Constraint-Programmierung Vorlesung Sommersemester 2009,12,15, WS 2016,22,23

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

1. Februar 2024

Einleitung

Constraint-Programmierung—Beispiel

```
(set-logic QF_NIA)(set-option :produce-models true)
(declare-fun P () Int) (declare-fun Q () Int)
(declare-fun R () Int) (declare-fun S () Int)
(assert (and (< 0 P) (<= 0 Q) (< 0 R) (<= 0 S)))
(assert (> (+ (* P S) Q) (+ (* R Q) S)))
(check-sat)(get-value (P Q R S))
```

- *Constraint-System*: eine prädikatenlogische Formel F
  $0 < P \wedge \cdots \wedge P \cdot S + Q > R \times Q + S$
- *Lösung*: Interpretation (Var.-Belegung), für die F wahr ist
- CP ist eine Form der *deklarativen* Programmierung.
- *Vorteil*: Benutzung von allgemeinen Suchverfahren (bereichs-, aber nicht anwendungsspezifisch).

Industrielle Anwendungen der CP

- Verifikation von Schaltkreisen
  (*bevor* man diese tatsächlich produziert)
  $F =$ S-Implementierung$(x) \neq$ S-Spezifikation(x)
  wenn F unerfüllbar ($\neg\exists x$), dann Implementierung korrekt
- Verifikation von Software durch *model checking*:
  Programmzustände abstrahieren durch Zustandsprädikate, Programmabläufe durch endliche Automaten.
  z. B. Thomas Ball et al. 2004: *Static Driver Verifier*
  `https://www.microsoft.com/en-us/research/project/slam/publications/`
  benutzt Constraint-Solver Z3 (Nikolaj Björner et al., 2007–) `https://github.com/Z3Prover/z3/wiki`

Industrielle Anwendungen der CP

- automatische Analyse des Resourcenverbrauchs von Programmen
  – Termination (jede Rechnung hält)
  – Komplexität (. . . nach $O(n^2)$ Schritten)
- mittels *Bewertungen* von Programmzuständen:
  – W : Zustandsmenge $\to \mathbb{N}$
  – wenn $z_1 \to z_2$, dann $W(z_1) > W(z_2)$.
- Parameter der Bewertung werden durch Constraint-System beschrieben.
- vgl. Carsten Fuhs: *Automated Termination Analysis. . .*, Intl. School on Rewriting, 2022 `http://viam.science.tsu.ge/clas2022/isr/termination.html`

CP-Anwendung: Polynom-Interpretationen

- Berechnungsmodell: Wortersetzung ($\approx$ Turingmaschine)
- Programm: $ab \to ba$ ($\approx$ Bubble-Sort)
  Beispiel-Rechnung: $abab \to baab \to baba \to bbaa$
- Bewertung W durch *Intepretation*: lineare Funktionen
  $f_a(x) = Px + Q, f_b(x) = Rx + S$ mit $P, Q, R, S \in \mathbb{N}$
  $W(abab) = f_a(f_b(f_a(f_b(0)))), \ldots$
- Interp. ist monoton: $x > y \Rightarrow f_a(x) > f_a(y) \wedge f_b(x) > f_b(y)$
- Interp. ist kompatibel mit Programm: $f_a(f_b(x) > f_b(f_a(x))$
- resultierendes Constraint-System für P, Q, R, S,
- Lösung mittels Z3

Constraints in der Unterhaltungsmathematik

- Nikoli (1980–, „the first puzzle magazine in Japan.“)
  `https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/`
- Erich Friedman: *Math Magic* 1998–2020
  `https://erich-friedman.github.io/mathmagic/`
- Angela und Otto Janko: `http://www.janko.at/Raetsel/` ,
- Donald Knuth: *A Potpourri of Puzzles*, 2022,
  TAOCP, Band 4, Pre-Faszikel 9b,
  `https://cs.stanford.edu/~knuth/taocp.html`,
  `https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc9b.ps.gz`

Wettbewerbe für Constraint-Solver

- für aussagenlogische Formeln:
  `http://www.satcompetition.org/`
  (SAT $=$ satisfiability)
- für prädikatenlogische Formeln
  `https://smt-comp.github.io/`
  (SMT $=$ satisfiability modulo theories)
  Theorien: $\mathbb{Z}$ mit $\leq$, Plus, Mal; $\mathbb{R}$ mit $\leq$, Plus; . . .
- Termination und Komplexität
  `https://www.termination-portal.org/wiki/Termination_Competition`

Gliederung der Vorlesung

- Aussagenlogik
  – CNF-SAT-Constraints (Normalf., Tseitin-Transformation)
  – DPLL-Solver, Backtracking und Lernen
  – ROBDDs (Entscheidungsdiagramme)
- Prädikatenlogik (konjunktive Constraints)
  – Finite-Domain-Constraints
  – naive Lösungsverfahren, Konsistenzbegriffe
  – lineare Gleichungen, Ungleichungen, Polynomgleichungen
  – Termgleichungen, Unifikation
- Kombinationen
  – Kodierungen nach CNF-SAT (FD, Zahlen)
  – SMT, DPLL(T)

