

## Berechenbarkeit und Komplexität Sommersemester 03

### Aufgabenserie 4 – bis 23. 6. 03

---

DIAG) Das folgende Schema heißt *Diagonal-Argument*.

1. Wir betrachten eine Klasse von Funktionen  $F$  und eine Aufzählung  $f_0, f_1, f_2, \dots$  aller ihrer Elemente (d. h. zu jedem  $f \in F$  gibt es wenigstens einen Index  $i$ , so daß  $f = f_i$ ).
2. Wir bilden die Diagonal-Funktion  $d : x \mapsto f_x(x) + 1$ . Diese kommt auch in  $F$  vor, und deswegen auch in der Aufzählung. Für die Funktion  $d$  gibt es also einen Index  $i$  mit  $d = f_i$ .
3. Dann berechnen wir  $d(i)$ , und erhalten einen Widerspruch: Weil  $i$  ein Index für  $d$  ist, gilt  $d(i) = f_i(i)$ ; andererseits ist  $d$  so definiert, daß  $d(i) = f_i(i) + 1$ .

Diskutieren Sie jeweils für die Funktionenklassen

(5 Punkte)

1. konstante Funktionen,
2. primitiv rekursive Funktionen,
3. totale  $\mu$ -rekursive Funktionen,
4. totale Funktionen,
5.  $\mu$ -rekursive Funktionen,

welcher der Schritte 1. bis 3. ein Trugschluß ist.

---

ENT) Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind. Geben Sie jeweils Beweis oder Gegenbeispiel an.

Für jede totale  $\mu$ -rekursive Funktion  $f$ , entscheidbare Menge  $A$ , und aufzählbare Menge  $B$  ist:

1.  $f(A)$  entscheidbar,
2.  $f(A)$  aufzählbar,
3.  $f^{-1}(A)$  entscheidbar,
4.  $f(B)$  entscheidbar,
5.  $f^{-1}(B)$  aufzählbar.

(5 Punkte)