Aufgabenblatt 9 vom 15. 12.

Zur Besprechung in der Übung am 18. 12.

Besprechung der Aufgaben (S7-1) und (S7-2).

Ü9-1 Ein Kreis $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ lässt sich in koordinatengeometrischer Interpretation als Quadrupel (c_0, c_1, c_2, c_3) mit

$$K = \left\{(p_x, p_x) : c_0\, \left(x^2 + y^2\right) + c_1\, x + c_2\, y + c_3 = 0\right\}$$

anschreiben. Die Koordinaten $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ bezeichnet man auch als *homogene Kreiskoordinaten*, denn sie sind wie homogene Geradenkoordinaten nur bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt. Für $c_0 = 0$ entartet der Kreis zu einer Geraden. $k = \texttt{Circle}(c_0, c_1, c_2, c_3)$ bezeichne einen solchen Kreis, der intern als Liste $[c_0, c_1, c_2, c_3]$ dargestellt ist.

Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um Funktionen `circle_center(k)` zur Berechnung des Mittelpunkts $M(x_0, y_0)$ von k sowie `circle_sqradius(k)` zur Berechnung von r^2.

Ü9-2 Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um ein Funktion `p3_circle(A,B,C)`, welche zu drei Punkten A, B, C den Umkreis bestimmt.

Prüfen Sie Ihre Implementierung, indem Sie zeigen, dass der mit `circle_center(k)` konstruierte Mittelpunkt dieses Kreises auf den drei Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC liegt.

Ü9-3 Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um ein Funktion `on_circle(A,k)`, welche für einen Punkt A prüft, ob er auf dem Kreis k liegt.

Zur schriftlichen Korrektur, Abgabe bis 12. 1., Besprechung am 15. 1.

Weiteres zu LLL

S9-1 Effizientere Implementierung von LLL.

- Unter Benutzung der autotool-Aufgabe
  `https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/cgi-bin/Trial.cgi?topic=Lattice_LLL-Direct`:

  Beobachten Sie experimentell die Wirkung von `Reduce` und `Swap` auf die orthogonalen Anteile (b_i^*), die Koeffizienten $(\mu_{i,j})$ und die Terminations-Variante $(\prod_i \det \operatorname{span}(b_1 \ldots, b_i))$.
- Formulieren Sie diese Eigenschaften als Sätze. (Bsp: Die Variante ändert sich nicht bei `Reduce`)
- Beweisen Sie diese.

- Wie kann man die Sätze für eine effizientere Implementierung von LLL ausnutzen?

  Naive Implementierung im autotool, Quelltexte erreichbar über Dokumentations-Link unter Eingabefenster.

  Bsp: dort wird $\mu_{i,j}$ nach jedem Schritt komplett neu ausgerechnet.
  (modul `Lattice.LLL.Compute`, Aufruf von `ortho` in `apply`). Muß das sein?

S9-2 Termination von LLL. Beweisen Sie, daß die *Variante* ($\prod_i \det \operatorname{span}(b_1 \ldots, b_i)$) bei `Swap` (von b_i mit b_{i+1}) abnimmt, wenn vorher b_{i+1} bzgl. b_i größenreduziert war (d.h. $|\mu_{i+1,i}| \leq 1/2$).

Weitere Konstruktionswerkzeuge und geometrische Sätze vom rationalen konstruktiven Typ

S9-3

Satz 1 (Satz von der Eulerschen Geraden) *In jedem Dreieck ABC liegen der Umkreismittelpunkt M, der Höhenschnittpunkt H und der Schwerpunkt S auf einer Geraden und S teilt $\overline{MH}$ im Verhältnis* $2:1$.

Geben Sie ein GLP (in Maxima-Notation) an, mit dem diese geometrische Konfiguration erzeugt werden kann, und eine geometrische Eigenschaft, welche der Aussage des Satzes entspricht. Bestimmen Sie die Degenerationsbedingung dieser geometrischen Konfiguration.

S9-4

Satz 2 (Satz vom Feuerbachschen Kreis) *In jedem Dreieck ABC liegen die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmitten und die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte (also die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ und $\overline{CH}$, wobei H den Höhenschnittpunkt bezeichnet) auf einem Kreis, dem* Feuerbach- *oder* Neun-Punkte-Kreis.

Geben Sie ein GLP (in Maxima-Notation) an, mit dem diese geometrische Konfiguration erzeugt werden kann, und eine geometrische Eigenschaft, welche der Aussage des Satzes entspricht. Bestimmen Sie die Degenerationsbedingung dieser geometrischen Konfiguration.

S9-5 Ergänzen Sie `geoprover.maxima` um ein Funktion `p9_circle(A,B,C)`, welche für drei Punkte A, B, C diesen Kreis zurückgibt.

S9-6

Satz 3 (Satz von Pappus) *Sind die Punkte A_1, A_2, A_3 sowie B_1, B_2, B_3 jeweils kollinear, so auch die Schnittpunkte $X = A_1B_2 \wedge A_2B_1$, $Y = A_1B_3 \wedge A_3B_1$ und $Z = A_2B_3 \wedge A_3B_2$.*

Geben Sie ein GLP (in Maxima-Notation) an, mit dem diese geometrische Konfiguration erzeugt werden kann, und eine geometrische Eigenschaft, welche der Aussage des Satzes entspricht. Bestimmen Sie die Degenerationsbedingung dieser geometrischen Konfiguration.

$\boxed{\textbf{S9-7}}$

Satz 4 (Satz von Desargue) *Für zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ gehen die Verbindungslinien A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn die Schnittpunkte $C_1 = A_2A_3 \wedge B_2B_3$, $C_2 = A_1A_3 \wedge B_1B_3$ und $C_3 = A_1A_2 \wedge B_1B_2$ auf einer gemeinsamen Geraden l liegen.*

Dieser Satz der projektiven Geometrie wird „elementar“ bewiesen, indem l durch eine projektive Transformation (die Schnittpunkteigenschaft und Kollinearität erhält) in die Ferngerade l_0 überführt wird. Mit dieser Vereinfachung geht der Satz von Desargue in seine „affine“ Variante über.

Satz 5 (Affiner Satz von Desargue) *Für zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_2$ mit $A_2A_3 \parallel B_2B_3$ und $A_1A_3 \parallel B_1B_3$ gilt:*
Die Verbindungslinien A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ gilt.

a) Als „genau dann, wenn“ Aussage sind in diesem Fall zwei Sätze zu zeigen.

   Geben Sie für den affinen Satz von Desargue zwei GLPs (in Maxima-Notation) an, mit denen jeweils die erforderliche geometrische Konfiguration erzeugt werden kann, und eine geometrische Eigenschaft, welche der zu beweisenden Aussage entspricht. Bestimmen Sie jeweils die Degenerationsbedingung dieser geometrischen Konfiguration.

b) Führen Sie dasselbe für den allgemeinen Satz von Desargue aus.