Organisatorisches

- jede Woche 1 Vorlesung + 1 Übung
- Hausaufgaben (*Haus* bedeutet: zuhause bearbeiten, in der Übung diskutieren)
  - Aufgaben im Skript
  - Aufgaben in `autotool`

  Prüfungszulassung: 50 Prozent der autotool-Pflichtaufgaben
- Klausur (2 h, keine Hilfsmittel). — Oder?
- Quelltexte, Planung und Diskussion der Übungsaufgaben `https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cp-ws23` (VPN) (Projekt-Mitgliedschaft beantragen, Zugang wird dann auf Mitglieder eingeschränkt)

Literatur

- Krzysztof Apt: *Principles of Constraint Programming*, `https://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521825832`
- Daniel Kroening, Ofer Strichman: *Decision Procedures*, Springer 2016. `https://www.decision-procedures.org/`
- Petra Hofstedt, Armin Wolf: Einführung in die Constraint-Programmierung, Springer 2007. `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-68194-6`
- Uwe Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akad. Verlag, 2000.

Hausaufgaben

1. Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann *A compendium of NP optimization problems* `https://web.archive.org/web/20200227195925/http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/compendium.html`

   Beispiel: Minimum File Transfer Scheduling (node195). Erläutern Sie die Spezifikation an einem Beispiel.
2. Aufgabe: formalisieren Sie *Math Magic* Februar 2007.

   Was ist dabei für Springer und König einfacher als für Dame, Läufer, Turm?

   (allgemein für Math Magic: lösen Sie eine der offenen Fragen `https://erich-friedman.github.io/mathmagic/unsolved.html`)

3. Aufgabe: formalisieren Sie `https://www.janko.at/Raetsel/Wolkenkratzer`.
   - Unbekannte: $h_{x,y} \in \{0, \ldots, n-1\}$ für $x, y \in \{0, \ldots, n-1\}$
   - Constraint für eine Zeile x: $\bigvee_{p \in \text{Permutationen}(0,\ldots,n-1), p \text{kompatibel mit Vorgaben}} \bigwedge_{y \in \{0,\ldots,n-1\}} (h_{x,y} \; p(y))$

     Bsp: $n = 4$, Vorgabe links 2, rechts 1, kompatibel sind $[0,2,1,3], [2,0,1,3], [2,1,0,3], [2,1,0,3]$.

     entspr. für Spalten
   - diese Formel wird exponentiell groß (wg. Anzahl Permutationen),

     Folge-Aufgabe: *geht das auch polynomiell*?

4. Constraint für monotone kompatible Bewertungsfunktion:
   - lösen Sie mit Z3 (ist im Pool installiert, vgl. `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/`)
   - eine *kleinste* Lösung finden (Summe von P, Q, R, S möglichst klein) — dafür Assert(s) hinzufügen.
   - Abstieg der so gefundenen Bewertungsfunktion nachrechnen für $abab \to baab \to baba \to bbaa$
   - gibt diese Bewertungsfunktion die maximale Schrittzahl genau wieder? (nein)
   - Folge-Aufgabe: entspr. Constraint-System für Bewertungsfunktion für $ab \to bba$ aufstellen und lösen.

Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln (SAT)

Aussagenlogik: Syntax

aussagenlogische Formel:

- elementar: Variable $v_1, \ldots$
- zusammengesetzt: durch Operatoren
  - einstellig: Negation
  - zweistellig: Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz

Aussagenlogik: Semantik

- Wertebereich $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, Halbring $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, 0, 1)$

  Übung: weitere Halbringe mit 2 Elementen?
- *Belegung* ist Abbildung $b : V \to \mathbb{B}$
- *Wert* einer Formel F unter Belegung b: $\mathrm{val}(F, b)$
- wenn $\mathrm{val}(F, b) = 1$, dann ist b ein *Modell* von F, Schreibweise: $b \models F$
- *Modellmenge* $\mathrm{Mod}(F) = \{b \mid b \models F\}$
- F *erfüllbar*, wenn $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset$
- Modellmenge einer *Formelmenge*: $\mathrm{Mod}(M) = \{b \mid \forall F \in M : b \models F\}$

Modellierung durch SAT: Ramsey

gesucht ist Kanten-2-Färbung des K_5 ohne einfarbigen K_3.

