

Versuchsanleitung M 2 : Dichte / Flüssigkeiten

1. Einleitung

Die Massendichte (kurz Dichte) $\rho = dm/dV$ kennzeichnet die Verteilung der Masse m im Volumen V . Im allgemeinen ist, z.B. infolge lokaler Temperatur- und Druckunterschiede, die Masse nicht gleichmäßig über das Volumen verteilt. Die Dichte hängt folglich vom Ort \vec{r} ab. Bei homogenen Stoffen hängt die Dichte nicht vom Ort ab und kann als Quotient $\rho = m/V$ angegeben werden.

Die Dichte eines Stoffes wird oft zu seiner Identifizierung herangezogen. Die Kenntnis der Dichte ist oft zur Berechnung anderer physikalischer Größen wie der Masse, der Wärmekapazität, des Schweredruckes, der Auftriebskraft u.a. erforderlich.

Die Abhängigkeit der Auftriebskraft von der Dichte wird im vorliegenden Versuch zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten (und auch Festkörpern) mit der Mohr-Westphalschen Waage genutzt.

2. Grundlagen

Wir betrachten eine ruhende inkompressible (d.h. nicht zusammendrückbare) Flüssigkeit im Erdschwerefeld. An der Flüssigkeitsoberfläche herrsche der Druck p_K (Kolbendruck, z.B. durch einen auf die Flüssigkeit drückenden Kolben oder durch die über der Flüssigkeit befindliche Gasatmosphäre ausgeübt). In der Eintauchtiefe h im Inneren der Flüssigkeit findet man den größeren Druck

$$p = p_K + p_S = p_K + \rho g h \quad . \quad (2 - 1)$$

Zum Kolbendruck p_K kommt hier noch der sogenannte Schweredruck $p_S = \rho g h$ hinzu, dessen Ursache das Gewicht der auf dem betrachteten Niveau lastenden Flüssigkeitssäule ist. Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit.

Der Betrag der Auftriebskraft ist nach dem Prinzip von Archimedes dem Gewicht des verdrängten Flüssigkeitsvolumens V' gleich. Es gilt

$$F_A = \rho g V' \quad . \quad (2 - 2)$$

Zu Gleichung (2 - 2) gelangt man durch folgende Überlegung:

Im Inneren der Flüssigkeit befinde sich ein (zunächst auch von der Flüssigkeit ausgefülltes) Volumen V' . Es steht mit der umgebenden Flüssigkeit im Gleichgewicht. Das Gewicht $\vec{G} = \vec{g} V' \rho$ des betrachteten Volumens V' wird also offenbar durch die Resultierende \vec{R}' aller von der umgebenden Flüssigkeit auf die Oberfläche von V' ausgeübten Druckkräfte kompensiert ($\vec{R}' + \vec{G} = 0$).

Füllt nun das Volumen V' anstelle der Flüssigkeit irgendein eingetauchter Körper aus, so ändert das nichts an den Druckverhältnissen der umgebenden Flüssigkeit. Der Tauchkörper erfährt auch die Kraft \vec{R}' , die man als Auftriebskraft $\vec{F}_A = -\rho \vec{g} V'$ bezeichnet. Sie greift im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit am Tauchkörper an.

Das Volumen und folglich auch die Dichte ρ ändern sich mit Druck und Temperatur. Eine Druckänderung Δp bewirkt bei konstanter Temperatur T die relative Dichteänderung

$$(\Delta\rho/\rho)_T = \kappa \Delta p \quad (2 - 3)$$

und eine Temperaturänderung ΔT bei konstantem Druck p die relative Dichteänderung

$$(\Delta\rho/\rho)_p = -\gamma \Delta T \quad . \quad (2 - 4)$$

In (2 - 3) und (2 - 4) treten die stoffspezifischen Größen κ (isotherme Kompressibilität) und γ (kubischer Ausdehnungskoeffizient) auf.

Eine Abschätzung für Wasser ($\kappa = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$; $\gamma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$) ergibt nach (2 - 4) mit $\Delta p = 10 \text{ kPa}$ (ca. 1 m Wassersäule) lediglich die vernachlässigbare Dichteänderung $\Delta \rho / \rho \approx 5 \cdot 10^{-6}$. Nach (2 - 5) erhält man aber schon mit $\Delta T = 1 \text{ K}$ die (bei genaueren Dichtemessungen) nicht mehr vernachlässigbare relative Dichteänderung $\Delta \rho / \rho = -2 \cdot 10^{-4}$.

Zu Dichtemesswerten ist daher stets die Messtemperatur anzugeben.

3. Versuchsanordnung

Die Mohr-Westphalsche Waage ist eine ungleicharmige Hebelwaage (siehe Bild 1).

