

FEHLERBETRACHTUNG

Literatur : Schenk/Kremer (Hrsg.): Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)
ISBN: 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)

1 Messfehler

1.1 Fehlerarten

- **Grobe Fehler** : Fehler durch Irrtümer, z. B. Falschablesungen, Verwendung der falschen Maßeinheit o.ä.
- **Systematische Fehler** : Fehler z. B. durch falsch kalibrierte Messinstrumente oder in Folge Beeinflussung des Messobjektes durch das Messgerät
Merkmal : Systematische Fehler treten bei Wiederholungen der Messung stets gleichsinnig auf. Sie sind grundsätzlich erfassbar. Im Einzelfall treten sie entweder als erfasste systematische Fehler oder als nicht erfasste systematische Fehler in den Überlegungen auf.
- **Zufällige Fehler** : Subjektive Fehler z. B. durch Parallaxe oder objektive Fehler z. B. durch Spannungsschwankungen
Merkmal : Zufällige Fehler unterliegen statistischen Gesetzen und sie schwanken regellos nach Vorzeichen und Größe. Sie können lediglich abgeschätzt werden.

Die Definition eines sogenannten "wahren" Fehlers e_v als Differenz $e_v = x_v - x_{\text{mes}}$ aus "wahrem" Wert x_v und Messwert x_{mes} ist nur von prinzipieller Bedeutung und natürlich zur Bestimmung eines Fehlers nicht geeignet.

1.2 Berücksichtigung der Fehler

Ziel des Messens ist die Angabe eines **Näherungswertes (Bestwertes)** x für x_v und einer **Messunsicherheit** $\Delta x > 0$ (Größtfehler), die (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) eine obere Schranke für $|e_v|$ bildet.

Der Näherungswert x kann ggf. Korrekturen enthalten.

Für eine **Korrektur** finden (erkannte) grobe Fehler und erfasste systematische Fehler Verwendung.

Beispiel 1 :	Längenmessung	
	Skalenwert: 1 mm/Skt	(scheinbar)
	Ablesung: 226 Skt	(falsch)
Falsches Ergebnis:	$l = 226 \text{ Skt} \cdot 1 \text{ mm/Skt} = 226 \text{ mm}$	
Überprüfung:	Skalenwert: 0,997 mm/Skt	(erfasster system. Fehler)
	Ablesung: 236 Skt	(erkannter grober Fehler)
korrigiertes Ergebnis:	$l = 236 \text{ Skt} \cdot 0,997 \text{ mm/Skt} = 235,3 \text{ mm}$	

Nachfolgend wird davon ausgegangen, dass die als Messergebnisse gewonnenen Näherungswerte bereits bzgl. erkannter grober Fehler korrigiert sind, und somit keine (erkennbaren) groben Fehler aufweisen.

Zur Angabe der **Messunsicherheit** werden nicht erfasste systematische Fehler und zufällige Fehler herangezogen (siehe nachfolgende Abschnitte).

Sind x und Δx bekannt bzw. ermittelt, dann kann das **Messergebnis** als

$$x \pm \Delta x \quad (\text{mit Angabe des absoluten Fehlers } \Delta x)$$

oder

$$x \left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x|}\right) \quad (\text{mit Angabe des relativen Fehlers } \frac{\Delta x}{|x|})$$

formuliert werden.

Dies bedeutet, dass der "wahre" Wert x_v (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) im Intervall

$$[x - \Delta x, x + \Delta x]$$

zu finden ist.

Beispiele für die Angabe des Messergebnisses:

a) mit Angabe des absoluten Fehlers

$$l = 203 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$$

$$l = (203 \pm 2) \text{ mm}$$

b) mit Angabe des relativen Fehlers

$$l = 203 \text{ mm} (1 \pm 0,010)$$

$$l = 203 \text{ mm} \pm 1,0 \%$$

$$(\text{NR: } \frac{2 \text{ mm}}{203 \text{ mm}} = 0,00985 \approx 0,010 \hat{=} 1,0 \%)$$

2 Unmittelbare Messgrößen

2.1 Näherungswerte x

- Einzelmessung $x = x_{\text{mes}}$
- Messreihe (Umfang n) $x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (arithmetisches Mittel)
(Auch andere Mittelwerte werden in begründeten Fällen verwendet.)

