

## Versuchsanleitung M 5 : Schraubenfeder

### 1 Einleitung

Federn sind Bauteile aus elastischen Werkstoffen, bei deren Verformung Spannungen aufgebaut und elastische Kräfte (Federkräfte) hervorgerufen werden. Die bei der Verformung gegen die Federkraft geleistete Arbeit wird in der Feder als potentielle Energie gespeichert und bei der Arbeitsleistung der Federkraft wieder abgegeben. Federn finden technische Verwendung als Kräfteerzeuger und Energiespeicher.

Man unterscheidet z.B. Blattfedern, Spiralfedern oder Schraubenfedern. Die letzteren werden im vorliegenden Versuch betrachtet. Sie dienen als Zug- bzw. Druckfedern. Das darf jedoch nicht zu dem falschen Schluss verleiten, das Federmaterial sei hier einer Normalbeanspruchung (Zug oder Druck) ausgesetzt.

Eine Schraubenfeder ist vielmehr ein auf einen Zylindermantel gewickelter Torsionsdraht, in dem bei Verformung tangentielle Spannungen (Schubspannungen) hervorgerufen werden.

Eine wichtige Kenngröße der Schraubenfeder ist ihre Federkonstante. Diese ist von den geometrischen Abmessungen der Feder und dem Schubmodul des Federmaterials abhängig. Die Federkonstante und der Schubmodul werden im vorliegenden Versuch bestimmt.

### 2 Grundlagen

Das Ende einer entspannten Schraubenfeder befinde sich bei  $x_0 = 0$  (siehe Bild 1a). Setzt man die Feder einer Zugkraft  $F$  aus (siehe Bild 1b), so verlängert man sie um das Stück  $x$ . Für nicht zu große Verformungen sind  $F$  und  $x$  proportional. Mit dem Faktor  $k$  (Federkonstante) erhält man

$$F = kx \quad . \quad (2-1)$$

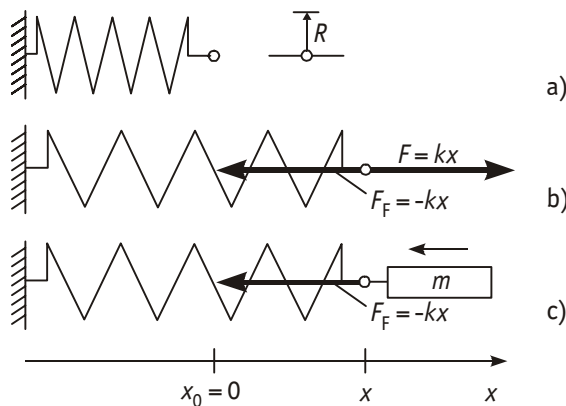


Bild 1 Schraubenfeder a) entspannt b) gespannt c) Federschwingung

Auf Grund dieser Proportionalität eignet sich die Schraubenfeder auch als Kraftmesser. Beim Spannen von  $x_0 = 0$  bis  $x$  leistet die Kraft  $F = -kx$  die Arbeit

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{k}{2} x^2 \quad , \quad (2-2)$$

die als potentielle Federenergie gespeichert wird.

An der Stelle  $x$  befindet sich das Federende im Gleichgewicht von Zugkraft  $F$  und der durch die Verformung hervorgerufenen Federkraft  $F_F$ , d. h.

$$F + F_F = kx + F_F = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_F = -kx \quad . \quad (2-3) \quad , \quad (2-4)$$

Bringt man an der Feder die Masse  $m$  an, lenkt diese aus und überlässt sie dann der Federkraft, so lautet das dynamische Grundgesetz

$$m\ddot{x} = F_F = -kx \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2-5), (2-6)$$

d. h. die Masse  $m$  vollführt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2-7)$$

Nach (2-1) kann die Federkonstante statisch und nach (2-7) dynamisch bestimmt werden.

Die Längenänderung  $x$  der Feder bei Einwirkung der Kraft  $F$  ist - wie bereits erwähnt - auf die Torsion des Federdrahtes zurückzuführen.

Die Feder bestehe aus  $n$  Windungen. Der Federdraht habe einen Kreisquerschnitt vom Durchmesser  $2r_0$ . Der Windungsdurchmesser  $2R$  wird zwischen den Mittelpunkten dieser Kreisquerschnitte angegeben. Die Kraft  $F$  bewirkt am Federende das Torsionsmoment  $M = FR$  (vgl. Bild 2).

Infolgedessen wird pro Windung der Drahtquerschnitt um einen kleinen Winkel  $\Delta\varphi$  verdreht und jede Windung um ein kleines Stück  $\Delta x = R\Delta\varphi$  verlängert, bis das dadurch im Draht hervorgerufene Schubspannungsmoment das Gleichgewicht herstellt. Für alle  $n$  Windungen zusammen erhält man die Verdrehung  $\varphi = n\Delta\varphi$  und die Verlängerung  $x = n\Delta x = Rn\Delta\varphi = R\varphi$ .

