

## Versuchsanleitung S 7 : Federpendel

### 1 Einleitung

Die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse  $A$  verdient wegen ihrer zahlreichen technischen Anwendungen (Motoranker, Räder, Schwungmassen, Wellen ...) besonderes Interesse.

Die Drehwinkel-Zeit-Funktion  $\varphi(t)$  - und damit der Bewegungsablauf - wird bei o. g. Rotation bestimmt durch:

- $J_A$  : das Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich der Achse  $A$
- $M_A$  : das Drehmoment bezüglich der Achse  $A$

und die Anfangsbedingungen  $\varphi(t=0)$  und  $\dot{\varphi}(t=0)$  .

Der Größe  $M_A$  gilt das besondere Anliegen des Versuches.

An einem ausgewählten starren Körper - einem Federpendel - wird der Einfluss mehrerer Kräfte und des von ihnen bewirkten  $M_A$  auf den Bewegungsablauf untersucht.

Das Federpendel vollführt dabei eine periodische Bewegung. Durch die Messung der Schwingungsdauer  $T$  lässt sich an dieser der Zeitablauf leichter erfassen als bei anderen, nichtperiodischen Rotationsbewegungen.

### 2 Grundlagen

Der starre Körper sei um eine feste Achse  $A$  drehbar gelagert und besitze bezüglich dieser das Massenträgheitsmoment  $J_A$  . Ein Einheitsvektor  $\vec{e}_A$  gibt die Achsenrichtung an, er bildet mit dem positiven Zählsinn des Drehwinkels  $\varphi$  eine Rechtsschraube. An dem starren Körper können beliebig viele Drehmomente  $\vec{M}_i$  angreifen, ihre Summe

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \quad (2-1)$$

nennt man das (resultierende) Drehmoment.

Für die Rotation um  $A$  ist  $\vec{M}$  nur mit  $M_A$  - seiner Koordinate in Achsenrichtung - wirksam. Man erhält sie durch die Projektion von  $\vec{M}$  auf  $\vec{e}_A$  als

$$M_A = \vec{M} \cdot \vec{e}_A = \left( \sum_i \vec{M}_i \right) \cdot \vec{e}_A = \sum_i \left( \vec{M}_i \cdot \vec{e}_A \right) . \quad (2-2)$$

Die Koordinate (bzw. das Skalarprodukt)  $M_A$  ist eine vorzeichenbehaftete skalare Größe - also weder ein Vektor noch der Betrag eines solchen.

In der Bewegungsgleichung der Rotation um die feste Achse

$$J_A \ddot{\varphi} = M_A (\varphi, \dot{\varphi}, t) \quad (2-3)$$

kann  $M_A$  vom Winkel  $\varphi$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und auch explizit von der Zeit  $t$  abhängen.

Die Gleichung (2-3) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\varphi(t)$  . Löst man sie mit geeigneten mathematischen Methoden, so liegt mit  $\varphi(t)$  die vollständige Beschreibung des Bewegungsablaufes vor.

Gegebenenfalls zu  $\vec{e}_A$  senkrechte Komponenten von  $\vec{M}$  tragen zur Bewegung um  $A$  nichts bei. Sie belasten die Achslager und werden durch Zwangs- oder Stützmomente kompensiert.

### 3 Versuchsanordnung

Das Federpendel besteht aus einem Stab der Masse  $m'$ , an dessen unterem Ende ein Zylinder der Masse  $m''$  angebracht ist (vgl. Bild 1).