- Aussagenvariablen $f_{i,j}$ = Kante (i, j) ist rot (sonst blau).
- Constraints:

  $\forall p : \forall q : \forall r : (p < q \wedge q < r) \Rightarrow ((f_{p,q} \vee f_{q,r} \vee f_{p,r}) \wedge \ldots)$

das ist ein Beispiel für ein Ramsey-Problem
(F. P. Ramsey, 1903–1930)
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ramsey.html`
diese sind schwer, z. B. ist bis heute unbekannt: gibt es eine Kanten-2-Färbung des K_{43} ohne einfarbigen K_5?
`http://www1.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`

Programmbeispiel zu Ramsey

Quelltext in `Ramsey.hs`

```
num p q = 10 * p + q ; n x = negate x
f = do
  p <- [1..5] ; q <- [p+1 .. 5] ; r <- [q+1 .. 5]
  [    [ num p q, num q r, num p r, 0 ]
     , [ n $ num p q, n $ num q r, n $ num p r, 0 ] ]
main = putStrLn $ unlines $ do
  cl <- f ; return $ unwords $ map show cl
```

Ausführen:

```
runghc Ramsey.hs | minisat /dev/stdin /dev/stdout
```


Benutzung von SAT-Solvern

Eingabeformat: SAT-Problem in CNF:

- Variable = positive natürliche Zahl
- Literal = ganze Zahl ($\neq 0$, mit Vorzeichen)
- Klausel = Zeile, abgeschlossen durch 0.
- Programm = Header
  `p cnf <#Variablen> <#Klauseln>`, dann Klauseln

Beispiel

```
p cnf 5 3
1 -5 4 0
-1 5 3 4 0
-3 -4 0
```

Löser: `minisat input.cnf output.text`

Modellierung durch SAT: N Damen

stelle möglichst viele Damen auf $N \times N$-Schachbrett, die sich nicht gegenseitig bedrohen.

- Unbekannte: $q_{x,y}$ für $(x, y) \in F = \{1, \ldots, N\}^2$

  mit Bedeutung: $q_{x,y} \iff$ Feld (x, y) ist belegt
- Constraints: $\bigwedge_{a,b \in F, a \text{ bedroht } b} \neg q_a \vee \neg q_b$.
- „möglichst viele“ läßt sich hier vereinfachen zu:

  „in jeder Zeile genau eine“.

  vereinfachen zu: „. . . wenigstens eine.“

Formulierung von SAT-Problemen mit Ersatz

- Autoren: Edward Kmett et al.,
  `https://hackage.haskell.org/package/ersatz`,
-
```
import Prelude hiding ((&&),(||),not )
import Ersatz
main = do
  ans <- solveWith minisat $ do
    p <- exists @Bit ; q <- exists @Bit
    assert $ p && not q
    return [p,q]
  case ans of (Satisfied, Just res) -> print res
```

- Unbekannte erzeugen (`exists`), Formel konstruieren (`&&`,. . .), assertieren, lösen, Antwort benutzen
- zu Implementierung vgl. `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/ersatz/`

N-Queens mit Ersatz

-
```
solveWith minisat $ do
  let n = 40
      -- f ist Liste aller Positionen (wie auf Foli
      f = (,) <$> [0..n-1] <*> [0..n-1]
  qss <- replicateM n $ replicateM n (exists @Bit)
  let q (x,y) = qss !! x !! y
  assert $ and $ do qs <- qss; return $ or qs
  assert $ and $ do
    a <- f ; b <- f
    guard $ bedroht a b
    return $ not (q a) || not (q b)
  return qss
```

-
```
bedroht a@(ax,ay) b@(bx,by) = a /= b
  && (ax == bx || ay == by || abs (ax-bx) == abs(ay
```

Zusammenfassung Ersatz (bisher)

- innerhalb von `solveWith`:
  boolesche Operatoren (`not`, `(||)`, usw.)
  werden angewendet auf *Formeln* (Typ `Bit`),
  nicht auf *Wahrheitswerte* (Typ `Bool`)
- `exists @Bit` konstruiert neue Variable,
  ist monadische Aktion (benutze `do`, `replicateM`, usw.)
- innerhalb von `assert`: funktional (nicht monadisch)
- noch nicht behandelt haben wir diesen Widerspruch:
  wir konstruieren beliebige Formel, Solver erwartet CNF

Hausaufgaben

1. unterschiedliche Halbringe auf zwei Elementen?
2. für die Formel $S(b,h)$ (abhängig von zwei Parametern $b,h \in \mathbb{N}$)

   Variablen: $v_{x,y}$ für $1 \le x \le b, 1 \le y \le h$

   Constraints:

   - für jedes x gilt: wenigstens einer von $v_{x,1}, v_{x,2}, \ldots, v_{x,h}$ ist wahr
   - und für jedes y gilt: höchstens einer von $v_{1,y}, v_{2,y}, \ldots, v_{b,y}$ ist wahr

   (a) unter welcher Bedingung an b,h ist $S(b,h)$ erfüllbar? Für den erfüllbaren Fall: geben Sie ein Modell an.

   Für den nicht erfüllbaren Fall: einen Beweis.

   (b) Erzeugen Sie (eine konjunktive Normalform für) $S(b,h)$ durch ein Programm (a - Sprache/Bibliothek beliebig, b - