Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften
Physikalisches Praktikum / Sommersemester 2002

Versuchsanleitung W 6 : Wärmeleitung

1. Einleitung

Die Reduzierung der Wärmeverluste, d.h. der aus einem Gebäude an die Umgebung abfließenden Wärmeenergie, senkt die Heizkosten, schont die Energieressourcen und mindert die Schadstoffbelastung der Umwelt. Durch zweckmäßiges Bauen, insbesondere die Realisierung großer Wärmewiderstände der äußeren Gebäudehülle, werden Wärmeverluste verringert.
Große Wärmewiderstände erreicht man durch den Einsatz von Bau- und Dämmstoffen geringer Wärmeleitfähigkeit und großer Schichtdicke.
Im vorliegenden Versuch lernen Sie ein Verfahren zur Messung der Wärmeleitfähigkeit kennen, das auch für Baustoffe eingesetzt wird.

2. Grundlagen

2.1. Die Wärmeleitungsgleichung
Im homogenen Medium kann der Wärmeleitungsgleichung [3] die Gestalt

$$c\,\rho\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\Delta T + q_v \qquad (2-1)$$

gegeben werden.
Sie ist eine partielle Differentialgleichung für das Temperaturfeld $T(\vec{r},t)$, d. h. die im allgemeinen orts- und zeitabhängige Verteilung der Temperatur im wärmeleitenden Körper. In (2 - 1) sind t die Zeit, c die spezifische Wärmekapazität, ρ die Dichte des Materials und λ die Wärmeleitfähigkeit.
Das Symbol Δ bezeichnet den sogenannten Laplace-Operator. In kartesischen Koordinaten (x , y , z) gilt

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \qquad (2-2)$$

Die Größe q_v ist die Leistungsdichte der inneren Wärmeproduktion. Sie berücksichtigt, daß im Material z.B. durch elektrischen Strom, Strahlungsabsorption oder chemische Reaktionen Wärme entwickelt werden kann.
Die Wärmeleitungsgleichung (2 - 1) hat die physikalische Aussage des ersten Hauptsatzes:
Die innere Energie eines Volumenelementes (und somit T) ändert sich zeitlich (linke Seite), wenn die Summe aus der mit den benachbarten Elementen getauschten Wärme (erster Term rechts) und der im betrachteten Element produzierten Wärme (zweiter Term rechts) nicht Null wird.
Mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung (2 - 1) lassen sich schrittweise folgende Größen gewinnen:

- <u>das Temperaturfeld</u>: Es stellt die Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei Kenntnis einer Anfangsbedingung $T(\vec{r},o) = T_o(\vec{r})$ und zweier Randbedingungen [Temperatur und Wärmestromdichte auf dem Rand (Grenze zur Umgebung)] dar.
- <u>die Wärmestromdichte:</u> Nach dem Fourierschen Gesetz gilt für die Wärmestromdichte

$$\vec{j}_Q = -\lambda \;\mathrm{grad}\; T \quad . \qquad (2-3)$$

Man sieht in (2 - 3) , daß die Wärmestromdichte stets die Richtung des stärksten Temperaturgefälles (- grad T) besitzt. In kartesischen Koordinaten ist

$$\mathrm{grad}\; T = \vec{i}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial T}{\partial z} \quad . \qquad (2-4)$$

- <u>der Wärmestrom:</u> Die Wärmestromdichte sei für jeden Punkt einer Fläche A im Inneren oder auf dem Rand des wärmeleitenden Körpers bekannt. Dann tritt durch ein differentiell kleines Flächenelement $d\vec{A}$ auf A ein differentiell kleiner Wärmestrom

$$d\dot{Q} = -\vec{j}_Q \, d\vec{A} \quad . \qquad (2 - 5)$$

Der Vektor $d\vec{A}$ steht auf dem Flächenelement senkrecht und kennzeichnet so dessen Lage im Raum. Bei geschlossenen Flächen (z.B. einer Kugelfläche) zeigt $d\vec{A}$ stets nach außen. Das Skalarprodukt in (2 - 5) berücksichtigt, daß der differentielle Wärmestrom $d\dot{Q}$ davon abhängt, wie die Wärmestromdichte das Flächenelement durchsetzt.Das negative Vorzeichen in (2 - 5) sorgt dafür, daß bei geschlossenen Oberflächen Wärmeströme, die von innen nach außen fließen, negativ gezählt werden. Den gesamten Wärmestrom $\dot{Q}$ erhält man durch Integration aller differentiellen Wärmeströme auf A

$$\dot{Q} = \int d\dot{Q} = -\iint_A \vec{j}_Q \, d\vec{A} \quad . \qquad (2 - 6)$$

- <u>die Wärmemenge:</u> Fließt durch A im Zeitintervall $[t_1 ; t_2]$ der Wärmestrom $\dot{Q}\,(t)$, so transportiert er die Wärmemenge

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}\,(t)\, dt \quad . \qquad (2 - 7)$$

Ein Spezialfall des Wärmeleitungsproblemes ist die instationäre Wärmeleitung mit linienförmiger Wärmequelle. Sie ist näherungsweise in der Versuchsapparatur verwirklicht.
Man trifft die Annahmen:
- der Körper ist unendlich ausgedehnt
- auf der z - Achse befindet sich eine linienförmige Wärmequelle, die für $t \geq 0$ pro Länge l die konstante Leistung P entwickelt
- man wählt Zylinderkoordinaten. Aus Symmetriegründen kann T nur von r abhängen. Dann ist nach [3]

$$\left[\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \qquad (2 - 8)$$

- die Anfangsbedingung ist $T\,(t = 0) = T_o = \text{const}$
- am Rand $(r \to \infty)$ ist T immer T_o und die Wärmestromdichte immer Null.

