Versuchsanleitung S 6 : Stehende Wellen

1 Einleitung

Die Ausbreitung von Schwingungen im Raum bezeichnet man als Wellen. Trotz unterschiedlicher Natur können alle Wellen (z. B. Licht-, Schall- und Seilwellen) mathematisch analog behandelt werden. Für Wellen sind viele Beispiele aus Natur und Technik bekannt. Laufende Wellen übertragen Energie und Information (Licht, Schall). Die Wechselwirkung von Wellen mit Makro- und Mikroobjekten bildet die Grundlage von Messmethoden wie z. B. RADAR, SONAR oder der Spektroskopie.
Stehende Wellen schließlich treten in geeigneten Resonatoren wie z. B. Saiten, Gassäulen, Antennen und Lasern auf.
Im vorliegenden Versuch sind stehende akustische Wellen in der Gassäule innerhalb eines sogenannten KUNDTschen Rohres (nach AUGUST ADOLPH KUNDT, 1839-1894) zu untersuchen. Das KUNDTsche Rohr wird heute in der Ingenieurtechnik z. B. dazu benutzt, den Schallabsorptionsgrad und den Schallreflexionsfaktor des Rohrabschlusses bei senkrechtem Schalleinfall zu bestimmen. Dies ist ein genormtes Verfahren zur Messung der akustischen Absorptions- und Reflexionseigenschaften von in der Bauakustik verwendeten Materialstrukturen.

2 Grundlagen

Aufgrund der geometrischen Verhältnisse kann das Problem eindimensional behandelt werden. Die Schallwelle ist eine Longitudinalwelle. Auslenkung s und Schallschnelle (Geschwindigkeit) $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ der schwingenden Teilchen sind orts- und zeitabhängig. Druck p und Dichte ρ schwanken um ihre Mittelwerte $\overline{p}$ und $\overline{\rho}$. Die Differenz $\tilde{p} = p - \overline{p}$ nennt man den Schallwechseldruck.
Zur Herleitung der Wellengleichung greift man ein kleines Volumen $\Delta V = A\,\Delta x$ mit der Masse $\Delta m = \overline{\rho}\,\Delta V$ aus dem eindimensionalen Schallfeld heraus und grenzt es zur Betrachtung durch zwei (nur gedachte) Wände der Fläche A zur Umgebung ab (Bild 1).

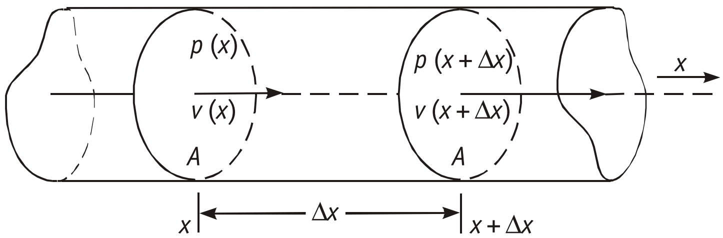

Bild 1 Zur Herleitung der Wellengleichung

Der örtliche Druckunterschied $\Delta\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\Delta x$ bewirkt an Δm die Kraft $\Delta F = -A\,\Delta\tilde{p}$ und folglich die Beschleunigung $a = \frac{\Delta F}{\Delta m}$.
Somit ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\Delta x}{\overline{\rho}\,A\,\Delta x} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad . \qquad (2-1)$$

Infolge des örtlichen Geschwindigkeitsunterschiedes $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$ der beiden "Wände" ändern sich das Volumen ΔV und der Druck in diesem zeitlich. Zunächst ist

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = A\,\Delta v = A\,\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta V \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \qquad (2-2)$$

Bei adiabatischer Zustandsänderung des idealen Gases gilt die Poissongleichung $p(t)\,\Delta V^{\kappa}(t) = \text{const}$,
durch Differentiation nach der Zeit wird daraus

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{\kappa \bar{p}}{\Delta V} \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = -\kappa\,\bar{p} \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \qquad (2-3)$$