2.2 Messunsicherheit (Größtfehler) Δx

- $\Delta x = \Delta x_s + \Delta x_f$ mit
 Δx_s : nicht erfasster systematischer Fehler
 Δx_f : zufälliger Fehler
- Einzelmessung : $\Delta x_f = \frac{1}{2}$ Skalenwert pro Ablesung
- Messreihe ($n < 10$) : $\Delta x_f = \frac{1}{2} \cdot \text{Spannweite der Messreihe}$ mit Spannweite = $x_{\text{max}} - x_{\text{min}}$
- Messreihe ($n \geq 10$) : $\Delta x_f = 2 \bar{s}$ mit

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

\bar{s} : mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwerts
(oder Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts)

Die Grenze $n = 10$ zur Unterscheidung zwischen "kleiner" und "großer" Messreihe ist eine allgemein übliche Festlegung.

Beispiel 2 : Einzelmessung mit Stahllineal (Teilung in mm)

Messwert : $l = 513 \text{ mm}$

Messfehler : $\Delta l = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{ Skalenwert} = 2 \cdot 0,5 \text{ mm} = 1 \text{ mm}$

Also : $l = (513 \pm 1) \text{ mm}$ oder $l = 513 \text{ mm} (1 \pm 0,002)$

Beispiel 3 : Einzelablesung auf Analog-Voltmeter

Messbereich : 300 V

Skalenwert : 10 V Ablesung : 230 V

Klasse 1,0

$$\Delta U_s = 1,0 \% \cdot 300 \text{ V} = 3 \text{ V}$$

$$\Delta U_f = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ V} = 5 \text{ V} \quad , \quad \Delta U = \Delta U_s + \Delta U_f = 8 \text{ V}$$

Also : $U = (230 \pm 8) \text{ V}$ oder $U = 230 \text{ V} (1 \pm 0,04)$

Beispiel 4 : Einzelablesung am Digitalvoltmeter

Messbereich 20 V
Auflösung 0,01 V
Messwert 17,86 V

Fehlerangaben zum Gerät :

nicht erfasster system. Fehler : $\Delta U_s = 0,8 \%$ des Messwertes

zufälliger Fehler der Anzeige : $\Delta U_f = 2$ digit

$$\Delta U_s = 0,008 \cdot 17,86 \text{ V} = 0,1429 \text{ V} \approx 0,15 \text{ V}$$

$$\Delta U_f = 2 \cdot 0,01 \text{ V} = 0,02 \text{ V}$$

$$\Delta U = \Delta U_s + \Delta U_f = (0,15 + 0,02) \text{ V} = 0,17 \text{ V}$$

Also : $U = (17,86 \pm 0,17) \text{ V}$, $\frac{\Delta U}{U} = 1 \%$

Beispiel 5 : Messreihen

Eine Zeit T wird zunächst 5 mal und dann noch 5 mal
(ohne grobe und systematische Fehler) gemessen.

Man erhält die Messreihe:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i / s	56,3	56,1	56,0	56,5	56,2	56,4	56,2	56,0	56,1	56,5

Welche Messergebnisse erhält man

- bei Verwendung nur der ersten 5 Werte
- aller 10 Werte ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } T &= \bar{T} \pm \frac{1}{2} (T_{\max} - T_{\min}) = (56,2 \pm 0,3) \text{ s} \\ &= 56,2 \text{ s } (1 \pm 0,005) \\ \text{b) } T &= \bar{T} \pm 2 \bar{s} = (56,23 \pm 0,12) \text{ s} \\ &= 56,23 \text{ s } (1 \pm 0,003) \end{aligned}$$