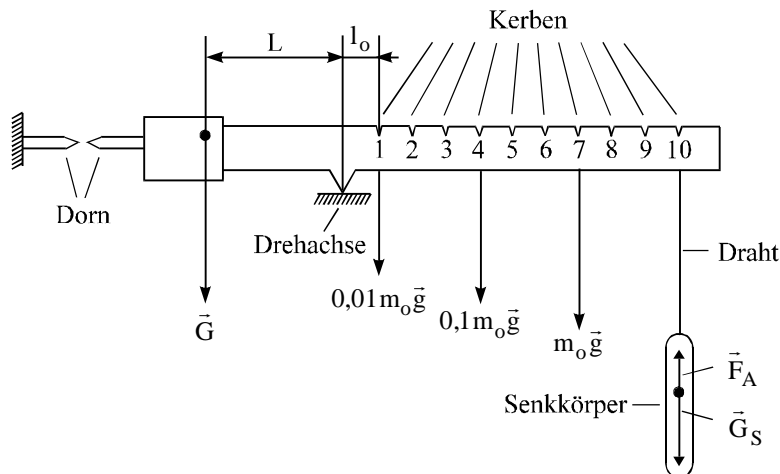


Bild 1 Mohr-Westphalsche Waage

Ein Arm trägt an einem Draht den Senkkörper (Masse m_s , Volumen V_S) , der vollständig einzutauchen ist. In die in gleichmäßigen Abständen l_o angebrachten Kerben werden Reiter (Wägestücke) gesetzt, um die Waage abzugleichen.

Der starre Körper "Waagebalken" befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte als auch die Summe aller an ihm angreifenden Drehmomente Null werden.

Befindet sich die Waage in Luft, so wirken an ihr die Kräfte:

- Gewicht des Senkkörpers ($\vec{G}_S = m_s \vec{g}$)
- Luftauftrieb des Senkkörpers ($\vec{F}_A = -V_S \rho_L \vec{g}$)
- Gewicht des Drahtes ($\vec{G}_D = m_D \vec{g}$)
- Luftauftrieb des Drahtes ($\vec{F}_{AD} = -V_D \rho_L \vec{g}$)

sowie die Gewichte des Waagebalkens und der Ausgleichsmasse und deren Luftauftriebe, die im "Gegengewicht" \vec{G} im Abstand L vom Drehpunkt zusammengefasst werden.

Die Drehmomentengleichung lautet also

$$G L = 10 l_o g \left[m_s + m_D - \rho_L (V_S + V_D) \right] . \quad (3 - 1)$$

Taucht man jetzt den Senkkörper völlig, den Draht zu $1/n$ seiner Länge in Wasser (ρ_w) , so erfahren beide einen Auftrieb und die Waage muss durch das Aufsetzen von Reitern wieder in das Gleichgewicht gebracht werden.

Es werden Reiter der Massen m_o , $m_o / 10$ und $m_o / 100$ der Dichte $\rho_R = m_o / V_R$ verwendet.

Im Gleichgewichtsfall sollen z.B.

- | | | |
|----------------------------|------------|-----------------------|
| ein Reiter (m_o) | in Kerbe i | (in Bild 1 : i = 7) |
| ein Reiter ($m_o / 10$) | in Kerbe j | (in Bild 1 : j = 4) |
| ein Reiter ($m_o / 100$) | in Kerbe k | (in Bild 1 : k = 1) |

sitzen.

Zusätzlich zu \vec{G} , \vec{G}_S und \vec{G}_D treten nun folgende Kräfte auf:

- Auftrieb des Senkkörpers in Wasser ($\vec{F}_A' = -V_S \rho_W \vec{g}$)
- Auftrieb des eingetauchten Drahtstückes in Wasser ($\vec{F}_{AD}' = -\frac{1}{n} V_D \rho_W \vec{g}$)
- Auftrieb des nicht eingetauchten Drahtstückes in Luft ($\vec{F}_{AD}'' = -\left(1 - \frac{1}{n}\right) V_D \rho_L \vec{g}$)
- Reitergewichte ($\vec{G}_1 = m_o \vec{g}$, $\vec{G}_2 = 0,1 m_o \vec{g}$, $\vec{G}_3 = 0,01 m_o \vec{g}$)
- Luftauftriebe der Reiter ($\vec{F}_{A1} = -V_R \rho_L \vec{g}$, $\vec{F}_{A2} = -0,1 V_R \rho_L \vec{g}$, $\vec{F}_{A3} = -0,01 V_R \rho_L \vec{g}$).

Damit lautet die Drehmomentengleichung jetzt

$$G L = 10 l_o g \left[m_s + m_D - \rho_W \left(V_S + \frac{1}{n} V_D \right) - \rho_L \left(1 - \frac{1}{n} \right) V_D \right] + V_R g l_o (\rho_R - \rho_L) (i + 0,1 j + 0,01 k) \quad (3-2)$$

Taucht man schließlich den Tauchkörper völlig und den Draht wieder zu $1/n$ seiner Länge in eine zu untersuchende Flüssigkeit (Dichte ρ), so muss man i.Allg. zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes die Reiter auf andere Kerben setzen (i' , j' , k').

