Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften
Physikalisches Praktikum / Sommersemester 2002

Versuchsanleitung M 6 : Kreisel

1. Einleitung

Ein Kreisel ist ein in einem Punkt festgehaltener, rotierender starrer Körper. Grundsätzlich ergibt sich seine Bewegung aus dem dynamischem Grundgesetz bzw. den Erhaltungssätzen der Mechanik, ist aber unter allgemeinen Voraussetzungen nicht einfach zu berechnen.
Im Versuch wird mit einem abgeplatteten symmetrischen Kreisel experimentiert. Bestimmte Rotationskörper (z.B. der in Bild 1 dargestellte Ring) gehören diesem Kreiseltyp an, auf den die Betrachtungen beschränkt werden.
Der kräftefreie Kreisel, dessen resultierendes Drehmoment Null ist, kann sogenannte Nutationsbewegungen (von lat. nutare: nicken, wanken) ausführen.
Wirkt auf den Kreisel aber ein Drehmoment (z.B. das seiner Gewichtskraft) ein, bezeichnet man ihn als schweren Kreisel. Dieser ist zu sogenannten Präzessionsbewegungen (von lat. praecedere: vorangehen) fähig. Der Präzession kann ggf. noch eine Nutation überlagert sein.
Technische Kreisel finden bei der Navigation und Steuerung von Flugzeugen und Raketen Verwendung (Wendezeiger, Autopilot, Kreiselkompass).
Bei Drehungen um feste Achsen (Räder, Schwungscheiben, . . .) müssen die Achslager eventuelle Kreiselbewegungen dieser starren Körper durch Zwangsmomente verhindern und werden dementsprechend belastet.
Das Modell Kreisel bewährt sich auch bei der Deutung astronomischer und atomarer Erscheinungen. Die Erdachse z.B. präzediert mit einer Dauer von 25700 Jahren. Die sogenannte Larmorpräzession des atomaren Elektronensystems um das Magnetfeld ist die Ursache des Diamagnetismus.

2. Grundlagen

Mit dem in Bild 1 dargestellten Ringkreisel K sei ein Koordinatensystem x , y , z fest verbunden. Die z - Achse ist Rotationsachse des Kreiselkörpers und wird als Figurenachse F bezeichnet; sie ist die Hauptachse des größten Trägheitsmomentes J_z . Die Hauptachsen x und y stehen auf z und auch aufeinander senkrecht. Für ihre Trägheitsmomente gilt $J_x = J_y < J_z$.
Der Drehpunkt des kräftefreien Kreisels ist sein Schwerpunkt S .

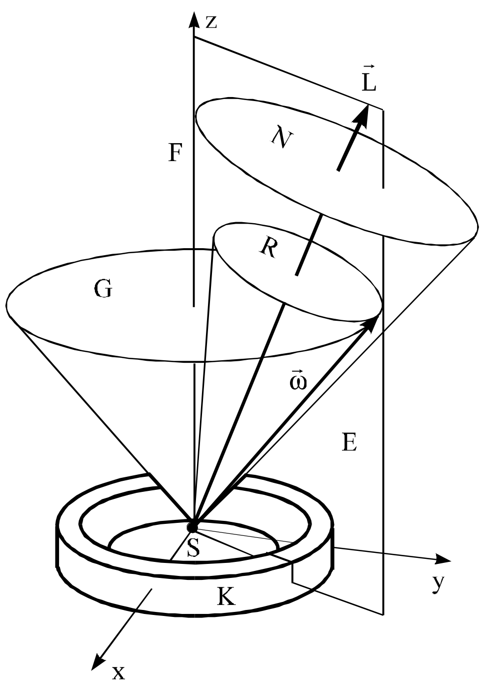

Bild 1 Nutation des kräftefreien Kreisels

Der Kreisel habe (z.B. durch einen Stoß) einen Drehimpuls

$$\vec{L} = J_x \left(\omega_x \cdot \vec{e}_x + \omega_y \cdot \vec{e}_y\right) + J_z \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_z \qquad (2-1)$$

erhalten, der nicht mit F zusammenfällt. Die Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{e}_x + \omega_y \cdot \vec{e}_y + \omega_z \cdot \vec{e}_z \qquad (2-2)$$