Die Differentiationen von (2 - 1) nach t und (2 - 3) nach x und das Gleichsetzen der so gewonnenen gemischten Ableitungen ergeben die eindimensionale Wellengleichung des Schalls in Gasen

$$\frac{\bar{\rho}}{\kappa \bar{p}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad . \qquad (2-4)$$

Diese Wellengleichung erfüllen sowohl beliebige, mit einer bestimmten Geschwindigkeit c in positive oder negative x - Richtung laufende als auch stehende Wellen. Das kann man durch Einsetzen ihrer Wellenfunktionen in (2 - 4) nachweisen, wobei offenbar $c^2 = \dfrac{\kappa\,\bar{p}}{\bar{\rho}}$ ist.
Es sollen zunächst zwei Grenzfälle stehender Wellen betrachtet werden. In einem beidseitig geschlossenen Resonator entfielen bei der Resonatorfrequenz f_n auf die Rohrlänge n Halbwellenlängen, d. h. $L = \dfrac{n\lambda_n}{2}$.
In einem einseitig offenen Resonator käme noch eine halbe Halbwellenlänge hinzu, also $L = \dfrac{n\lambda_n}{2} + \dfrac{\lambda_n}{4}$. Mit $f_n = \dfrac{c}{\lambda_n}$ erhielte man also für die beiden genannten Fälle die Resonanzfrequenzen $f_n = \dfrac{c\,n}{2L}$ bzw. $f_n = \dfrac{c\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2L}$.
Die Fälle wären an den Nullstellen der Funktionen $f_n(n)$ unterscheidbar. Der beidseitig geschlossene Resonator hätte eine ganzzahlige, der einseitig offene eine halbzahlige Nullstelle.
Die stehende Welle im KUNDTschen Rohr entspricht (exakt) keinem der beiden genannten Fälle. Sie soll daher aus (2 - 4) berechnet werden. In einer stehenden Welle wandert die Phase nicht mehr.
Vielmehr schwingen alle Wellenteilchen gleichphasig mit der Zeitabhängigkeit $M(t)$ der erregenden Lautsprechermembran. Es wird harmonische Erregung mit $M(t) = v_m \sin(\omega t)$ angenommen.
Die Amplituden der Wellenteilchen unterliegen einer Ortsverteilung $P(x)$. Daher macht man den Ansatz $v(x,t) = M(t)\,P(x)$ für die Wellenfunktion der stehenden Welle.
Mit diesem Ansatz folgt aus (2 - 4) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0 \qquad \text{mit} \qquad \frac{\omega}{c} = k \quad . \qquad (2-5)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet $P(x) = \mathrm{C}\sin(kx) + \mathrm{D}\cos(kx)$. Aus den Randbedingungen $P(x=L) = 0$ (keine Bewegung am festen Rohrende) und $P(x=0) = 1$ (Teilchen schwingen dort mit der Membran) folgt das Gleichungssystem

$$0 = \mathrm{C}\sin(kL) + \mathrm{D}\cos(kL) \qquad \text{und} \qquad 1 = \mathrm{C}\cdot 0 + \mathrm{D}\cdot 1 \quad , \qquad (2-6)$$

nach dessen Auflösung $P(x)$ und damit die Wellenfunktion

$$v = v_m \sin(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \qquad (2-7)$$

angegeben werden können.
In den Resonanzfällen nimmt der Nenner in (2 - 7) für $k_n L = n\pi$ mit $n = 1, 2, \ldots$ große Werte an. (Die Resonanzkatastrophe wird durch die in der Herleitung zwar unberücksichtigte, aber trotzdem vorhandene Dämpfung verhindert).
Der Abstand benachbarter Resonanzfrequenzen und damit der Anstieg von $f_n(n)$ ist auch hier

$$\Delta f = f_\mathrm{n} - f_\mathrm{n-1} = \frac{c}{2\pi}\left(k_\mathrm{n} - k_\mathrm{n-1}\right) \qquad (2-8)$$

bzw.

