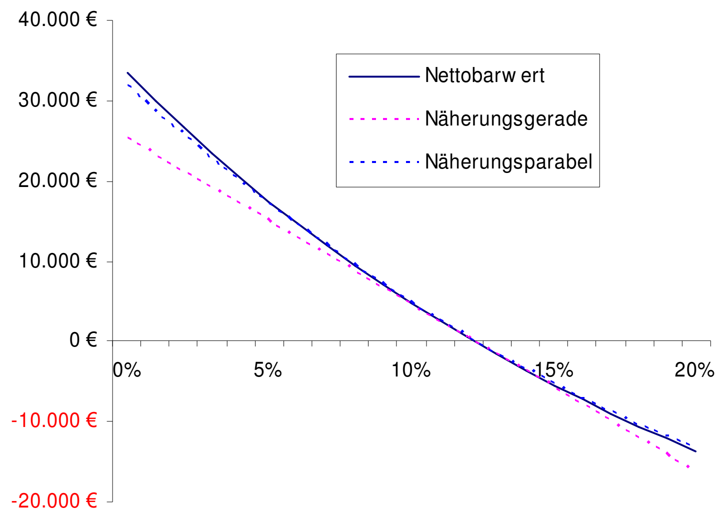
3.9 a) $D \underset{(3.10),(3.17)}{=} \dfrac{1}{G_0(0{,}12)} \sum_{t=0}^{5} \dfrac{tA_t}{1{,}12^t} = 539{,}908,$

$V \underset{(3.10),(3.17)}{=} \dfrac{1}{G_0(0{,}12)} \sum_{t=0}^{5} \dfrac{t(t+1)A_t}{1{,}12^t} = 2.604{,}969$

b) $G_0(i) \approx P^{lin}(i) = 430{,}42\,€\left(1 - \dfrac{539{,}9}{1{,}12}(i - 0{,}12)\right),$

$G_0(i) \approx P^{quad}(i) = 430{,}42\,€\left(1 - \dfrac{539{,}91}{1{,}12}(i - 0{,}12) + \dfrac{1}{2}\dfrac{2.604{,}97}{1{,}12^2}(i - 0{,}12)^2\right)$

c)



4.1 a) $K_{15}'^{\text{lin}} \underset{(4.6)}{=} 15 \cdot 3.000€(1 + \tfrac{15+1}{2}0{,}06) = 66.600€$

b) $K_{15}'^{\text{geom}} \underset{(4.10)}{=} 3.000\,€ \cdot 1{,}06 \dfrac{1{,}06^{15} - 1}{0{,}06} = 74.017{,}58\,€$

4.2 a) Wert des in Anspruch genommenen Kredits nach 1 Jahr mittels (4.6):

$K_1'^{\mathrm{A}} = P(1+0{,}15) = 1{,}15P$

$K_1'^{\mathrm{B}} = 1{,}03\,\frac{P}{2}\,2(1+\frac{3}{2}\,\frac{0{,}15}{2}) = 1{,}1459P$

$K_1'^{\mathrm{C}} = 1{,}05\,\frac{P}{4}\,4(1+\frac{5}{2}\,\frac{0{,}15}{4}) = 1{,}1484P$

$K_1'^{\mathrm{D}} = 1{,}06\,\frac{P}{12}\,12(1+\frac{13}{2}\,\frac{0{,}15}{12}) = 1{,}1461P$

Zahlungsweise B ist am günstigsten (geringster Kredit).

b) Analog a) ergibt sich

$K_1'^{\mathrm{A}}(i) = P(1+i)$

$K_1'^{\mathrm{B}}(i) = P(1{,}03+0{,}7725i)$

$K_1'^{\mathrm{C}}(i) = P(1{,}05+0{,}65625i)$

$K_1'^{\mathrm{D}}(i) = P(1{,}06+0{,}5742i)$

Nach Berechnung der Schnittpunkte dieser 4 in i linearen Funktionen:

Im Intervall...	[0; 13,19 %]	[13,19 %; 15,13 %]	[15,13 %; ℕ)
ist am günstigsten...	A	B	D

4.3 a) Kaufpreis $P = K_n' = R_n q \underset{(4.11)}{=} Rq\frac{q^n-1}{i} \Rightarrow q^n = \frac{Pi}{Rq} - 1$

$$\Rightarrow n = \log_q\left(\frac{Pi}{Rq}-1\right) = \log_q\left(\frac{1.330\,€\cdot\frac{0{,}04}{12}}{100\,€\cdot(1+\frac{0{,}04}{12})}-1\right) = 12{,}99 \text{ [Monate]}$$

Alfons erreicht sein Sparziel nach 13 Monaten.

b) $K_{12}' \underset{(4.14)}{=} Rq\frac{q^n-1}{i} = 100\,€\cdot(1+\frac{0{,}04}{12})\frac{((1+\frac{0{,}04}{12})^{12}-1)}{\frac{0{,}04}{12}} = 1.226{,}32\,€$

Die Differenz beträgt 1.249 € – 1.226,32 € = 22,68 €.

c) $P(q-1) \underset{(4.11)}{=} Rq(q^n-1) \Rightarrow Rq^{n+1} - (R+P)q + P = 0$

Nullstellenbestimmung mittels Iterationsverfahren: $q = 1{,}006142$, d. h. der Zinssatz müsste 0,6142 % p.M., also 12 · 0,6142 % = 7,44 % p.a. lauten.