Lösungsweg zu Beispiel 5

a) 5 Werte

i	T_i / s	T_{\min} / s	T_{\max} / s
1	56,3		
2	56,1		
3	56,0	56,0	
4	56,5		56,5
5	56,2		
Σ	281,1	$T_{\max} - T_{\min} = 0,5$	

$$\bar{T} = \frac{281,1 s}{5} = 56,22 s$$

$$\frac{1}{2} (T_{\max} - T_{\min}) = 0,25 s \approx 0,3 s$$

$$\frac{\Delta T}{T} = 0,00445 \approx 0,005$$

Ergebnis :

$$T = (56,2 \pm 0,3) s$$

$$T = 56,2 s (1 \pm 0,005)$$

b) 10 Werte

i	T_i / s	$(T_i - \bar{T}') / s$	$(T_i - \bar{T}')^2 / 10^{-4} s^2$
1	56,3	+ 0,07	49
2	56,1	- 0,13	169
3	56,0	- 0,23	529
4	56,5	+ 0,27	729
5	56,2	- 0,03	9
6	56,4	+ 0,17	289
7	56,2	- 0,03	9
8	56,0	- 0,23	529
9	56,1	- 0,13	169
10	56,5	+ 0,27	729
Σ	562,3	+ 0,78 - 0,78 0	3210

$$\bar{T}' = \frac{562,3 s}{10} = 56,23 s$$

$$\Delta T = 2\bar{s} = 0,1194 s \approx 0,12 s$$

$$T = (56,23 \pm 0,12) s$$

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{0,321 s^2}{90}} = 0,0597 s$$

$$\frac{\Delta T}{T} = 0,0022 \approx 0,003 \quad (\text{bzw. } 0,3 \%)$$

$$T = 56,23 s (1 \pm 0,003)$$

Hinweis: Zum sinnvollen Runden von Mittelwert und Fehler - siehe Pkt. 4 !!!

Beispiel 6: Taschenrechner liefern meist

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} .$$

Ein Test mit $n = 3$ und $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ zeigt übersichtlich, welches Streuungsmaß σ_n oder σ_{n-1} der jeweilige Taschenrechner (unter einer ggf. der Bedienungsanleitung zu entnehmenden weil mitunter "Taschenrechner-spezifischen" Bezeichnung) ausgibt :

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3}(1+0+1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,817$$

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+0+1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{benötigt wird : } \bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1+0+1}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577$$

$$\text{Umrechnung : } \bar{s} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,817}{\sqrt{2}} = 0,577 \quad \text{oder} \quad \bar{s} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

3 Mittelbare Größen

Eine Größe $y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ist aus unmittelbaren Messgrößen $x_i \pm \Delta x_i$ zu bestimmen.

3.1 Näherungswert y

Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Näherungswerte x_i : $y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

3.2 Messunsicherheit (Größtfehler) Δy

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad \text{"Totales Differential" mit } \frac{\partial y}{\partial x_i} : \text{ Partielle Ableitung von } y \text{ nach } x_i$$

Beispiel 7 : Partielle Ableitungen

Aufgabe: Man bilde zu $z = x^2 \sqrt{y-1}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$!

Lösung:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \sqrt{y-1}) = 2x \sqrt{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \sqrt{y-1}) = x^2 \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{x^2}{2\sqrt{y-1}}$$

Beispiel 8: "Totales Differential"

An einer belasteten Spannungsquelle misst man

$U_0 = (5,00 \pm 0,01) \text{ V}$, $U_K = (4,80 \pm 0,01) \text{ V}$ und $R_a = (10,0 \pm 0,1) \Omega$. Zu berechnen ist der

Innenwiderstand $R_i = \frac{R_a(U_0 - U_K)}{U_K}$. Wie lautet das Messergebnis?

Näherungswert: $R_i = \frac{10 \Omega \cdot 0,2 \text{ V}}{4,8 \text{ V}} = 0,4167 \Omega$

