

## Versuchsanleitung S 1 : Physikalisches Pendel

### 1 Einleitung

Die Pendelschwingung bietet die Möglichkeit, Massenträgheitsmomente beliebig geformter Körper experimentell zu ermitteln.

Sie ist eine anharmonische Schwingung, die lediglich im Grenzfall kleiner Ausschläge näherungsweise als harmonische Schwingung aufgefasst werden kann. Für beide Fälle werden im Versuch die Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung experimentell überprüft.

Die Schwingungsdifferentialgleichung des physikalischen Pendels wird sowohl aus der Grundgleichung für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse als auch aus dem Energieerhaltungssatz entwickelt. Dabei finden die Größen Drehmoment, Massenträgheitsmoment und Rotationsenergie Anwendung.

### 2 Grundlagen

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der sich im homogenen Schwerfeld befindet und eine raum- und körperfeste Drehachse besitzt, die nicht durch den Körperschwerpunkt verläuft.

Die Gleichgewichtslage des Pendels ist dadurch gekennzeichnet, dass der Körperschwerpunkt  $S$  senkrecht unterhalb der Drehachse  $A$  liegt. Mit der an der Lagerung der Drehachse angreifenden Stützkraft (Auflagerkraft) und dem Stützmoment sind in der Gleichgewichtslage die Summen aller am starren Körper (Pendel) angreifenden Kräfte und aller Drehmomente für sich gleich Null. Bei einer Störung des Gleichgewichtes wird ein rücktreibendes Drehmoment hervorgerufen und das sich selbst überlassene Pendel vollführt eine Schwingung um seine Gleichgewichtslage.

Zur Beschreibung der Bewegung verwendet man als Koordinate vorteilhaft den Winkel  $\varphi$  (siehe Bild 1).

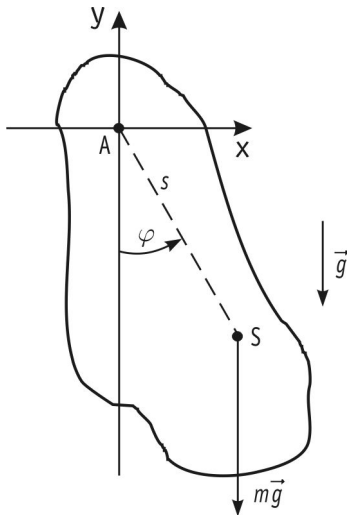


Bild 1 Physikalisches Pendel (ausgelenkt)

Die Pendelschwingung erfüllt die Grundgleichung

$$J_A \ddot{\varphi}(t) = \bar{M}_A \quad (2-1)$$

für die Rotation des starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse. In (2-1) bedeuten  $\bar{M}_A$  das auf die Achse  $A$  bezogene Drehmoment der am Pendel angreifenden Kräfte und

$$J_A = \int_K r^2 dm \quad (2-2)$$

das Massenträgheitsmoment des Pendelkörpers  $K$  bezüglich der Drehachse  $A$ . Nach Bild 1 gilt für das Drehmoment  $\vec{M}_A$  der Gewichtskraft  $m\vec{g}$  bezüglich der in  $z$ -Richtung orientierten Achse  $A$

$$M_{Az} = -m g s \sin \varphi, \quad (2-3)$$

wobei das negative Vorzeichen in (2-3) den rüctreibenden Charakter berücksichtigt.  
Mit (2-3) folgt aus (2-1)

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g s}{J_A} \sin \varphi = 0. \quad (2-4)$$

Die Gleichung (2-4) ist die Bewegungsgleichung des ungedämpften Pendels, eine nichtlineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Bestimmung der Schwingungsdauer  $T'$  ist für diesen anharmonischen Oszillator nicht mehr so einfach wie bei einer harmonischen Schwingung, deren Kreisfrequenz ihrer Bewegungsgleichung entnommen werden kann. Man findet  $T'$  durch das "Zusammenzählen" aller Zeitelemente  $dt$  einer vollen Schwingung (Umlaufintegral der Zeit über eine volle Schwingungsperiode), wobei  $dt$  aus dem Zusammenhang  $d\varphi = \dot{\varphi} dt$  ausgedrückt wird

$$T' = \oint dt = \oint \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}. \quad (2-5)$$