4.4 a) $R_{25} \underset{(4.11)}{=} R\frac{q^n-1}{i} = 1.200\,€\,\frac{1{,}036^{25}-1}{0{,}036} = 47.366{,}50\,€$ bzw.

b) $R_{300} \underset{(4.11)}{=} 100\,€\,\frac{1{,}003^{300}-1}{0{,}003} = 48.543{,}05\,€$

4.5 a) $n = 52 \cdot 12 = 624 \Rightarrow K'_{624} = R_{624}q \underset{(4.14)}{=} 1\,€ \cdot 1{,}002 \dfrac{1{,}002^{624} - 1}{0{,}002} = 1.241{,}99\,€$

b) Zerlegen in 3 Teilrenten mit $3 \cdot 52 = 154$, $5 \cdot 52 = 260$ und $4 \cdot 52 = 208$ Wochen:

$$R^{\mathrm{A}}_{154} = 1\,€ \cdot \frac{1{,}002^{154} - 1}{0{,}002} = 182{,}86\,€, \quad R^{\mathrm{B}}_{260} = 2\,€ \cdot \frac{1{,}002^{260} - 1}{0{,}002} = 681{,}15\,€,$$

$$R^{\mathrm{C}}_{260} = 5\,€ \cdot \frac{1{,}002^{208} - 1}{0{,}002} = 1.288{,}14\,€$$

$$K'_{624} = R^{\mathrm{A}}_{154} 1{,}002^{1+260+208} + R^{\mathrm{B}}_{260} 1{,}002^{1+208} + R^{\mathrm{C}}_{208} 1{,}002 = 2.791{,}66\,€$$

4.6 $R = K_0^{\infty} i - 50.000\,€ = 6\,\text{Mio.}€ \cdot 0{,}045 - 50.000 = 220.000\,€$

4.7 Kapital nach Abzug der Abschlusskosten: $280.000\,€ \cdot (1 - 0{,}025) = 273.000\,€$, $n = 35 \cdot 12 = 420$

a) $R' \underset{(4.22)}{=} 273.000\,€ \cdot 1{,}005^{420} \dfrac{0{,}005}{1{,}005^{420} - 1} = 1.556{,}62\,€,$

Ratenzahlung an Versicherte: $R = (1 - 0{,}002)R' = 1.553{,}50\,€$

b) $K_{120} \underset{(4.21)}{=} 273.000\,€ \cdot 1{,}005^{120} - 1.556{,}62\,€ \dfrac{1{,}005^{120} - 1}{0{,}005} = 241.597{,}78\,€$

Rückkaufswert: $241.597{,}78\,€ \cdot (1 - 5\%) = 229.517{,}89\,€$

4.8 a) $R_{10} \underset{(4.11)}{=} 1.000\,€ \dfrac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} = 14.486{,}56\,€$

b) $R_{10} \underset{(4.25)}{=} 1.000\,€ \dfrac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} + 50\,€ \left(\dfrac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08^2} - \dfrac{10}{0{,}08} \right) = 17.290{,}66\,€$

c) $R_{10} \underset{(4.26)}{=} R \dfrac{c^n - q^n}{c - q} = 1.000\,€ \dfrac{1{,}04^{10} - 1{,}08^{10}}{1{,}04 - 1{,}08} = 16.967{,}02\,€$

4.9 $K'_0 \underset{(4.15)}{=} 450\,€ \cdot 1{,}002^{-23} \dfrac{1{,}002^{24} - 1}{0{,}002} + 1{,}08 \cdot 450\,€ \cdot 1{,}002^{-47} \dfrac{1{,}002^{24} - 1}{0{,}002} + \ldots$

$$\ldots + 1{,}08^4 \cdot 450\,€ \cdot 1{,}002^{-119} \frac{1{,}002^{24} - 1}{0{,}002} = 55.978{,}18\,€$$

4.10 $$R_n = Rq^{n-k}\frac{q^k-1}{q-1} + Rcq^{n-2k}\frac{q^k-1}{q-1} + \ldots + Rc^{n/k-2}q^k\frac{q^k-1}{q-1} + Rc^{n/k-1}\frac{q^k-1}{q-1}$$
$$= Rq^{n-k}\frac{q^k-1}{q-1}(1+cq^{-k}+\ldots+(cq^{-k})^{n/k-1}) = Rq^{n-k}\frac{q^k-1}{q-1}\frac{(cq^{-k})^{n/k}-1}{cq^{-k}-1}$$
$$= R\frac{q^k-1}{q-1}\frac{c^{n/k}-q^n}{c-q^k}$$

Der Vergleich mit (4.11) zeigt, dass dies der Gesamtwert einer Rente mit k Raten zu je $R(c^{n/k}-q^n)/(c-q^k)$ ist. Andere Deutung: Im Vergleich zu (4.26) erkennt man, dass es sich um den Gesamtwert einer mit c geometrisch wachsenden Rente über n/k Perioden handelt, die Raten betragen je $R(q^k-1)/(q-1)$ (Gesamtwert konstanter Teilrente über k Perioden), in einem Modell mit konstantem Verzinsungsfaktor q^k.

4.11 Zerlegung der eigenen Einzahlungen und der Zulagen in je 4 Teilrenten: Nach (4.14) bzw. (4.12) ergibt sich mit $q = 1{,}0625$:

$$R_{19} = \underbrace{250\,€q^{18}\frac{q^2-1}{q-1} + 500\,€q^{16}\frac{q^2-1}{q-1} + 750\,€q^{14}\frac{q^2-1}{q-1} + 1000\,€q\frac{q^{13}-1}{q-1}}_{\text{eigene Einzahlungen}}$$
$$\underbrace{+38\,€q^{17}\frac{q^2-1}{q-1} + 76\,€q^{15}\frac{q^2-1}{q-1} + 114\,€q^{13}\frac{q^2-1}{q-1} + 152\,€\frac{q^{13}-1}{q-1}}_{\text{staatliche Zulagen}}$$
$$= 32.300{,}41\,€$$

4.12 a) $R_9 \underset{(4.11)}{=} 700\,€\dfrac{1{,}06^9-1}{0{,}06} = 8.043{,}92\,€$

b) $R_9 \underset{(4.28)}{=} 700\,€\dfrac{1{,}015^{4\cdot 9}-1}{1{,}015^4-1} = 8.089{,}45\,€$

c) $R_9 \underset{(4.28)}{=} 700\,€\dfrac{1{,}005^{12\cdot 9}-1}{1{,}005^{12}-1} = 8.099{,}99\,€$

4.13 Kaufpreis: 18.700 € $\cdot$ (1 – 0,1) = 16.830 €. Barwert der Leasingzahlungen:

$$K_0^{\text{Leasing}} \underset{(4.36)}{=} 7.500\,€ + 1{,}1^{-2}\cdot 160\,€\frac{1{,}1^{24/12}-1}{1{,}1^{1/12}-1} + 7.500\,€\cdot 1{,}1^{-2} = 17.180{,}68\,€$$

Ein sofortiger Kauf ist also günstiger.

4.14 $K'_{84} \underset{(4.38)}{=} 78\,€ \cdot 1{,}045^{7-\frac{84-1}{12}} \dfrac{1{,}045^{84/12}-1}{1{,}045^{1/12}-1} = 7.687{,}65\,€$

$r \underset{(4.42)}{=} 78\,€ \cdot 1{,}045^{\frac{1}{12}} \dfrac{0{,}045}{1{,}045^{1/12}-1} = 958{,}66\,€$

5.1 a) Tilgungsplan:

t	i_t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	0,8 %	1.500 €	12 €	0 €	12 €
2	0,8 %	1.500 €	12 €	500 €	512 €
3	0,8 %	1.000 €	8 €	0 €	8 €
t	i_t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
4	0,8 %	1.000 €	8 €	300 €	308 €
5	1,0 %	700 €	7 €	300 €	307 €
6	1,0 %	400 €	4 €	0 €	4 €
7	1,0 %	400 €	4 €	400 €	404 €
8		0 €		Σ = 1.500 €	

b) Tilgunsprozess: (1.500 €, 12 €, 512 €, 8 €, 308 €, 307 €, 4 €, 404 €)

5.2 a) $Z_1 = K_0 i_1 = 10.000\,€ \qquad T_1 = A_1 - Z_1 = 50.000\,€$

$K_1 = K_0 - T_1 = 50.000\,€$. Wegen $T_1 + T_2 = K_0$ ist $T_2 = 50.000\,€$.

$Z_2 = A_2 - T_2 = 10.000\,€ \qquad i_2 = Z_2 / K_1 = 20\%$.

b) Analog a): $Z_1 = 100.000\,€ \cdot i_1 \qquad T_1 = A_1 - Z_1 = 60.000\,€ - 100.000\,€ \cdot i_1$

$T_2 = K_1 = K_0 - T_1 = 40.000\,€ + 100.000\,€ \cdot i_1$

$Z_2 = A_2 - T_2 = 20.000\,€ - 100.000\,€ \cdot i_1$

$$i_2 = Z_2 / K_1 = \frac{20.000\,€ - 100.000\,€ \cdot i_1}{40.000\,€ + 100.000\,€ \cdot i_1} = \frac{1-5i_1}{2+5i_1}$$

$i_1 = i_2 = i \Rightarrow i = \dfrac{1-5i}{2+5i} \Leftrightarrow 5i^2 + 7i - 1 = 0$, positive Lösung: $i = 13{,}066\%$

5.3 a) $R \underset{(5.14)}{=} K_0 q^n \dfrac{q-1}{q^n-1} = 2.000\,€ \cdot 1{,}006^{12} \dfrac{0{,}006}{1{,}006^{12}-1} = 173{,}24\,€$ monatlich

Tilgungsplan:

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	**2.000,00 €**	12,00 €	161,24 €	**173,24 €**
2	1.838,76 €	11,03 €	162,21 €	**173,24 €**
3	1.676,56 €	10,06 €	163,18 €	**173,24 €**

4	1.513,38 €	9,08 €	164,16 €	**173,24 €**
5	1.349,22 €	8,10 €	165,14 €	**173,24 €**
6	1.184,08 €	7,10 €	166,13 €	**173,24 €**
7	1.017,94 €	6,11 €	167,13 €	**173,24 €**
8	850,81 €	5,10 €	168,13 €	**173,24 €**
9	682,68 €	4,10 €	169,14 €	**173,24 €**
10	513,54 €	3,08 €	170,16 €	**173,24 €**
11	343,38 €	2,06 €	171,18 €	**173,24 €**
12	172,20 €	1,03 €	172,20 €	**173,24 €**
13	0,00 €		Σ = 2.000 €	

b) $K_0 \underset{(4.31)}{=} Rq^{-mn} \dfrac{q^{mn}-1}{q^m-1}$

$\Rightarrow R = K_0 q^{mn} \dfrac{q^m-1}{q^{mn}-1} = 2.000\text{ €} \cdot 1{,}006^{3\cdot 4} \dfrac{q^3-1}{q^{4\cdot 4}-1} = 522{,}84\text{ €}$ vierteljährlich

Tilgungsplan:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	**2.000,00 €**	12,00 €	-12,00 €	**0,00 €**
2	2.012,00 €	12,07 €	-12,07 €	**0,00 €**
3	2.024,07 €	12,14 €	510,69 €	**522,84 €**
4	1.513,38 €	9,08 €	-9,08 €	**0,00 €**
5	1.522,46 €	9,13 €	-9,13 €	**0,00 €**
6	1.531,59 €	9,19 €	513,65 €	**522,84 €**
7	1.017,94 €	6,11 €	-6,11 €	**0,00 €**
8	1.024,05 €	6,14 €	-6,14 €	**0,00 €**
9	1.030,20 €	6,18 €	516,66 €	**522,84 €**
10	513,54 €	3,08 €	-3,08 €	**0,00 €**
11	516,62 €	3,10 €	-3,10 €	**0,00 €**
12	519,72 €	3,12 €	519,72 €	**522,84 €**
13	0,00 €		Σ = 2.000 €	

c) $\underset{\text{wie b)}}{\Rightarrow} R = K_0 q^{mn} \dfrac{q^m-1}{q^{mn}-1} = 2.000\text{ €} \cdot 1{,}006^{6\cdot 2} \dfrac{q^6-1}{q^{6\cdot 2}-1} = 1.055{,}14\text{ €}$ halbjährlich

Tilgungsplan:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	**2.000,00 €**	12,00 €	-12,00 €	**0,00 €**
2	2.012,00 €	12,07 €	-12,07 €	**0,00 €**
3	2.024,07 €	12,14 €	-12,14 €	**0,00 €**
4	2.036,22 €	12,22 €	-12,22 €	**0,00 €**
5	2.048,43 €	12,29 €	-12,29 €	**0,00 €**

6	2.060,72 €	12,36 €	1.042,78 €	**1.055,14 €**
7	1.017,94 €	6,11 €	-6,11 €	**0,00 €**
8	1.024,05 €	6,14 €	-6,14 €	**0,00 €**
9	1.030,20 €	6,18 €	-6,18 €	**0,00 €**
10	1.036,38 €	6,22 €	-6,22 €	**0,00 €**
11	1.042,60 €	6,26 €	-6,26 €	**0,00 €**
12	1.048,85 €	6,29 €	1.048,85 €	**1.055,14 €**
13	0,00 €		Σ = 2.000 €	

5.4 $\frac{T_n}{q_n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{Z_t}{q_t} \underset{(5.8),(5.9)}{=} \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{q_t} \underset{\text{Satz 5.2}}{=} K_0$

5.5 Gesamtfällige Schuld mit Zinsansammlung.
Kaufpreis: $K_0 = A_7 q^{-7} = 100\,€ \cdot 1{,}042^{-7} = 74{,}98\,€$
Wert nach 2 Jahren: $K_2 = K_0 q^2 = 74{,}98\,€ \cdot 1{,}042^2 = 81{,}41\,€$

5.6 Aus (5.13) ergibt sich: $K_0 = Tn = 800\,€ \cdot 11 = 8.800\,€$,
$A_1 = K_0 i + T = 8.800\,€ \cdot 2{,}5\% + 800\,€ = 1.020\,€$,
$K_5 = K_0(1 - \frac{5}{11}) = 4.800\,€ \Rightarrow A_6 = K_5 \cdot 2{,}5\% + 800\,€ = 920\,€$

5.7 a) Zinsschuld:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	**250.000,00 €**	20.000,00 €	**0,00 €**	20.000,00 €
2	250.000,00 €	20.000,00 €	**0,00 €**	20.000,00 €
3	250.000,00 €	20.000,00 €	**0,00 €**	20.000,00 €
4	250.000,00 €	20.000,00 €	**0,00 €**	20.000,00 €
5	250.000,00 €	20.000,00 €	**250.000,00 €**	270.000,00 €
6	0,00 €			

b) Gesamtfällige Schuld mit Zinsansammlung:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	**250.000,00 €**	20.000,00 €	-20.000,00 €	**0,00 €**
2	270.000,00 €	21.600,00 €	-21.600,00 €	**0,00 €**
3	291.600,00 €	23.328,00 €	-23.328,00 €	**0,00 €**
4	314.928,00 €	25.194,24 €	-25.194,24 €	**0,00 €**
5	340.122,24 €	27.209,78 €	**340.122,24 €**	367.332,02 €
6	0,00 €			

c) Ratenschuld:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	**250.000,00 €**	20.000,00 €	**50.000,00 €**	70.000,00 €

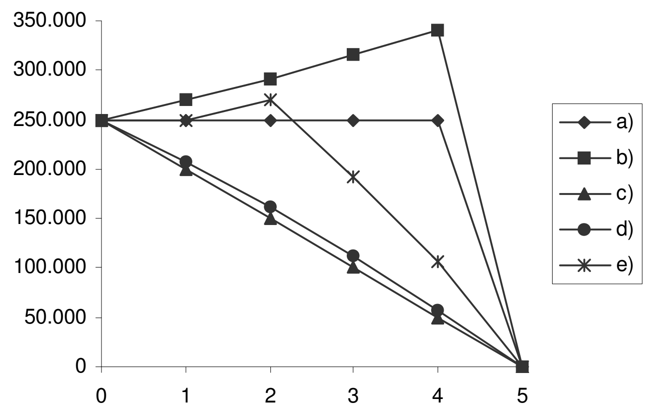
2	200.000,00 €	16.000,00 €	**50.000,00 €**	66.000,00 €
3	150.000,00 €	12.000,00 €	**50.000,00 €**	62.000,00 €
4	100.000,00 €	8.000,00 €	**50.000,00 €**	58.000,00 €
5	50.000,00 €	4.000,00 €	**50.000,00 €**	54.000,00 €
6	0,00 €			

d) Annuitätenschuld: $A \underset{(5.14)}{=} 500.000\,€ \cdot 1{,}08^5 \dfrac{0{,}08}{1{,}08^5 - 1} = 62.614{,}11\,€$

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	**250.000,00 €**	20.000,00 €	42.614,11 €	**62.614,11 €**
2	207.385,89 €	16.590,87 €	46.023,24 €	**62.614,11 €**
3	161.362,64 €	12.909,01 €	49.705,10 €	**62.614,11 €**
4	111.657,54 €	8.932,60 €	53.681,51 €	**62.614,11 €**
5	57.976,03 €	4.638,08 €	57.976,03 €	**62.614,11 €**
6	0,00 €			

e) allgemeiner Tilgungsprozess:

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	**250.000,00 €**	20.000,00 €	**0,00 €**	20.000,00 €
2	250.000,00 €	20.000,00 €	-20.000,00 €	**0,00 €**
3	270.000,00 €	21.600,00 €	78.400,00 €	**100.000,00 €**
4	191.600,00 €	15.328,00 €	84.672,00 €	**100.000,00 €**
5	106.928,00 €	8.554,24 €	**106.928,00 €**	115.482,24 €
6	0,00 €			



5.8 a) $A \underset{(5.14)}{=} 150.000\,€ \cdot 1{,}09^{10} \dfrac{0{,}09}{1{,}09^{10}-1} = 23.373{,}01\,€$

b) $T_1 = A - K_0 i = 23.373{,}01\,€ - 150.000\,€ \cdot 0{,}09 = 9.873{,}01\,€$

$\Rightarrow j_1 \underset{(5.23)}{=} \dfrac{9.873{,}01\,€}{150.000\,€} = 6{,}582\%$

c) $T_{10} \underset{(5.17)}{=} T_1 q^9 = 9.873{,}01\,€ \cdot 1{,}09^9 = 21.443{,}13\,€$

d) $K_5 \underset{(5.16)}{=} \dfrac{1{,}09^{10} - 1{,}09^5}{1{,}09^{10}-1} = 90.912{,}87\,€$

e) $$n \underset{(5.18)}{=} \frac{\ln \frac{14.000\,€}{14.000\,€ - 150.000\,€ \cdot 0{,}09}}{\ln 1{,}09} \approx 38{,}67 \text{ [Jahre] bzw.}$$

$$n \underset{(5.18)}{=} \frac{\ln \frac{13.600\,€}{13.600\,€ - 150.000\,€ \cdot 0{,}09}}{\ln 1{,}09} \approx 57{,}01 \text{ [Jahre]}$$

Bei $A = 13.000$ € wäre die Annuität kleiner als der Zinsanteil (13.500 €), also würde die Restschuld wachsen und nie vollständig getilgt.

5.9 $$n \underset{(5.18)}{=} \frac{\ln \frac{A}{A - K_0 i}}{\ln q} \underset{(5.29)}{=} \frac{\ln \frac{K_0(i + j_1)}{K_0(i + j_1) - K_0 i}}{\ln q} = \frac{\ln\left(1 + \frac{i}{j_1}\right)}{\ln(1+i)}$$

$n = 30{,}73$ für $j_1 = 1$ %, $n = 22{,}23$ für $j_1 = 2$ % bzw. $n = 17{,}79$ für $j_1 = 3$ %

5.10 a) $$A \underset{(5.29)}{=} K_0(i + j_1) = 185.000\,€(0{,}016 + 0{,}004) = 3.700\,€$$

$$n \underset{(5.18)}{=} \frac{\ln \frac{A}{A - K_0 i}}{\ln q} = \frac{\ln \frac{3.700\,€}{3.700\,€ - 185.000\,€ \cdot 0{,}016}}{\ln 1{,}016} = 101{,}39 \text{ [Quartale]},$$

d. h. vollständige Tilgung nach 25,35 Jahren.

b) Restschuld nach 10 Jahren:

$$K_{40} = 185.000\,€ \cdot 1{,}016^{40} - 3.700\,€ \frac{1{,}016^{40} - 1}{0{,}016} = 143.980{,}99\,€$$

$$n^{\text{neu}} = \frac{\ln \frac{A}{A - K_{40} i^{\text{neu}}}}{\ln(1 + i^{\text{neu}})} = \frac{\ln \frac{3.700\,€}{3.700\,€ - 143.980{,}99\,€ \cdot 0{,}021}}{\ln 1{,}021} = 81{,}77 \text{ [Qu.]}$$

,

d. h. Familie Grundeis ist durch die Zinserhöhung genau
$40 + 81{,}77 - 101{,}39 = 20{,}37$ Quartale bzw. 5,09 Jahre später schuldenfrei.

5.11 a) Die Rente der Annuitäten besitzt nach (4.26) den Gesamtwert

$$R_n = \begin{cases} A_1 \dfrac{c^n - q^n}{c - q} & \text{falls } c \neq q, \\ A_1 n q^{n-1} & \text{falls } c = q. \end{cases}$$

Bei vollständiger Tilgung nach n Perioden ergibt sich

$$0=\begin{cases} K_0q^n - A_1\dfrac{c^n-q^n}{c-q} & \text{falls } c\neq q,\\[2ex] K_0q^n - A_1nq^{n-1} & \text{falls } c=q.\end{cases}\qquad A_1=\begin{cases} K_0q^n\dfrac{c-q}{c^n-q^n} & \text{falls } c\neq q,\\[2ex] K_0\dfrac{q}{n} & \text{falls } c=q.\end{cases}$$

b) Umstellen der Formel nach n: Bei $c = q$ ist $n = K_0q/A_1$.

Für c q ergibt sich

$$A_1(c^n-q^n)=K_0q^n(c-q)\Rightarrow A_1((\frac{c}{q})^n-1)=K_0(c-q)$$

$$(\frac{c}{q})^n=1+\frac{K_0}{A_1}(c-q)=\frac{A_1-K_0(c-q)}{A_1}\Rightarrow(\frac{q}{c})^n=\frac{A_1}{A_1-K_0(c-q)}.$$

$$n=\frac{\ln\left(\dfrac{A_1}{A_1-K_0(c-q)}\right)}{\ln(\dfrac{q}{c})}=\frac{\ln A_1-\ln(A_1-K_0(c-q))}{\ln q-\ln c}.$$

5.12 a) $a \underset{(5.38)}{=} 800\,€\dfrac{0{,}066}{1{,}066^{1/12}-1}=9.887{,}05\,€.$ Damit kann man jährlich rechnen.

b) $A \underset{(5.39)}{=} K_0q^n\dfrac{q^{1/m}-1}{q^n-1}$

$$\Rightarrow K_0=Aq^{-n}\frac{q^n-1}{q^{1/m}-1}=800\,€\cdot1{,}066^{-30}\,\frac{1{,}066^{30}-1}{1{,}066^{1/12}-1}=127.784{,}32\,€$$

Die Wohnung darf also 40.000 € + 127.784,32 € = 167.784,32 € kosten.

$$j_1 \underset{(5.23)}{=} \frac{T_1}{K_0}=\frac{9.887{,}05\,€-127.784{,}32\,€\cdot0{,}066}{127.784{,}32\,€}=1{,}1373\%\text{ p.a.}>1\,\%$$

c) $K_0 = 149.000\,€ - 40.000\,€ = 109.000\,€$

$$j_1 \underset{(5.23)}{=} \frac{T_1}{K_0}=\frac{9.887{,}05\,€-109.000\,€\cdot0{,}066}{127.784{,}32\,€}=2{,}4707\%,$$

$$n \underset{(5.18)}{=} \frac{\ln\dfrac{A}{A-K_0i}}{\ln q}=\frac{\ln\dfrac{9.887{,}05\,€}{9.887{,}05\,€-109.000\,€\cdot0{,}066}}{\ln1{,}066}=20{,}35\ \text{[Jahre]}$$

5.13 $A \underset{(5.39)}{=} K_0 q^n \dfrac{q^{1/m}-1}{q^n-1} = 12.000\,\$ \cdot 1{,}076^4 \dfrac{1{,}076^{1/12}-1}{1{,}076^4-1} = 289{,}29\,\$$

$K_{24/12} \underset{(5.37)}{=} 12.000\$ \cdot 1{,}076^{24/12} - 289{,}29\$ \dfrac{1{,}076^{24/12}-1}{1{,}076^{1/12}-1} = 6.438{,}72\$$

Tilgungsplan:

t	$K_{t\text{-}1}$	Z_t	T_t	A_t
1	12.000,00 \$	73,47 \$	215,82 \$	289,29 \$
2	11.784,18 \$	72,15 \$	217,14 \$	289,29 \$
…	…	…	…	…
24	6.687,07 \$	40,94 \$	248,35 \$	289,29 \$
25	**6.438,72 \$**	39,42 \$	249,87 \$	289,29 \$
…	…	…	…	…
48	287,53 \$	1,76 \$	\$287,53 \$	289,29 \$
49	0,00 \$			

6.1 $A \underset{(6.7)}{=} \dfrac{75.000\,€ - 5.000\,€}{5} = 14.000\,€$

$K_5 \underset{(6.8)}{=} 75.000\,€ - 3 \cdot 14.000\,€ = 33.000\,€$

$j_3 \underset{(6.9)}{=} \dfrac{14.000\,€}{75.000\,€ - 2 \cdot 14.000\,€} = 29{,}79\%$

Abschreibungsplan:

t	$K_{t\text{-}1}$	A_t	j_t
1	75.000 €	14.000 €	18,67 %
2	61.000 €	14.000 €	22,95 %
3	47.000 €	14.000 €	29,79 %
4	33.000 €	14.000 €	42,42 %
5	19.000 €	14.000 €	73,68 %
6	5.000 €		

6.2 Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\alpha - t}$ ist für $t < \alpha$ streng monoton wachsend und streng konvex. Genau von dieser Gestalt sind aber die Abschreibungssätze j_t, denn

$$j_t \underset{(6.9)}{=} \frac{A}{K_0 - (t-1)A} = \frac{A}{A + K_0 - tA} = \frac{1}{1 + \dfrac{K_0}{A} - t},$$

und $t \le n \underset{(6.7)}{=} \dfrac{K_0 - S}{A} < 1 + \dfrac{K_0}{A}$.

Daraus folgen Monotonie und Konvexität der Folge $(j_t)_{t=1,\dots,n}$.

Die Formel für j_1 wurde bereits in 6.2 angegeben und an gleicher Stelle findet man $j_n = \frac{A}{S+A} \underset{(6.7)}{=} \frac{\frac{1}{n}(K_0 - S)}{S + \frac{1}{n}(K_0 - S)} = \frac{K_0 - S}{K_0 - (1-n)S}$. $\rightleftharpoons$

6.3 a) $A \underset{(6.7)}{=} \frac{1{,}3\,\text{Mio.€} - 100.000\,€}{8} = 150.000\,€$

$\Rightarrow K_5 \underset{(6.8)}{=} 1{,}3\,\text{Mio.€} - 5 \cdot 150.000\,€ = 550.000\,€$

b) $K_{10} \underset{(6.11)}{=} K_0(1-c)^{10} \Rightarrow c = 1 - \sqrt[10]{\frac{K_{10}}{K_0}} = 1 - \sqrt[10]{\frac{100.000\,€}{1{,}5\,\text{Mio.€}}} = 27{,}43\%$

$\Rightarrow A_1 \underset{(6.12)}{=} 1{,}3\,\text{Mio.€} \cdot 0{,}2743 = 356.590{,}09\,€$

$\Rightarrow K_5 \underset{(6.11)}{=} 1{,}3\,\text{Mio.€} \cdot (1 - 0{,}2743) = 261.654{,}83\,€$

6.4 Geometrisch degressive Abschreibung:

$c \underset{(6.13)}{=} 1 - \sqrt[6]{400\,€/16.000\,€} = 45{,}926\% \Rightarrow A_1 \underset{(6.12)}{=} 16.000\,€ \cdot 0{,}45926 = 7.348{,}13\,€.$

Abschreibungsplan:

t	K_{t-1}	A_t	j_t
1	16.000,00 €	7.348,13 €	45,926%
2	8.651,87 €	3.973,44 €	45,926%
3	4.678,43 €	2.148,61 €	45,926%
4	2.529,82 €	1.161,84 €	45,926%
5	1.367,98 €	628,26 €	45,926%
6	739,72 €	339,72 €	45,926%
7	400,00 €		

Digitale Abschreibung:

$A_1 \underset{(6.21)}{=} 2\frac{16.000\,€ - 400\,€}{6+1} = 4.457{,}14\,€ \Rightarrow d \underset{(6.18)}{=} -\frac{4.457{,}14\,€}{6} = -742{,}86\,€$

Abschreibungsplan:

t	K_{t-1}	A_t	j_t
1	16.000,00 €	4.457,14 €	27,86%
2	11.542,86 €	3.714,29 €	32,18%
3	7.828,57 €	2.971,43 €	37,96%
4	4.857,14 €	2.228,57 €	45,88%
5	2.628,57 €	1.485,71 €	56,52%
6	1.142,86 €	742,86 €	65,00%
7	400,00 €		

Die Abschreibungsraten sind bei diesen Vorgaben ab dem 3.Jahr bei digitaler Abschreibung größer.

6.5 a) Arithmetisch-progressive Abschreibung:

$$n \underset{(6.24)}{=} \frac{1}{2} - \frac{40.000\,\$}{40.000\,\$} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{40.000\,\$}{40.000\,\$}\right)^2 + 2\frac{720.000\,\$}{40.000\,\$}} = 5{,}52$$

letzte

$$\text{Rate} = K_5 \underset{(6.23)}{=} 720.000\,\$ - 5 \cdot 40.000\,\$ - \frac{4 \cdot 5}{2} 40.000\,\$ = 120.000\,\$$$

Abschreibungsplan:

t	K_{t-1}	A_t
1	720.000,00 \$	40.000,00 \$
2	680.000,00 \$	80.000,00 \$
3	600.000,00 \$	120.000,00 \$
4	480.000,00 \$	160.000,00 \$
5	320.000,00 \$	200.000,00 \$
6	120.000,00 \$	120.000,00 \$

b) Verallgemeinerte geometrisch-progressive Abschreibung:

$$n \underset{(6.27)}{=} \frac{\ln\left(1 + 0{,}4\frac{720.000\,\$}{40.000\,\$}\right)}{\ln 1{,}04} = 6{,}25$$

$$\text{letzte Rate} = K_t \underset{(6.26)}{=} 720.000\,\$ - 40.000\,\$\,\frac{1{,}4^6 - 1}{0{,}4} = 67.046{,}40\,\$$$

Abschreibungsplan:

t	K_{t-1}	A_t
1	720.000,00 \$	40.000,00 \$
2	680.000,00 \$	56.000,00 \$
3	624.000,00 \$	78.400,00 \$
4	545.600,00 \$	109.760,00 \$
5	435.840,00 \$	153.664,00 \$
6	282.176,00 \$	215.129,60 \$
7	67.046,40 \$	67.046,40 \$

7.1 $$K_0 \underset{(3.7),\,(2.19)}{=} \frac{A}{1{,}063} + \frac{A}{1{,}063 \cdot 1{,}061} + \frac{A}{1{,}063 \cdot 1{,}061 \cdot 1{,}057} + \frac{A}{1{,}063 \cdot 1{,}061 \cdot 1{,}057 \cdot 1{,}062}$$

$$= 3{,}45608A$$

$$K_0^* \underset{(4.13)}{=} A \cdot 1{,}07^{-4}\,\frac{1{,}07^4 - 1}{0{,}07} = 3{,}38721A \Rightarrow C_0 = \frac{3{,}38721A}{3{,}45608A} = 98{,}0073\%$$

7.2 a) Die Behauptung ergibt sich sofort aus (7.14).
b) Es genügt ein Gegenbeispiel, etwa ein 2-Perioden-Modell mit $i_1 = 6{,}09\,\%$, $i_2 = 0$ bei Rendite $i^* = 3\%$.

$$q^2 = 1{,}0609 \cdot 1 = 1{,}0609 = 1{,}03^2 = (q^*)^2 \qquad C_0 \underset{(7.13)}{=} 1$$

7.3 Rendite $i^* \underset{(7.14)}{=} \dfrac{1{,}035}{\sqrt[8]{0{,}96}} = 4{,}0295\%$

Kurs bei $i^* = 4{,}9\%$: $C_0 \underset{(7.13)}{=} \left(\dfrac{1{,}035}{1{,}049}\right)^8 = 89{,}8088\%$

7.4 a) Mit Zinsansammlung: $C_0 \underset{(7.13)}{=} \left(\dfrac{1{,}05}{1{,}06}\right)^8 = 92{,}6974\%$

b) Ohne Zinsansammlung: $C_0 \underset{(7.19)}{=} \dfrac{1}{1{,}06^8}\left(\dfrac{0{,}05}{0{,}06}(1{,}06^8 - 1) + 1\right) = 93{,}7902\%$

7.5 Die Anleihe stellt eine Zinsschuld dar:

$$C_0 \underset{(7.19)}{=} \frac{1}{1{,}05^8}\left(\frac{0{,}064}{0{,}05}(1{,}05^8 - 1) + 1\right) = 104{,}9643\%.$$

also ist ein Disagiosatz von $a = 1 - C_0 = 4{,}9643\ \%$ erforderlich.

7.6 Umformen von (7.19) in eine polynomiale Gleichung in q^*:

$$C_0(q^*)^{n+1} - (C_0 + i)(q^*)^n - q^* + 1 + i = 0$$

Anwenden eines Iterationsverfahrens zur Bestimmung von q^* und damit i^*:

$i_{\mathrm{A}}^* = 6{,}7422\%$, $i_{\mathrm{B}}^* = 6{,}7496\%$, $i_{\mathrm{C}}^* = 6{,}6977\%$

B hat die größte Rendite.