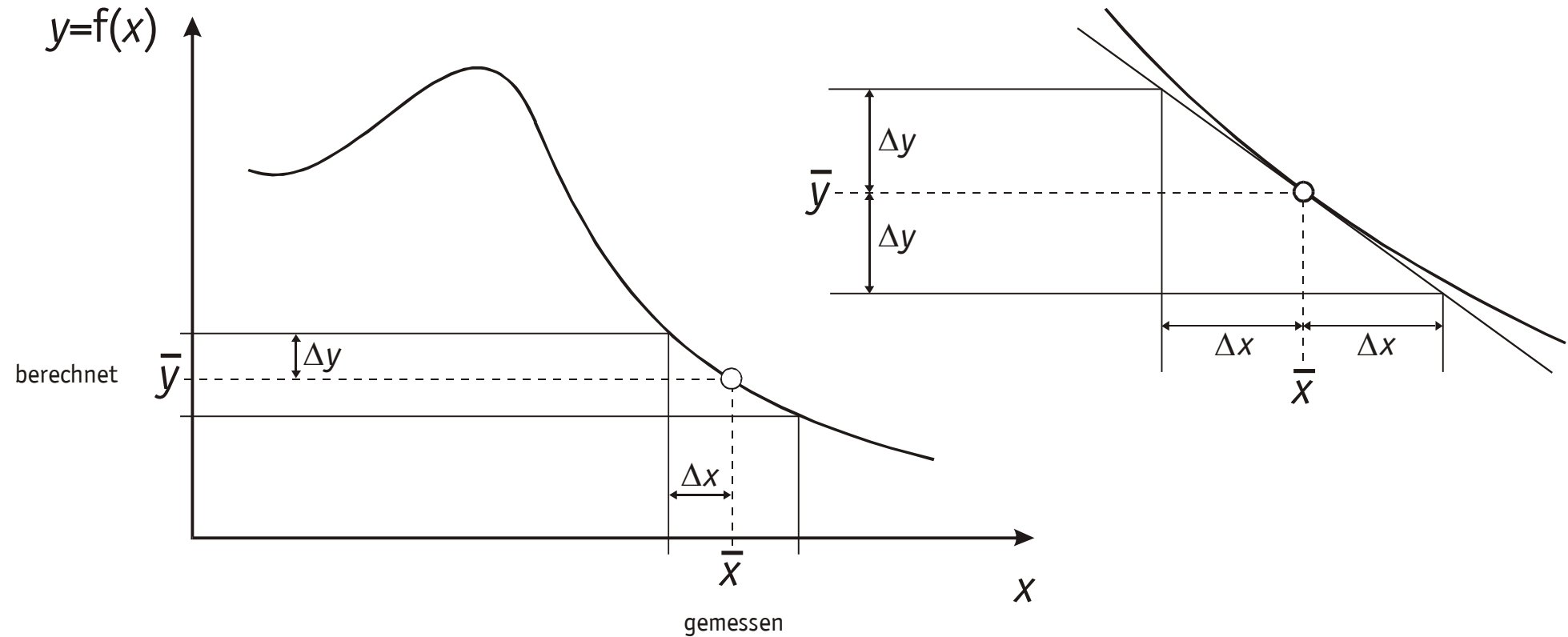
Messunsicherheit: $\Delta R_i = \left| \frac{\partial R_i}{\partial R_a} \right| \Delta R_a + \left| \frac{\partial R_i}{\partial U_0} \right| \Delta U_0 + \left| \frac{\partial R_i}{\partial U_K} \right| \Delta U_K$

$$\Delta R_i = \left| \frac{U_0 - U_K}{U_K} \right| \Delta R_a + \left| \frac{R_a}{U_K} \right| \Delta U_0 + \left| -\frac{R_a U_0}{U_K^2} \right| \Delta U_K$$

$$\Delta R_i = \frac{0,2 \text{ V}}{4,8 \text{ V}} \cdot 0,1 \Omega + \frac{10 \Omega}{4,8 \text{ V}} \cdot 0,01 \text{ V} + \frac{10 \Omega \cdot 5 \text{ V}}{4,8^2 \text{ V}^2} \cdot 0,01 \text{ V} = (0,0042 + 0,0208 + 0,0217) \Omega = 0,0467 \Omega \approx 0,05 \Omega$$