Die Drehmomentengleichung lautet dann analog zu (3-2)

$$G L = 10 l_o g \left[m_s + m_D - \rho \left(V_S + \frac{1}{n} V_D \right) - \rho_L \left(1 - \frac{1}{n} \right) V_D \right] + V_R g l_o (\rho_R - \rho_L) (i' + 0,1 j' + 0,01 k') \quad (3-3)$$

Man subtrahiert (3-1) von (3-2) und (3-3), teilt die beiden so entstehenden Gleichungen durcheinander und erhält

$$\frac{\rho - \rho_L}{\rho_W - \rho_L} = \frac{i' + 0,1 j' + 0,01 k'}{i + 0,1 j + 0,01 k} \quad (3-4)$$

woraus schließlich die Dichte ρ der zu untersuchenden Flüssigkeit folgt als

$$\rho = \frac{i' + 0,1 j' + 0,01 k'}{i + 0,1 j + 0,01 k} \rho_W + \left(1 - \frac{i' + 0,1 j' + 0,01 k'}{i + 0,1 j + 0,01 k} \right) \rho_L \quad (3-5)$$

Bei vernachlässigbarem Luftauftrieb ($\rho_L = 0$) wird aus (3-5)

$$\rho = \frac{i' + 0,1 j' + 0,01 k'}{i + 0,1 j + 0,01 k} \rho_W \quad (3-6)$$

Mit der Mohr-Westphalschen Waage können (indirekt) auch Festkörperdichten nach der sogenannten Schwebemethode bestimmt werden. Dazu wäre der Festkörper in einer (in geeigneter Weise aus 2 Komponenten gemischten) Flüssigkeit zum Schweben zu bringen und dann die Dichte dieser Flüssigkeit zu messen.

Das Schweben ist nur sehr schwer einzustellen; deshalb stellt man zwei Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 her. In einer soll der feste Probekörper noch langsam absinken und in der anderen bereits (ebenso langsam) emporsteigen. Die Dichten ρ_1 und ρ_2 werden mit der Mohr-Westphalschen Waage gemessen und für die Festkörperdichte verwendet man $\rho_{FK} = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

4. Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1. Abgleich der Waage in Wasser (Temperatur t_W).
- 4.2. Herstellen einer Flüssigkeit, in der ein fester Probekörper noch langsam absinkt. Abgleich der Waage in dieser Flüssigkeit (Temperatur t) und Berechnung der Dichte ρ_1 .
- 4.3. Verändern der Flüssigkeitsdichte so, dass der Probekörper langsam aufsteigt. Erneuter Abgleich der Waage in der Flüssigkeit und Berechnung der Dichte ρ_2 .
- 4.4. Angabe der Festkörperdichte ρ_{FK} .

5. Fragen

- 5.1. Wie ist die Dichte eines inhomogenen Stoffes definiert? Welche Bedeutung hat in diesem Fall der Quotient m/V ?
- 5.2. Ein Körper taucht mit seinem Volumen V vollständig in eine Flüssigkeit bekannter Dichte ρ_F . Geben Sie Betrag, Richtung und Angriffspunkt a) der Auftriebskraft und b) der Gewichtskraft des Körpers an.
- 5.3. Eine Lösung hat die Dichte 1121 kg/m^3 . Geben Sie diese Dichte sowohl in g/cm^3 als auch in kg/dm^3 an.
- 5.4. Skizzieren Sie ein Quecksilberbarometer und erklären Sie seine Funktionsweise.
- 5.5. In einem Rohr (Innendurchmesser $3,8 \text{ mm}$) steht eine $0,242 \text{ m}$ hohe Säule von Öl der Dichte $0,81 \text{ g/cm}^3$. Wie groß ist die Masse des Öles?
- 5.6. Ein (masseloser) starrer Waagebalken wird am linken Arm im Abstand l_1 von der Schneide mit der Masse m_1 belastet und rechts im Abstand l_2 mit m_2 . Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers a) allgemein und b) im genannten Fall?
- 5.7. Erläutern Sie das sogenannte "hydrostatische Paradoxon".
- 5.8. Bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$ und $101,3 \text{ kPa}$ hat Luft die Dichte $1,293 \text{ kg/m}^3$. Wie groß ist ihre Dichte bei $15 \text{ }^\circ\text{C}$ und $99,3 \text{ kPa}$?
- 5.9. In welcher Weise nehmen Temperatur und Druck auf die Dichte einer Flüssigkeit Einfluss? Von Anomalien werde abgesehen.
- 5.10. Ohne Luftauftriebskorrektur berechnet man die Dichte der Probeflüssigkeit als $\rho = \rho_W (i' + 0,1 j' + 0,01 k') / (i + 0,1 j + 0,01 k)$. Entwickeln Sie für ρ eine Fehlerformel, wenn k' , k und ρ_W fehlerbehaftet sind.

Literatur

- [1] Geschke, D. (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Teubner-Verlag, Leipzig, 1998
ISBN 3-519-00206-X
- [2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, 1997
ISBN 3-540-62141-5