$$\Delta f = \frac{c}{2\pi}\left(n-(n-1)\right)\frac{\pi}{L} = \frac{c}{2L} \quad . \qquad (2-9)$$

Die Knoten (Nullstellen) der Geschwindigkeit liegen an der Stelle $x = L$ und in jeweils um eine halbe Wellenlänge wachsenden Abständen von dieser. Zwischen den Knoten liegen die Bäuche (Maxima).
Bei $x = 0$ ist streng genommen kein Knoten. Die Schallschnelle ist jedoch dort im Vergleich zu den Maxima so klein, dass die Stelle $x = 0$ einem Knoten nahe kommt. Für die Nullstelle von $f_\mathrm{n}(n)$ ist ein annähernd ganzzahliger Wert zu erwarten.
Die Ortsverteilungen anderer Schallfeldgrößen ergeben sich aus deren Relationen zur Geschwindigkeit. So ist nach (2 - 3) die Zeitableitung $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}$ des Schallwechseldruckes der Ortsableitung von v proportional.
Aus

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\kappa\,\bar{p}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \kappa\,\bar{p}\,k\,v_\mathrm{m}\,\frac{\sin(\omega t)}{\sin(k L)}\cos\left(k(L-x)\right) \qquad (2-10)$$

folgt nach Integration über t

$$\tilde{p} = \int \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\mathrm{d}t = -\frac{\kappa\,\bar{p}\,k\,v_\mathrm{m}}{\omega}\cos(\omega t)\frac{\cos\left(k(L-x)\right)}{\sin(k L)} \qquad (2-11)$$

bzw.

$$\tilde{p} = -\tilde{p}_\mathrm{m}\cos(\omega t)\frac{\cos\left(k(L-x)\right)}{\sin(k L)} \quad . \qquad (2-12)$$

Die Bäuche des Schallwechseldruckes befinden sich also an den Orten der Geschwindigkeitsknoten und umgekehrt.

3 Versuchsanordnung

Als KUNDTsches Rohr wird ein Glasrohr von ca. 5 cm Durchmesser und ca. 1,5 m Länge verwendet. Anregung und Nachweis der stehenden Welle im Rohrinneren können in unterschiedlicher Weise erfolgen. Im vorliegenden Versuch werden zwei Rohre eingesetzt, eines mit Glühdraht (G - Rohr) im Vorversuch und eines mit Mikrofon (M - Rohr) zum Messen. Die Anregung erfolgt bei beiden Rohren an einem Ende ($x = 0$) durch Lautsprecher und Generator. Das andere Rohrende ($x = L$) ist durch eine feste Wand begrenzt.
Zum Nachweis der stehenden Welle dient entweder die Verteilung der Geschwindigkeit (im G - Rohr) oder die des Druckes (im M - Rohr). Im Vorversuch wird die Geschwindigkeitsverteilung mit dem Glühdraht nur demonstriert. Messungen werden nicht vorgenommen, sie wären zu ungenau und zudem durch die Erwärmung verfälscht.
Im M - Rohr wird der Druck auf der Rohrachse im Bauch bei $x = L$ von einem Mikrofon zeitlich registriert und auf dem Bildschirm eines Oszilloscops dargestellt. Neben dem Mikrofon befindet sich ein Temperatursensor.
Die Amplitude des Druckes an der Messstelle nimmt große Werte an, wenn $\sin(k L)$ in (2 - 12) sehr klein wird. Beim Durchstimmen der Tonfrequenz wird daher die Amplitude immer dann ein relatives Maximum annehmen, wenn man eine der Resonanzfrequenzen f_n erreicht. Die Resonanzfrequenzen werden mit einem Frequenzmesser gemessen. Die Zählung von n beginnt bei der kleinsten auftretenden Resonanzfrequenz willkürlich mit 1 , ausgewertet wird der Anstieg $\frac{c}{2L}$ der Kurve $f_\mathrm{n}(n)$.
Bei der Angabe der Schallgeschwindigkeit ist die Temperatur zu berücksichtigen. Es gilt mit den Normzustandswerten $\bar{p}_0$, $\bar{\rho}_0$ und T_0