Man erhält damit aus (2 - 1) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\,\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{P}{l\,c\,\rho}\, \delta\,(r) \quad . \qquad (2 - 9)$$

Die sogenannte Dirac-Funktion $\delta\,(r)$ ist nur für $r = 0$ von Null verschieden und begrenzt so die Wärmequelle auf die z - Achse. Die Gleichung (2 - 9) ist elementar nicht lösbar. Nach [3] findet man mit $\vartheta = T - T_o$ die Lösung

$$\vartheta\,(r,t) = \frac{P}{4\pi\, l\, \lambda} \int_{\frac{\rho\, c\, r^2}{4\,\lambda\, t}}^{\infty} u^{-1}\, e^{-u}\, du \qquad (2 - 10)$$

und als Näherung von (2 - 10) für gegen 1 große Werte von $\left(4\,\lambda\, t / \rho\, c\, r^2\right)$

$$\vartheta\,(r,t) = (P / 4\pi\, l\, \lambda)\, \ln\,(4\,\lambda\, t / c\,\rho\,\gamma\, r^2) \quad . \qquad (2 - 11)$$

Dabei ist γ eine Konstante, die für die Auswertung des Versuches nicht explizit bekannt sein muß.

Fragen

2.1. Warum sind zur Lösung des Wärmeleitungsproblems zwei Rand- und eine Anfangsbedingung erforderlich?

2.2. Welche Richtung hat die Wärmestromdichte in einem kugelsymmetrischen Temperaturfeld, dessen maximale Temperatur im Kugelzentrum vorliegt?

2.3. Von welcher Zeit t' an gilt die Näherung (2 - 11) , wenn $4\,\lambda\,t' / \rho\,c\,r^2 \geq 100$ gefordert wird?

$\rho = 2{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$; $\lambda = 1{,}28\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

$c = 840\ \mathrm{Ws\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $r = 1$ mm

2.4. Wodurch unterscheiden sich stationäre von instationären Wärmeleitungsproblemen?

3. Versuchsanordnung

Als Wärmequelle dient ein dünner, in die Probe eingegossener und elektrisch beheizter Draht der Länge l . Mit einem Thermoelement, dessen Meßstelle ebenfalls in die Probe eingegossen ist und sich in der Nähe des Heizdrahtes befindet, wird die Temperaturmessung vorgenommen. Die Vergleichstemperatur wird in einem Dewar-Gefäß konstant gehalten.
Die Probe ist natürlich nicht von unendlicher Ausdehnung; sie ist aber immerhin so groß, daß innerhalb einer bestimmten Meßdauer die geforderten Randbedingungen (vgl. Kap. 2) erfüllt werden.
Die Wärmekapazität des Heizdrahtes und der Wärmeübergangswiderstand zwischen Heizdraht und Probe werden vernachlässigt. Man schaltet zur Zeit $t = 0$ den Heizstrom (Heizleistung $P = U\,I$) ein und verfolgt den Temperaturanstieg der Meßstelle an einem in Temperatureinheiten kalibrierten Galvanometer.
Sind ϑ_2 und ϑ_1 zwei zu den Zeiten t_2 und $t_1 < t_2$ gemessene Temperaturen, so folgt aus (2 - 11)

$$\lambda = \frac{P \ln\left(t_2 / t_1\right)}{4\pi\, l \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)} = \frac{P \lg\left(t_2 / t_1\right)}{4\pi\, l\, (\lg e) \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)} \quad . \qquad (3 - 1)$$

Da (2 - 11) für kleine Meßzeiten noch nicht gilt (vgl. Frage 2.3.) und für sehr große Zeiten die Randbedingungen des Modells verletzt werden, weil der Wärmestrom die Probenoberfläche erreicht, wird zur Berechnung von λ nach (3 - 1) der Bereich mittlerer Meßzeiten, erkennbar am linearen Zusammenhang zwischen λ und ln (t / min) , herangezogen.

4. Fragen

4.1. Man leite (3 - 1) aus (2 - 11) her.

4.2. Stört eine konstante additive Abweichung bei der Temperaturmessung die Berechnung von l nach (3 - 1) ?

4.3. Erklären Sie die Funktionsweise eines Thermoelementes.

4.4. Welcher Umrechnungsfaktor besteht zwischen $\ln x$ und $\lg x$?

4.5. Entwickeln Sie eine Fehlerformel für l nach (3 - 1) , wenn alle Meßgrößen außer t fehlerbehaftet sind.

5. Aufgaben

In diesem Abschnitt sind die zu lösenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.
Genauere Hinweise befinden sich am Arbeitsplatz.

5.1. Aufnahme der Temperatur-Zeit-Kurve und Ermittlung der Heizleistung.

5.2. Eingabe der Meßwerte in den PC. Graphische Darstellungen J (t) und J (ln t / min) auf dem Bildschirm. Berechnung von l aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden in logarithmischer Darstellung.

5.3. Graphische Darstellung von $\vartheta = f\left(\lg \frac{t}{\min}\right)$ auf halblogarithmischem Papier.

5.4. Berechnung von l nach (3 - 1) einschließlich Fehlerabschätzung.

Literatur

[1] Geschke, D. (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Teubner-Verlag, Leipzig, 1998
ISBN 3-519-00206-X

[2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, 1997
ISBN 3-540-62141-5

[3] Tautz, H. : Wärmeleitung und Temperaturausgleich
Akademie-Verlag, Berlin, 1971