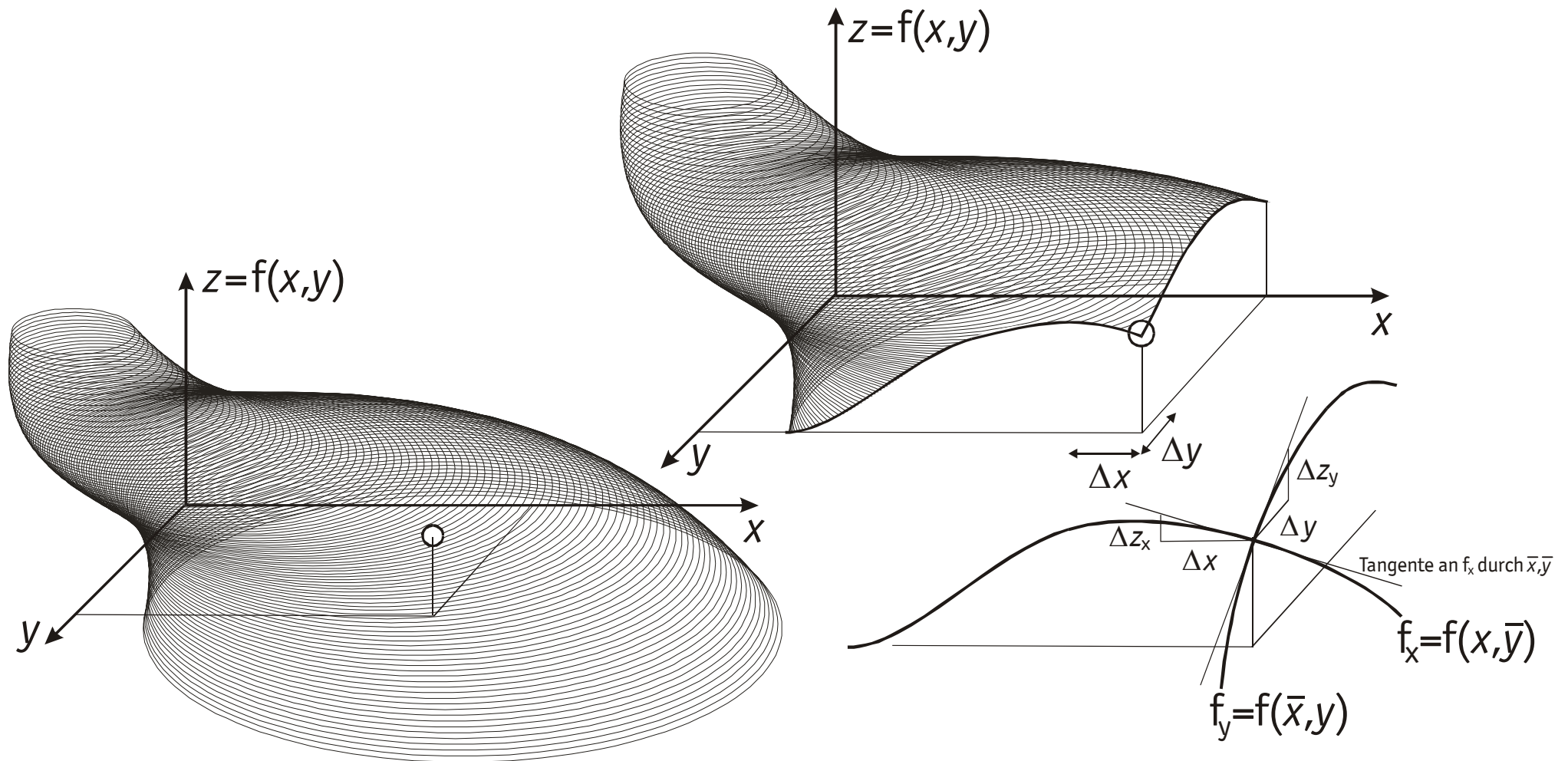
Messergebnis: $R_i = (0,42 \pm 0,05) \Omega = 0,42 \Omega (1 \pm 0,12)$

Mittelbarer Fehler einer Funktion mit einer Variablen



$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x$$

Mittelbarer Fehler einer Funktion mit zwei Variablen



$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y$$

Studenten ohne stark ausgeprägte Neigung zur Infinitesimalrechnung sollten sich einige Formeln merken :

Zwei Messgrößen : $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$

Summe : $z = x + y$, $\Delta z = \Delta x + \Delta y$

Differenz : $z = x - y$, $\Delta z = \Delta x + \Delta y$

Produkt : $z = x \cdot y$, $\Delta z = y \Delta x + x \Delta y$

Kehrwert : $z = \frac{1}{x}$, $\Delta z = \frac{\Delta x}{x^2}$

Quotient : $z = \frac{x}{y}$, $\Delta z = \frac{\Delta x}{y} + \frac{x \Delta y}{y^2}$

Beweis (Beispiel Produkt) $z = x \cdot y$

1) Totales Differential

$$\Delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y = y \Delta x + x \Delta y$$