und damit die momentane Drehachse des Kreisels hat i.Allg. eine andere Richtung als $\vec{L}$, denn nur für eine Kugel $\left(J_x = J_z\right)$ wären $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ proportional. Immerhin liegen aber $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und F in einer Ebene E.
Nach dem Anstoß möge voraussetzungsgemäß kein Drehmoment mehr auf den kräftefreien Kreisel einwirken. Der Drehimpuls $\vec{L}$ bleibt somit in Betrag und Richtung (im Raum) erhalten und das gesamte in Bild 1 gezeigte starre System aus Achsen, Vektoren und Kreiselkörper vollführt eine Drehbewegung um $\vec{L}$.
Dabei beschreiben die Figurenachse den Nutationskegel N und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ den Rastpolkegel R um $\vec{L}$. Wählt man einen Bezugspunkt auf der Figurenachse, dann bewegt sich die momentane Drehachse auf dem Gangpolkegel G, der auf R abrollt, um F.
Für kleine Öffnungswinkel des Nutationskegels besitzt F um $\vec{L}$ die Drehfrequenz f_N

$$f_N = \frac{L}{2\pi J_x} \approx \frac{J_z}{J_x} f_z \quad . \qquad (2-3)$$

Zur Herleitung von (2 - 3) sei auf [1] verwiesen.
Die Kräftefreiheit des Kreisels lässt sich experimentell nicht streng verwirklichen. Ein (wenn auch kleines) Reibungsmoment (Luft- und Lagerreibung) ist unvermeidlich.
Angenommen der Kreisel rotiere (von oben gesehen) im Uhrzeigersinn um die z - Achse und sein Drehimpulsvektor weise daher in negative z - Richtung.
Die Reibungskräfte greifen tangential und bewegungshemmend (hier also im Gegenuhrzeigersinn) am Kreisel an; ihr Momentenvektor $\vec{M}_R$ hat die z - Richtung. Wegen

$$d\vec{L} = \vec{M}_R \, dt \qquad (2-4)$$

hat $d\vec{L}$ die Richtung von $\vec{M}_R$. Der Drehimpulsvektor behält somit seine Richtung bei; sein Betrag nimmt durch die Reibung ab.
Wenn ein Kreisel in einem Drehpunkt D unterhalb oder oberhalb seines Schwerpunktes S unterstützt wird, wirkt auf ihn sein Schwerkraftmoment

$$\vec{M} = \vec{s} \times m\vec{g} \quad . \qquad (2-5)$$

In Bild 2 (das der experimentellen Situation weitgehend entspricht) wirkt die Stützkraft auf die Spitze der in der Lagerpfanne P aufsitzenden Kreiselachse A.
Der Drehpunkt D liegt hier oberhalb S. Dieser Fall wird im Experiment gewählt, damit der ruhende Kreisel nicht umfällt.

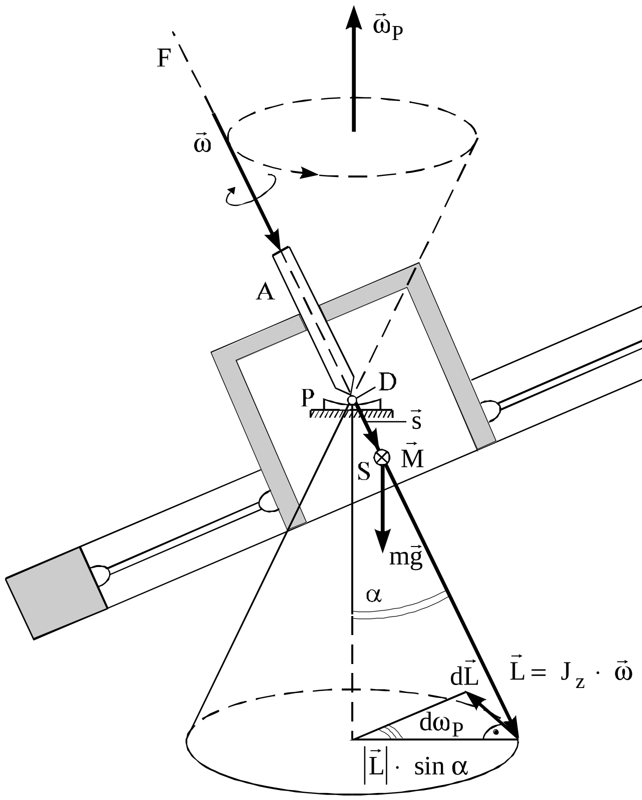

Bild 2 Präzession des schweren Kreisels

Der (im Schwerpunkt S eingezeichnete) Momentenvektor $\vec{M}$ zeigt somit in die Zeichenebene hinein. Er würde den ruhenden Kreisel aus der abgebildeten Lage aufrichten.
Der rotierende Kreisel jedoch besitzt einen Drehimpuls $\vec{L}$, dessen Betrag $L = J_z \cdot \omega_z$ ist.
Nach dem dynamischen Grundgesetz bewirkt das Moment $\vec{M}$ an $\vec{L}$ innerhalb eines Zeitelementes dt eine Änderung

$$d\vec{L} = \vec{M}\,dt \quad , \tag{2 - 6}$$

in Richtung von $\vec{M}$, wodurch der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ mit unverändertem Betrag um den Winkel $d\varphi_P$ aus der Zeichenebene nach hinten gedreht wird. In den nachfolgenden Zeitelementen wiederholt sich jeweils das Geschehen, so dass der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ und mit ihm die Figurenachse F auf einem Kegel umlaufen - der Kreisel präzediert.
Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ist mit (2 - 6) und unter Verwendung geometrischer Zusammenhänge aus Bild 2

$$\omega_P = \frac{d\varphi_P}{dt} = \frac{dL}{L \sin\alpha\, dt} = \frac{M\, dt}{J_z\, \omega_z \sin\alpha\, dt} \quad . \tag{2 - 7}$$