7.7 $K_0^* \underset{(7.22)}{=} 26.000\,€\left(\dfrac{0{,}021}{0{,}018} + \dfrac{(0{,}018 - 0{,}021)(1{,}018^{12} - 1)}{12 \cdot 1{,}018^{12}\,0{,}018^2}\right) = 26.467{,}13\,€$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{26.467{,}13\,€}{26.000\,€} = 101{,}7967\%$$

7.8 $C_0 \underset{(7.28)}{=} \dfrac{0{,}05}{0{,}06}\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}06}\right)^{15} \dfrac{1{,}06^{15} - 1}{1{,}05^{15} - 1} = 93{,}57\% \qquad d = 1 - C_0 = 6{,}43\ \%$

7.9 a) $A \underset{(5.14)}{=} 350.000\,€ \cdot 1{,}068^n \dfrac{0{,}068}{1{,}068^{20}-1} = 32.525{,}74\,€$

b) Gesucht ist der Nominalzinssatz i, so dass $i^* = 6{,}8\,\%$ ist. Umformen der Kursformel (7.28) einer Annuitätenschuld ergibt

$$((q^*)^n - 1)q^{n+1} - ((q^*)^n - 1 + C_0 i^* (q^*)^n)q^n + C_0 i^* (q^*)^n = 0$$

$$(1{,}068^{20} - 1)q^{n+1} - (1{,}068^{20} - 1 + 0{,}9 \cdot 0{,}068 \cdot 1{,}068^{20})q^n + \ldots$$

$$\ldots + 0{,}9 \cdot 0{,}068 \cdot 1{,}068^{20} = 0$$

Iterationsverfahrens zur Bestimmung von q und damit i: $i = 5{,}494\,\%$

$$A \underset{(5.14)}{=} 0{,}9 \cdot 350.000\,€ \cdot 1{,}05494^n \frac{0{,}05494}{1{,}05494^{20}-1} = 29.273{,}16\,€$$

c) ohne Disagio:

$$K_{10} \underset{(5.15)}{=} 350.000\,€ \cdot 1{,}068^{10} - 32.525{,}74 \frac{1{,}068^{10}-1}{0{,}068} = 230.574{,}20\,€$$

mit Disagio:

$$K_{10} \underset{(5.15)}{=} 350.000\,€ \cdot 1{,}05494^{10} - 32.525{,}74 \frac{1{,}05494^{10}-1}{0{,}05494} = 220.713{,}77\,€.$$

Tilgungsplan ohne Disagio:

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	**350.000,00 €**	23.800,00 €	8.725,74 €	**32.525,74 €**
2	341.274,26 €	23.206,65 €	9.319,09 €	**32.525,74 €**
3	331.955,18 €	22.572,95 €	9.952,78 €	**32.525,74 €**
4	322.002,39 €	21.896,16 €	10.629,57 €	**32.525,74 €**
5	311.372,82 €	21.173,35 €	11.352,38 €	**32.525,74 €**
6	300.020,44 €	20.401,39 €	12.124,35 €	**32.525,74 €**
7	287.896,09 €	19.576,93 €	12.948,80 €	**32.525,74 €**
8	274.947,29 €	18.696,42 €	13.829,32 €	**32.525,74 €**
9	261.117,97 €	17.756,02 €	14.769,71 €	**32.525,74 €**
10	246.348,25 €	16.751,68 €	15.774,06 €	**32.525,74 €**
11	**230.574,20 €**	…	…	…

Tilgungsplan mit Disagio:

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	**350.000,00 €**	19.228,96 €	10.044,20 €	**29.273,16 €**
2	339.955,80 €	18.677,14 €	10.596,03 €	**29.273,16 €**
3	329.359,78 €	18.094,99 €	11.178,17 €	**29.273,16 €**
4	318.181,60 €	17.480,86 €	11.792,30 €	**29.273,16 €**
5	306.389,31 €	16.833,00 €	12.440,17 €	**29.273,16 €**
6	293.949,14 €	16.149,54 €	13.123,63 €	**29.273,16 €**
7	280.825,51 €	15.428,52 €	13.844,64 €	**29.273,16 €**

8	266.980,87 €	14.667,90 €	14.605,26 €	**29.273,16 €**
9	252.375,61 €	13.865,49 €	15.407,67 €	**29.273,16 €**
10	236.967,94 €	13.018,99 €	16.254,17 €	**29.273,16 €**
11	**220.713,77 €**	…	…	…

7.10 $C_0 \underset{(7.35)}{=} \dfrac{1}{1{,}05^4}\left(\dfrac{1{,}064^{1/12}-1}{1{,}05^{1/12}-1}(1{,}05^4-1)+1\right)=104{,}8256\%$

7.11 $C_0 \underset{(7.37)}{=} \left(\dfrac{1{,}05}{1{,}06}\right)^{15}\dfrac{1{,}06^{15}-1}{1{,}05^{15}-1}\cdot\dfrac{1{,}05^{1/4}-1}{1{,}06^{1/4}-1}=93{,}9069\% \Rightarrow d=1-C_0=6{,}0931\%$

7.12 a) $A \underset{(5.39)}{=} 220.000\,€\cdot 1{,}079^5\,\dfrac{1{,}079^{1/12}-1}{1{,}079^5-1}=4.421{,}70\,€$

b) Es handelt sich um eine Annuitätenschuld mit unterjährlichen Zahlungen und Kurs $C_0 = 1 - d = 99{,}5\,\%$. Man schreibe (7.37) als polynomiale Gleichung in $(q^*)^{1/m}$:

$$C_0(q^n-1)(q^*)^{n+1/m}-(C_0(q^n-1)+q^n(q^{1/m}-1))(q^*)^n+q^n(q^{1/m}-1)=0$$

Mittels eines Iterationsverfahrens erhält man

$q^* = 1{,}081273 \qquad i^* = 8{,}1273\,\%$