2) elementar

$$\begin{aligned} (x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y) &= xy \pm (y \Delta x + x \Delta y) \pm \cancel{\Delta x \Delta y} \\ &= z \pm \Delta z \end{aligned}$$

3.3 Potenzprodukte

Häufig liegt y als sogenanntes Potenzprodukt der unmittelbaren Messgrößen x_i vor :

$$y = \text{const.} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad , \quad \alpha_i \text{ reell}$$

In diesem Fall findet man den relativen Größtfehler sofort als :

$$\frac{\Delta y}{|y|} = |\alpha_1| \cdot \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + |\alpha_2| \cdot \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \dots + |\alpha_n| \cdot \frac{\Delta x_n}{|x_n|} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{|x_i|}$$

Dieses Verfahren ist (soweit anwendbar) dem "Totalen Differential" vorzuziehen.

Hinweis : Soweit die Größen y , x_1 , x_2 , ... x_n jeweils positiv sind, können in der obigen Fehlerformel die Betragsstriche in den Nennern der Brüche (und nur dort !!!) entfallen. Jeder einzelne Summand der Fehlerformel muss stets positiv sein !

Durch geeignete Substitutionen kann eine Umformung in ein Potenzprodukt oft erreicht werden, auch wenn zunächst kein solches vorgelegen hat.

Bedingung : Unabhängigkeit der substituierten Ausdrücke !

Beispiel 9 : Potenzprodukt

Eine Zeitkonstante $\tau = RC$ wird mit (147 ± 2) ms gemessen. Der Widerstand hat den Wert $R = (8,2 \pm 0,1)$ k Ω . Welches Messergebnis erhält man für die Kapazität C ?

Näherungswert:
$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{147 \text{ ms}}{8,2 \text{ k}\Omega} = \frac{0,147 \text{ s}}{8,2 \cdot 10^3 \text{ }\Omega} = 17,93 \text{ }\mu\text{F}$$

Messunsicherheit: $C = \tau^1 \cdot R^{-1}$ (Potenzprodukt)

$$\frac{\Delta C}{C} = \left|1\right| \frac{\Delta \tau}{\tau} + \left|-1\right| \frac{\Delta R}{R} = \frac{2}{147} + \frac{0,1}{8,2} = 0,0136 + 0,0122$$

$$\frac{\Delta C}{C} = 0,0258 \approx 0,03 \text{ (bzw. 3 \%)}$$

$$\Delta C = 0,0258 \cdot C = 0,0258 \cdot 17,93 \text{ }\mu\text{F} = 0,463 \text{ }\mu\text{F} \approx 0,5 \text{ }\mu\text{F}$$

Messergebnis: $C = (17,9 \pm 0,5) \text{ }\mu\text{F} = 17,9 \text{ }\mu\text{F} (1 \pm 0,03)$

Beispiel 10 : Umformung in ein Potenzprodukt

Die Gleichung $z = \frac{\sqrt{a+b}}{(c-d)^2}$ ist kein Potenzprodukt der positiven Variablen a, b, c, d .

Man substituiert $A = a + b$ und $C = |c - d|$ und erhält das Potenzprodukt $z = A^{\frac{1}{2}} \cdot C^{-2}$.

Damit wird

$$\frac{\Delta z}{z} = \left| \frac{1}{2} \right| \cdot \frac{\Delta A}{A} + \left| -2 \right| \cdot \frac{\Delta C}{C}$$

und mit

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial A}{\partial b} \right| \Delta b = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial c} \right| \Delta c + \left| \frac{\partial C}{\partial d} \right| \Delta d = \Delta c + \Delta d$$

folgt

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} + 2 \frac{\Delta c + \Delta d}{c - d}$$

4 Runden

Messwerte sind stets so genau anzugeben, wie es die zugehörige Messunsicherheit zulässt.

4.1 Runden des Fehlers

Der **Größtfehler** (als obere Schranke für den "wahren" Fehler e_v)

ist stets zur sicheren Seite, also **immer aufzurunden**.

Die **Rundung** sowohl **von** absoluten wie auch von relativen **Fehlerangaben** erfolgt **generell auf eine Ziffer**.