Die zur Auswertung von (2-5) erforderliche Funktion  $\dot{\varphi}(\varphi)$  gewinnt man aus dem für ungedämpfte freie Schwingungen gültigen Energieerhaltungssatz. Die kinetische Energie (Rotationsenergie) des Pendels ist

$$W_{\text{kin}} = \frac{J_A}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (2-6)$$

Für die potentielle Energie findet man durch eine geometrische Überlegung aus Bild 1

$$W_{\text{pot}} = m g h = m g s (1 - \cos \varphi), \quad (2-7)$$

wobei  $h$  die Höhe des Schwerpunktes des um  $\varphi$  ausgelenkten Pendels in bezug auf die Schwerpunktslage im Gleichgewicht ist.

Wird das Pendel mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  gestartet, dann besitzt es die mechanische Energie

$$W = m g s (1 - \cos \varphi_0). \quad (2-8)$$

Also lautet der Energieerhaltungssatz

$$\frac{J_A}{2} \dot{\varphi}^2 + m g s (1 - \cos \varphi) = m g s (1 - \cos \varphi_0). \quad (2-9)$$

Man berechnet nun  $\dot{\varphi}$  aus (2-9) und setzt es in (2-5) ein. So erhält man die aus vier gleichen Anteilen (Viertelschwingungen) zusammengesetzte Schwingungsdauer

$$T' = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2mgs}{J_A} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}. \quad (2-10)$$

Die (hier nicht ausgeführte) Berechnung des Integrals (2-10) liefert

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] = T \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-\frac{1}{2}}{k} \right)^2 \sin^{2k} \frac{\varphi_0}{2} . \quad (2-11)$$

Die Schwingungsdauer des anharmonischen Oszillators ist also auch von der Amplitude  $\varphi_0$  abhängig. Für kleine Amplituden  $\varphi_{01}$  (also für  $\sin^2 \frac{\varphi_{01}}{2} \ll 1$ ) ist die Summe in (2-11) näherungsweise gleich eins, für große Amplituden  $\varphi_{02}$  jedoch größer. Hier liefern auch die folgenden, von der Amplitude abhängigen Summanden in der eckigen Klammer, noch Beiträge in messbaren Größenordnungen. Die Schwingungsdauern  $T'$  (für große Amplituden  $\varphi_{02}$ ) und  $T$  (für kleine Amplituden  $\varphi_{01}$ ) unterscheiden sich also. Näherungsweise gilt

$$x = \frac{T' - T}{T} \cong \frac{T \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_{02}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_{02}}{2} + \dots \right] - T}{T} = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_{02}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_{02}}{2} + \dots . \quad (2-12)$$

Beispielsweise berechnet man mit  $\varphi_{02} = 30^\circ$  den Wert  $x = 0,0174$ . Also unterscheiden sich in diesem Fall  $T'$  und  $T$  um 1,74 %.

Zu der (für kleine Amplituden  $\varphi_{01}$  gültigen) Schwingungsdauer  $T$  wäre man auch gelangt, wenn man in (2-4) die für kleine Ausschläge gültige Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  benutzt hätte. Es wäre so die bekannte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_A} \varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (2-13)$$

einer harmonischen Schwingung entstanden mit der allgemeinen Lösung  $\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ . Dabei sind die Kreisfrequenz  $\omega_0$  und die Schwingungsdauer  $T$  direkt aus der Bewegungsgleichung (2-13) zu entnehmen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} . \quad (2-14)$$

### **3 Versuchsanordnung**

Als Pendelkörper dienen Vielecke aus Aluminiumblech. Die Lage des Schwerpunktes ist markiert. Die Aufhängungen der Pendel sind kugelgelagert. Die Messung der Schwingungsdauern erfolgt mittels Lichtschranke und Zähler. Das ist notwendig, um die kleine Zeitdifferenz zwischen  $T'$  und  $T$  auflösen zu können.