Mit dem Schubspannungsmoment  $M_S$  für einen Draht der Länge  $l$  und des Durchmessers  $2r_0$  aus einem Material mit dem Schubmodul  $G$  gilt im Gleichgewicht

$$\frac{G\pi r_0^4}{2l}\varphi = M_S = M = FR. \quad (2-8)$$

(Zur Herleitung sei auf den Anhang 2a verwiesen.)

Führt man in (2-8) für  $F = kx$ , für  $\varphi = \frac{x}{R}$  und für die Drahtlänge (genähert)  $l = 2\pi Rn$  ein, so folgt daraus für  $k$  bzw.  $G$

$$k = \frac{Gr_0^4}{4nR^3} \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{4nR^3k}{r_0^4}. \quad (2-9), (2-10)$$

## 2a Anhang (fakultativ, soweit nicht anders festgelegt)

Die als Torsion bezeichnete Verdrehung eines elastischen Körpers soll am Beispiel eines Kreiszyinders (Draht) untersucht werden. In Bild 2 ist der Querschnitt B fest eingespannt und am anderen Ende des Zylinders greift am Querschnitt B' das Torsionsmoment  $\vec{M}$  an.

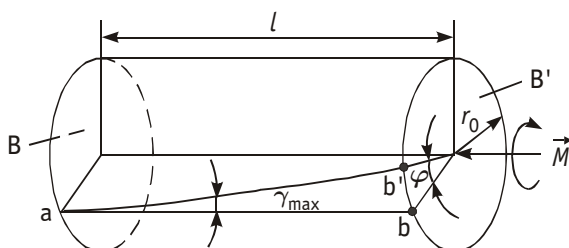


Bild 2 Torsionsdraht

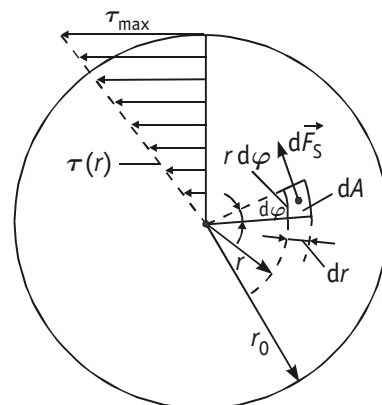


Bild 3 Schubspannungen im Drahtquerschnitt

Der Querschnitt B' wird dadurch um den Winkel  $\varphi$  gegen B verdreht. Die Mantellinie a - b des Zylinders geht in die Linie a - b' über. Die Verformung wird durch den Scherungswinkel  $\gamma$  beschrieben, der an der Mantelfläche des Zylinders seinen Maximalwert  $\gamma_{\max}$  erreicht. In Bild 1 findet man auf dem Zylindermantel und dementsprechend im Inneren ( beim Radius  $r$  ) die Beziehungen

$$l \gamma_{\max} = r_0 \varphi \quad \text{bzw.} \quad l \gamma = r \varphi . \quad (2a - 1)$$

Durch die Verdrehung der Querschnitte werden die Teilchen des Materials gegeneinander verschoben und elastische Kräfte hervorgerufen.

Im Flächenelement  $dA$  (Bild 3) soll die tangentielle Kraft  $d\vec{F}_S$  wirken, die mit der Schubspannung  $\tau$  durch

$$dF_S = \tau dA \quad (2a - 2)$$

verbunden ist.

Die Schubspannungen  $\tau$  sind den Verformungen  $\gamma$  proportional; der Proportionalitätsfaktor  $G = \frac{\tau}{\gamma}$  ist eine

Materialkonstante und heißt Schubmodul oder Torsionsmodul. Die Schubspannungen genügen entsprechend (2a - 1) der Verteilung

$$\tau(r) = \frac{r}{r_0} \tau_{\max} . \quad (2a - 3)$$

Die Schubspannungen bewirken ein Schubspannungsmoment  $M_S$ , das dem Torsionsmoment entgegenwirkt. Das Flächenelement  $dA$  (Bild 3) leistet zum Schubspannungsmoment den Beitrag

$$dM_S = r dF_S = r \tau(r) dA . \quad (2a - 4)$$

Das gesamte Schubspannungsmoment erhält man durch Integration von (2a - 4) über die Querschnittsfläche B' und unter Verwendung von (2a - 3) als

$$M_S = \frac{\tau_{\max}}{r_0} \int_{B'} r^2 dA . \quad (2a - 5)$$

Das Integral in (2a - 5) heißt polares Flächenträgheitsmoment  $J_p$ . Für einen Kreisquerschnitt findet man mit  $dA = r dr d\varphi$  (Polarkoordinaten; vgl. Bild 3)

$$J_p = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r_0} r^3 dr = \frac{\pi}{2} r_0^4 . \quad (2a - 6)$$

Damit erhält man aus (2a - 5) mit  $\tau_{\max} = G \gamma_{\max}$  und (2a - 1) für das Schubspannungsmoment schließlich den Ausdruck aus (2 - 8).