Setzt man in (2 - 7) gemäß (2 - 5) $M = m\,g\,s \sin\alpha$ ein und fasst zusammen, so erhält man zunächst

$$\omega_P = \frac{m\,g\,s}{J_z\, \omega_z} \quad . \tag{2 - 8}$$

Nach Übergang auf die Messgrößen Drehfrequenz $f_z = \omega_z / 2\pi$ und Präzessionsdauer $T_P = 2\pi / \omega_P$ wird aus (2 - 8) die zur Auswertung geeignete Beziehung

$$T_P\left(f_z\right) = \frac{4\pi^2\, J_z}{m\,g\,s}\, f_z \quad . \tag{2 - 9}$$

Fragen

2.1. Man zeige, dass $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ in einer Ebene E liegen.
2.2. Erklären Sie die Begriffe momentane Drehachse und feste Drehachse.
2.3. Welche Unterschiede bestehen zwischen der Nutation abgeplatteter und verlängerter symmetrischer Kreisel?
2.4. Wie kann der Betrag M_R des Reibungsmomentes bestimmt werden?

3. Versuchsanordnung

Der im Versuch eingesetzte Kreisel ist ein Speichenrad, dessen (am Arbeitsplatz angegebene) Masse sich zum größten Teil im Radkranz befindet.
Dadurch besitzt der Kreisel Massenträgheitsmomente, die bereits bei relativ kleinen (und damit für die Versuchsdurchführung weniger gefährlichen) Drehfrequenzen ausreichend große Drehimpulse und Rotationsenergien gewährleisten. Die (kugelgelagerte) Radnabe sitzt in einem Korb oberhalb des Rades. Dadurch liegt der Schwerpunkt außerhalb des Kreiselkörpers. Durch die Nabe führt eine Achse, deren Spitze in einer Lagerpfanne läuft und den Drehpunkt des Kreisels bildet. Durch Verschieben dieser Achse legt man den Drehpunkt in den Schwerpunkt (kräftefreier Kreisel) bzw. außerhalb desselben (schwerer Kreisel).
Dank des Kugellagers dreht sich der Kreisel auch bei festgehaltener Achse; das ist vorteilhaft für das Anwerfen und Abbremsen sowie Achsenverstellungen bei laufendem Kreisel.
Die Messung der Drehfrequenz erfolgt mittels Lichtschranke und Zähler; die Präzessions- und Nutationsdauern werden handgestoppt. Eine Visiereinrichtung erlaubt die Beobachtung der Kreiselachse von oben und erleichtert so das Festlegen der Start- und Stoppzeitpunkte.

Fragen

3.1. Der Radkranz des Kreisels ist mit 18 Speichen am Korb befestigt, die alle die Lichtschranke unterbrechen. Wie ermittelt man aus der vom Zähler angezeigten Frequenz die Drehfrequenz des Kreisels?

4. Aufgaben

Die Aufgaben werden hier nur grundsätzlich genannt. Genauere Bedienanleitungen befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1. Man messe in regelmäßigen Zeitabständen die Drehfrequenz des um die senkrechte Figurenachse rotierenden Kreisels und stelle sie als Zeitfunktion graphisch dar. Um wieviel Prozent weicht demzufolge die Drehfrequenz f_z innerhalb einer vorgegebenen Zeitdauer maximal von ihrem Messwert ab?
4.2. Bei verschiedenen Drehfrequenzen und Schwerpunktabständen s des schweren Kreisels sind seine Präzessionsdauern T_P zu messen.
4.3. Die Nutationsdauern des kräftefreien Kreisels sind bei verschiedenen Drehfrequenzen zu messen.
4.4. Für die Beziehungen (2 - 9) und (2 - 3) sind mit den Messwerten aus 4.2. und 4.3. Ausgleichsrechnungen vorzunehmen und daraus die Hauptträgheitsmomente J_z und J_x zu berechnen.

Literatur

[1] Geschke, D. (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Teubner-Verlag, Leipzig, 1998
ISBN 3-519-00206-X

[2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, 1997
ISBN 3-540-62141-5