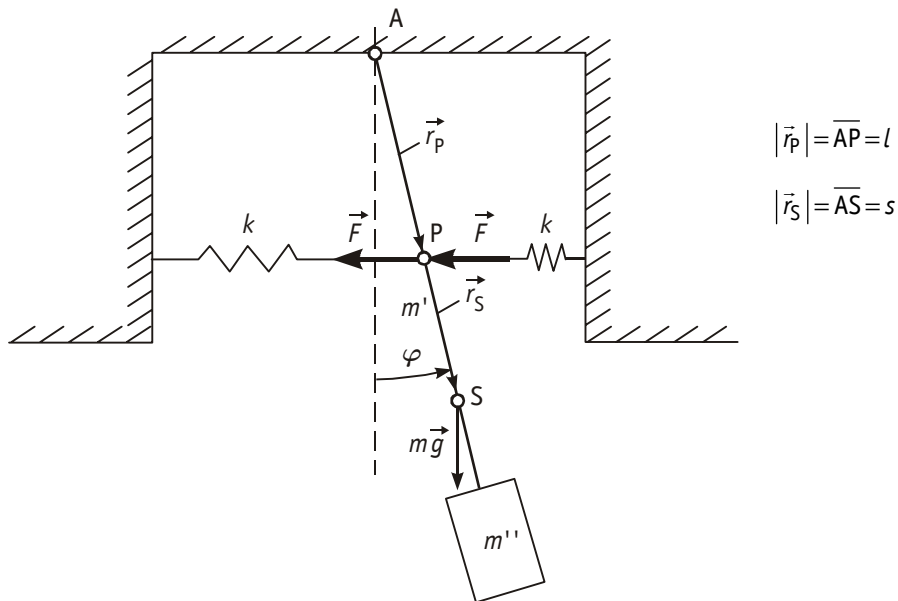


Bild 1 Federpendel

Der Schwerpunkt  $S$  der Gesamtmasse  $m = m' + m''$  liegt am Ort  $\vec{r}_S$  im Abstand  $s$  von der Drehachse  $A$ . Das obere Ende des Stabes ist an einem Rahmen so gelagert, dass sich das Federpendel um  $A$  drehen kann. Im Punkt  $P$  am Ort  $\vec{r}_P$  - dessen Abstand  $l$  zu  $A$  variiert werden kann - greifen zwei Federn der Federkonstanten  $k$  an. Neben der Gewichtskraft  $m\vec{g}$  wirken die beiden gleichgroßen Federkräfte  $\vec{F}$  sowie Luft- und Lagerreibungskräfte auf das Pendel ein. Diese Kräfte liegen alle in der Zeichenebene. Der Einheitsvektor  $\vec{e}_A$  steht auf der Zeichenebene senkrecht und weist zum Betrachter.

Bei einer Auslenkung des Pendels um  $\varphi$  (vgl. Bild 1) bewirkt die Gewichtskraft das Moment

$$\vec{M}_G = \vec{r}_S \times m\vec{g} = -\vec{e}_A s m g \sin\varphi \quad (3-1)$$

Hält man die Ausschläge klein, kann in (3-1) die Sinusfunktion durch ihr Argument  $\varphi$  genähert werden und es folgt

$$\vec{M}_G = -\vec{e}_A m g s \varphi \quad (3-2)$$

Bei den erwähnten kleinen Ausschlägen des Pendels kann die Bewegung des Punktes  $P$  näherungsweise als horizontal und geradlinig angesehen werden.

Die linke Feder wird so um  $l\varphi$  gedehnt und die rechte um  $l\varphi$  zusammengedrückt. Das von beiden Federn gemeinsam bewirkte Moment ist

$$\vec{M}_F = \vec{r}_P \times 2\vec{F} = -\vec{e}_A l 2k(l\varphi) = -\vec{e}_A 2kl^2\varphi \quad (3-3)$$

Für das Reibungsmoment wird summarisch der Ansatz

$$\vec{M}_R = -\vec{e}_A R\dot{\varphi} \quad (3-4)$$

gemacht. Es wirkt stets bewegungshemmend und ist dem Betrage nach mit dem Faktor  $R$  (näherungsweise) dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit proportional.

Durch Projektion des resultierenden Momentes  $\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_F + \vec{M}_R$  auf die Achsenrichtung erhält man mit (3-2) bis (3-4)

$$M_A = \vec{M} \vec{e}_A = - (m g s + 2k l^2) \varphi - R \dot{\varphi} \quad . \quad (3-5)$$

Die Bewegungsgleichung (2-2) wird damit zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{R}{J_A} \dot{\varphi} + \frac{m g s + 2k l^2}{J_A} \varphi = \ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (3-6)$$

und besitzt - wie man durch Einsetzen überprüfen kann - die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha) \quad . \quad (3-7)$$

Das ist die Winkel-Zeit-Funktion einer gedämpften Drehschwingung mit der Amplitude  $\varphi_0$  und dem Nullphasenwinkel  $\alpha$ , der Abklingkonstanten  $\delta = \frac{R}{2J_A}$  und der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Es gilt dabei