### 3 Versuchsanordnung

Zur statischen Bestimmung der Federkonstanten wird die zu untersuchende Feder an ihrem oberen Ende aufgehängt. An ihrem unteren Ende wird zunächst nur die Halterung für die Massestücke angebracht und die Gleichgewichtslage  $s_0$  der so vorbelasteten Feder auf einem Millimetermaßstab abgelesen. Sodann legt man die Masse  $m$  auf die Halterung und liest die neue Gleichgewichtslage  $s$  ab. Die Verlängerung der Feder ist  $x = |s - s_0|$ . Man wiederholt diese Messung für weitere Massen. Nach (2 - 1) gilt  $F = m g = k x$ . Stellt man die Funktion  $x(m)$  graphisch dar, so ist eine Gerade  $y = B \cdot x$  mit dem Anstieg

$$B = \frac{dx}{dm} = \frac{g}{k} \quad (3 - 1)$$

zu erwarten, aus dem man  $k$  berechnen kann.

Zur dynamischen Berechnung der Federkonstanten wird die Feder an ihrem oberen Ende befestigt. Am unteren Ende wird eine Masse  $m$  angebracht. Man lenkt die Masse aus ihrer Gleichgewichtslage aus und startet eine Feder-schwingung. Wenn diese Schwingung eine Kreisfrequenz  $\omega_0$  nach ( 2 – 7 ) besitzt, muss ihre Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3-2)$$

sein. Man stoppt die Schwingungsdauer  $T$  und kann daraus bei bekannter Masse  $m$  die Federkonstante

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad (3-3)$$

berechnen.

#### **4 Aufgaben**

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Belasten Sie die verschiedenen Federn durch die Gewichtskräfte angehängter Massestücke  $m$  und ermitteln Sie die dadurch hervorgerufenen Längenänderungen  $x$ .
- 4.2 Stellen Sie die Funktionen  $x(m)$  für alle untersuchten Federn in einem Diagramm graphisch dar und bestimmen Sie daraus die Federkonstanten.
- 4.3 Bestimmen Sie die Federkonstante einer Feder durch die Messung der Schwingungsdauer  $T$  einer an dieser Feder hängenden Masse  $m$ .
- 4.4 Ermitteln Sie die Draht- und Windungsdurchmesser der untersuchten Schraubenfedern.
- 4.5 Berechnen Sie den Schubmodul  $G$  für das untersuchte Federmaterial.

#### **5 Fragen**

- 5.1 Welche Zusammenhänge bestehen zwischen Frequenz, Kreisfrequenz und Schwingungsdauer einer Schwingung?
- 5.2 Um welchen Betrag vergrößert sich die Federenergie, wenn die Feder von  $x_1 > 0$  auf  $x_2 > x_1$  gespannt wird?
- 5.3 Geben Sie eine Formel für die Federkraft  $F_F$  an und erläutern Sie diese anhand einer Skizze.
- 5.4 Geben Sie zur Gleichung  $G = \frac{4nR^3k}{r_0^4}$  eine Fehlerformel für  $G$  an. Nicht fehlerbehaftet sei nur  $n$ .
- 5.5 Wie ist aus der graphischen Darstellung  $x(m)$  die Federkonstante  $k$  zu bestimmen?
- 5.6 Ein Federschwinger ( Masse  $m$ , Federkonstante  $k$ ) habe die Schwingungsdauer  $T$ . Auf welchen Wert muss man die Masse vergrößern, um die doppelte Schwingungsdauer zu erhalten?
- 5.7 Welcher Art der elastischen Beanspruchung unterliegt eine gespannte Schraubenfeder?
- 5.8 Eine Feder habe die Konstante  $k$ . Aus dem gleichen Draht soll eine zweite Feder gewickelt werden, die bei gleicher Windungszahl die Konstante  $2k$  hat. In welchem Verhältnis müssen die Windungsradien stehen?
- 5.9 Geben Sie Maßeinheiten für die Federkonstante  $k$ , den Schubmodul  $G$  und das Schubspannungsmoment  $M_S$  an.
- 5.10 Zwei (masselose) Federn mit den Federkonstanten  $k_1$  und  $k_2 \neq k_1$  werden vertikal aneinander gehängt und mit dem Gewicht  $mg$  einer angehängten Masse  $m$  belastet. Wie weit sinkt die Masse  $m$  dabei herab?

#### **Literatur**

- [ 1 ] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum  
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)  
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)
- [ 2 ] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012 (11. Auflage)  
ISBN : 978-3-642-22568-0 (Hardcover) / 978-3-642-22569-7 (eBook)