Nur in dem Ausnahmefall, wenn die Ziffernfolge des anzugebenden (absoluten oder relativen) Fehlers mit einer "1" beginnt, ist es zulässig, diese Fehlerangabe auf zwei Ziffern zu runden.

Beispiel 11 : Runden des Fehlers

	berechnet	→	gerundet
• auf <u>eine</u> Ziffer:	0,381	→	0, <u>4</u>
	0,0835	→	0, <u>09</u>
	6,04	→	<u>7</u>
	82,1	→	<u>9</u> · 10 ¹ oder auch 90 (Die Null am Ende ist hier nicht signifikant !)
• auf <u>zwei</u> Ziffern:	1,03	→	<u>1,1</u>
	0,0924	→	0, <u>10</u>
	0,00162	→	0,00 <u>17</u>
	935	→	<u>1,0</u> · 10 ³ oder auch 1000 (Die letzten beiden Nullen sind hier nicht signifikant !)

4.2 Runden des Näherungswertes

Der **Näherungswert** (z. B. Messwert oder Berechnungsergebnis) **wird auf die letzte Stelle des** zugehörigen gerundeten **Fehlers** auf- oder **abgerundet**.

Beispiel 12 : Runden des Näherungswertes

ungerundet : Wert: 12,9446
 Fehler: 0,0147

richtig

falsch

12,945 ± 0,015	12,944 <u>6</u> ± 0,014 <u>7</u>	zuviel Stellen
	12,94 <u>5</u> ± 0,02	" "
	12,9 <u> </u> ± 0,02	zuwenig Stellen
	12,94 <u> </u> ± 0,015	" "

Versuchsergebnisse sind stets sinnvoll gerundet anzugeben !

Dazu immer die folgende Bearbeitungsreihenfolge einhalten:

- 1) Fehler runden (dabei stets aufrunden - siehe Pkt. 4.1)
- 2) Anzahl der Nachkommastellen des gerundeten Fehlers ermitteln (also abzählen)
- 3) Mess- bzw. Rechenergebnis auf die zu 2) ermittelte Anzahl von Nachkommastellen runden

5 Aussage des Messfehlers

Erst die Kenntnis der Messunsicherheit erlaubt Aussagen über :

5.1 Genauigkeit

Ergebnis A : $F = (11,23 \pm 0,02) \text{ N}$

Ergebnis B : $F = (11,230 \pm 0,002) \text{ N}$

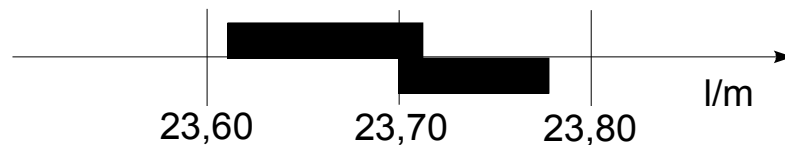
d. h. Ergebnis B ist zehnmal genauer als Ergebnis A

5.2 Vergleichbarkeit

Ergebnisse sind vereinbar miteinander, wenn ihre Fehlerintervalle keinen leeren Durchschnitt aufweisen (sondern überlappen).

- **vereinbar :**

$(23,66 \pm 0,05) \text{ m}$ und $(23,74 \pm 0,04) \text{ m}$



- **nicht vereinbar :**

$(44,22 \pm 0,03) \text{ V}$ und $(44,29 \pm 0,02) \text{ V}$

In einem solchen Fall liegt ein Hinweis auf grobe und/oder nicht erfasste systematische Fehler vor !

5.3 Verbesserung der Genauigkeit

Eine sinnvolle Verbesserung der Messgenauigkeit muss immer bei der Einflussgröße beginnen, die den größten Fehler verursacht.

Ist z. B. $\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = 0,05 + 0,005 = 0,055 \approx 0,06$, so bewirkt eine (möglicherweise beliebig teure)

Verbesserung der Messgenauigkeit von y kein Absinken des Fehlers $\frac{\Delta z}{z}$ unter 5 % !

6 Lineare Ausgleichsrechnung (fakultativ)

Zwischen zwei Größen x und y bestehe ein linearer Zusammenhang der Form

$$y = B x .$$

Überprüft man den Zusammenhang experimentell, so liegen die n Messpunkte infolge der Messfehler natürlich nicht streng auf einer Nullpunktsgerade, sondern streuen um sie. Beim Zeichnen der Geraden (und damit der Anstiegsbestimmung) wird man daher zunächst einmal dem Augenmaß vertrauen.