Vor einer Messung lasse man das Pendel stets einschwingen und achte bei Aufgabe 4.5 insbesondere auf das Einhalten von  $\varphi_{02} = 30^\circ$ .

### **4 Aufgaben**

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Für das gegebene Pendel sind die Abstände  $s_i$  der Drehachsen vom Schwerpunkt zu messen. Die Masse  $m$  des Pendelkörpers ist durch Wägung festzustellen.
- 4.2 Man messe die Schwingungsdauern des physikalischen Pendels für verschiedene Drehachsen bei kleinen Amplituden  $\varphi_{01} = 5^\circ$ .

**Hinweis:** Bitte schauen Sie zur Vorbereitung auf den Versuch unbedingt in der Bedienungsanleitung Ihres Taschenrechners nach, wie Sie unter Benutzung der in den Taschenrechner integrierten Statistikfunktionen zu einer Anzahl von Messwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  den Mittelwert  $\bar{x}$  und die Standardabweichung  $\sigma_{n-1}$  abfragen können.

- 4.3 Mit den Messergebnissen von 4.1 und 4.2 sind die Massenträgheitsmomente  $J_{A_i}$  für verschiedene Drehachsen nach (2 – 14) zu berechnen.
- 4.4 Das Massenträgheitsmoment  $J_S$  des Pendels bezüglich der zu den Drehachsen parallelen Schwerachse S ist aus den Ergebnissen von 4.1, 4.2 und 4.3 zu berechnen.
- 4.5 Man messe die Schwingungsdauer  $T'$  des Pendels für eine der in 4.1 und 4.2 bereits untersuchten Drehachsen bei einer Amplitude  $\varphi_{02} = 30^\circ$ . Unter Verwendung der für die gleiche Drehachse in 4.2 gemessenen Schwingungsdauer  $T$  bilde man den Ausdruck  $x = \frac{T' - T}{T}$  und vergleiche ihn mit der in (2 – 12) vorhergesagten Abweichung.

## 5. Fragen

- 5.1 Erläutern Sie die Begriffe "Mathematisches Pendel" und "Physikalisches Pendel".
- 5.2 Erläutern Sie den Steinerschen Satz für Massenträgheitsmomente (Formel und Skizze).
- 5.3 Geben Sie die Formel für die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels an und leiten Sie daraus die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels her.
- 5.4 Wie berechnet man das Drehmoment  $\vec{M}$  der Schwerkraft  $\vec{F}_g$  eines starren Körpers bezüglich einer festen, horizontalen Achse A, die nicht durch den Schwerpunkt verläuft?
- 5.5 Schreiben Sie die Bewegungsgleichung des ungedämpften, freien physikalischen Pendels auf und erläutern Sie alle in ihr vertretenen Größen.
- 5.6 Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines dünnen, homogenen Stabes (Länge  $l$ , Masse  $m$ ) bezüglich einer senkrecht zur Stabachse durch das Stabende verlaufenden Rotationsachse mit Hilfe seiner Definitionsgleichung.
- 5.7 Geben Sie den Ortsvektor des Schwerpunktes an, jeweils für a) ein starres Punktmassensystem und b) einen starren Körper mit stetiger Raumerfüllung an (Formeln und Skizzen).
- 5.8 Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$  die Lösung  $\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$  besitzt.
- 5.9 Geben Sie das Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse A an, jeweils für a) ein Punktmassensystem und b) einen starren Körper mit stetiger Raumerfüllung an (Formeln und Skizzen).
- 5.10 Zwei gleiche Punktmassen ( $m_1 = m_2 = M$ ) befinden sich auf einer masselosen Stange in Abständen  $l$  und  $2l$  von der Drehachse. Berechnen Sie die Schwingungsdauer der Anordnung für den Fall kleiner Auslenkungen und  $l = 1 \text{ m}$ .

## Literatur

- [ 1 ] Schenk/Kremer (Hrsg.): Physikalisches Praktikum  
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)  
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)
- [ 2 ] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012 (11. Auflage)  
ISBN : 978-3-642-22568-0 (Hardcover) / 978-3-642-22569-7 (eBook)