$$c = \sqrt{\frac{\kappa\,\bar{p}}{\bar{\rho}}} = \sqrt{\frac{\kappa\,\bar{p}_0\,T}{\bar{\rho}_0\,T_0}} = \sqrt{\frac{\kappa\,\bar{p}_0}{\bar{\rho}_0}}\sqrt{1+\frac{T-T_0}{T_0}} \quad , \qquad (3-1)$$

daraus wird genähert

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \bar{p}_0}{\bar{\rho}_0}} \left(1 + \frac{T - T_0}{2T_0}\right) \quad . \qquad (3-2)$$

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt sind die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.
Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1 Man beobachte die stehende Welle im Glühdrahtrohr und gebe eine kurze Beschreibung der Erscheinung.
4.2 Die eingestellte Länge des Resonanzrohres ist zu messen. Bei dieser Länge ist eine Folge von Resonanzfrequenzen f_n aufzunehmen.
4.3 Die Schallgeschwindigkeit ist mit Hilfe der linearen Regression zu bestimmen.
4.4 Man ermittle die Nullstelle n_0 der Ausgleichsgeraden und die Grundfrequenz f_g sowie die zugehörige Wellenlänge λ_g .
4.5 Für die kleinste und die größte der gemessenen Frequenzen f_n gebe man die Wellenlängen an.
4.6 Man messe die Temperatur T im Resonanzrohr und überprüfe damit die Beziehung (3 – 2).

5 Fragen

5.1 Schreiben Sie die eindimensionale Wellengleichung für Luftschall auf.
5.2 Welche physikalischen Größen schwingen in welcher Beziehung zur Ausbreitungsrichtung a) in Seilwellen, b) in Lichtwellen und c) in Schallwellen?
5.3 Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit von Luft im Normzustand ($\bar{p}_0 = 101300$ Pa , $\bar{\rho}_0 = 1{,}293$ kg m^{-3} , $\kappa = 1{,}4$).
5.4 Auf welche verschiedene Art und Weise kann die stehende Welle im KUNDTschen Rohr nachgewiesen werden und welche Schallgrößen werden dabei jeweils erfasst?
5.5 Welche Beziehungen gibt es zwischen den Größen Wellenlänge λ, Frequenz f, Wellenzahl k, Kreisfrequenz ω und Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Welle?
5.6 Überlagern Sie eine nach rechts und eine nach links laufende ebene harmonische Welle gleicher Amplitude und Frequenz additiv und diskutieren Sie das Ergebnis. Verwenden Sie dazu das Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$.
5.7 Skizzieren Sie das im Versuch verwendete KUNDTsche Mikrofon-Rohr und dazu die Verteilungen von Schallwechseldruck und Schallschnelle auf der Rohrachse bei Resonanz.
5.8 Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $v = v_m \cos(\omega t + kx)$ einer ebenen harmonischen Welle die eindimensionale Wellengleichung erfüllt.
5.9 In einem beidseitig geschlossenen Resonator wird eine Folge von Resonanzfrequenzen f_n über ihrer Ordnungszahl n aufgenommen. Wie lautet die Gleichung $f_n(n)$ und wie bestimmt man daraus die Schallgeschwindigkeit c?
5.10 In einem einseitig offenen Resonator wird eine Folge von Resonanzfrequenzen f_n' über ihrer Ordnungszahl n aufgenommen. Wie lautet die Gleichung $f_n'(n)$ und wie bestimmt man daraus die Schallgeschwindigkeit c?

Literatur

[1] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)

[2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012 (11. Auflage)
ISBN : 978-3-642-22568-0 (Hardcover) / 978-3-642-22569-7 (eBook)