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad . \quad (3-8)$$

Ist die Dämpfung schwach ( $\delta^2 \ll \omega^2$ ), so gilt annähernd

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 = \frac{m g s + 2k l^2}{J_A} \quad . \quad (3-9)$$

Misst man nun die Schwingungsdauer  $T$  des Federpendels in Abhängigkeit von  $l$  und stellt  $\frac{1}{T^2}$  als Funktion von  $l^2$  dar, so erhält man wegen (3-9) die Gerade

$$\frac{1}{T^2} = \frac{m g s}{4\pi^2 J_A} + \frac{k}{2\pi^2 J_A} l^2 \quad , \quad (3-10)$$

aus deren Anstieg und Absolutglied man z. B. bei bekanntem  $m$  und  $J_A$  die Federkonstante  $k$  und den Schwerpunktabstand  $s$  bestimmen kann.

Um die Abklingkonstante  $\delta$  zu bestimmen, zeichnet man z. B. die Funktion  $\varphi(t)$  oder die (bei kleinen Ausschlägen) dazu proportionale Horizontalauslenkung  $y(t)$  des Pendels auf. Dabei müssen nach (3-7) die aufeinanderfolgenden Maximalauslenkungen auf der einhüllenden Exponentialfunktion  $e^{-\delta t}$  liegen. Eine an  $y(t)$  mit dem Computer durchgeführte Kurvenanpassung für die einhüllenden Exponentialfunktion liefert die Parameter dieser Funktion aus denen dann die Abklingkonstante  $\delta$  berechnet werden kann.

Mit dem so bestimmten  $\delta$ -Wert kann die Gültigkeit der Näherungsformel (3-9) im Experiment nachgewiesen werden.

## 4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Man messe für verschiedene Federangriffspunkte P die Schwingungsdauern des Federpendels.
- 4.2 Aus der graphischen Darstellung  $\frac{1}{T^2} = f(l^2)$  bestimme man bei gegebenen  $J_A$  und  $m$  die Federkonstante  $k$  und den Schwerpunktabstand  $s$ .
- 4.3 Man zeichne mittels eines Bewegungsaufnehmers die Zeitfunktion  $y(t)$  auf und schätze daraus die Abklingkonstante  $\delta$  ab. Das Pendel dabei ohne Federn schwingen lassen.
- 4.4 Man zeige, dass  $\delta^2$  vernachlässigbar klein gegen  $\omega^2$  ist.

## 5 Fragen

- 5.1 Geben Sie die Definitionsgleichung des Massenträgheitsmomentes  $J_A$  bezüglich der festen Achse A an (mit Skizze).
- 5.2 Eine Kraft  $\vec{F}$  greift im Punkte P ( Ortsvektor  $\vec{r}_P$  ) an. Schreiben Sie den Drehmomentenvektor der Kraft  $\vec{F}$  bezüglich eines Drehpunktes D ( Ortsvektor  $\vec{r}_D$  ) auf und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
- 5.3 Welche Beziehungen bestehen zwischen der Schwingungsdauer, der Frequenz und der Kreisfrequenz einer Schwingung?
- 5.4 Die Bewegungsgleichung des ungedämpften Federpendels lautet  $\ddot{\varphi} + \frac{m g s + 2k l^2}{J_A} \varphi = 0$  .  
Geben Sie seine Frequenz  $f$  an.
- 5.5 Wie lautet das dynamische Grundgesetz für die Rotation des starren Körpers um eine feste Achse A (mit Skizze)?
- 5.6 Zeigen Sie, dass die Funktion  $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$  eine Lösung der Bewegungsgleichung  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$  ist.
- 5.7 Erläutern Sie den Begriff "raum- und körperfeste Achse".
- 5.8 Leiten Sie für  $s = \frac{a_0 J_A 4\pi^2}{m g}$  eine Fehlerformel her, wenn  $a_0$ ,  $J_A$ ,  $m$  und  $g$  fehlerbehaftet sind.
- 5.9 Geben Sie drei Maßeinheiten für das Drehmoment an. Welche anderen physikalischen Größen werden auch in diesen Einheiten gemessen?
- 5.10 Welchen relativen Fehler begeht man durch die Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  für  $\varphi = 5^\circ$  ?

## Literatur

- [ 1 ] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum  
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)  
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)
- [ 2 ] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012 (11. Auflage)  
ISBN : 978-3-642-22568-0 (Hardcover) / 978-3-642-22569-7 (eBook)