Das mag geringeren Ansprüchen genügen, für höhere ist ein mathematisch begründetes Verfahren anzuwenden - die Ausgleichsrechnung. Nach der GAUßschen Methode der "kleinsten Quadrate" ist derjenige Anstieg \bar{B} der wahrscheinlichste, der die Summe

$$\sum_{k=1}^n (y_k - B x_k)^2$$

der Quadrate der Differenzen aus Messwerten y_k und Funktionswerten $B x_k$ der Geraden zum Minimum macht.

Um \bar{B} zu finden, setzt man die Ableitung der Summe nach B gleich Null

$$-2 \sum_{k=1}^n (y_k - B x_k) x_k = 0$$

und erhält daraus

$$\bar{B} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \frac{\overline{y x}}{\overline{x^2}},$$

wobei die überstrichenen Größen rechts arithmetische Mittel sind.

Die Zuverlässigkeit von \bar{B} wird um so größer sein, je enger sich die Messwerte y_k der Geraden annähern.

Im Mittel weicht jeder Messwert um die Standardabweichung

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{B} x_k)^2}$$

von der Geraden ab.

Gemäß

$$s_{\bar{B}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial y_k} \right)^2 \cdot s_y^2}$$

pflanzt sich diese Abweichung fort und man erhält

$$s_{\bar{B}} = s_y \cdot \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2} = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}$$

als (wahrscheinlichen) Fehler von \bar{B} . (Siehe dazu auch das Beispiel 13.)

Bei einem linearen Zusammenhang der Form

$$y = A + Bx$$

ist im Prinzip so zu verfahren wie oben, jedoch erhält man andere Formeln für die wahrscheinlichsten Werte von \bar{A} und \bar{B} . Diese nebst ihrer Herleitung findet man in der eingangs angegebenen Literatur.

Abschließend sei darauf verwiesen, dass die Ausgleichsrechnung auch bei nichtlinearen Zusammenhängen angewendet werden kann.

Beispiel 13 : Lineare Ausgleichsrechnung

Mit $n = 7$ Messpunkten x_k, y_k (in der Tabelle eingerahmt) wird der Zusammenhang $y = B \cdot x$ überprüft. Man berechne den wahrscheinlichsten Anstieg \bar{B} . Ausgehend von x_k und y_k berechnet man x_k^2 und $x_k \cdot y_k$ (vgl. Tabelle) und aus den betreffenden Mittelwerten zunächst

$$\bar{B} = \frac{\overline{yx}}{\overline{x^2}} = \frac{652,43}{32,43} = 20,12$$

Sodann werden die Funktionswerte $\bar{B} \cdot x_k$ der Ausgleichsgeraden, ihre Differenzen zu den Messwerten y_k und deren Quadrate berechnet (vgl. Tabelle).

k	x_k^2	x_k	$x_k y_k$	y_k	$\bar{B} \cdot x_k$	$y_k - \bar{B} \cdot x_k$	$(y_k - \bar{B} \cdot x_k)^2$
1	1	1	21	21	20,12	0,88	0,774
2	4	2	76	38	40,24	-2,24	5,018
3	16	4	328	82	80,48	1,52	2,310
4	25	5	520	104	100,60	3,40	11,560
5	36	6	708	118	120,72	-2,72	7,398
6	64	8	1240	155	160,96	-5,96	35,522
7	81	9	1674	186	181,08	4,92	24,206
Summe	227		4567				86,788
arith. Mittel	32,43		652,43				

Die Summe der Abstandsquadrate bestimmt die Standardabweichung

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{B} x_k)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} 86,788} = 3,803$$

und daraus folgt für den Fehler des Anstiegs :

$$s_{\bar{B}} = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} = \frac{3,803}{\sqrt{227}} = 0,252 \approx 0,3 \text{ .}$$

Mithin lautet das Ergebnis :

$$\bar{B} = (20,1 \pm 0,3) \text{ , } \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} = \frac{0,252}{20,12} = 0,0125 \approx 0,013 \text{ (bzw. 1,3 \%)} \text{ .}$$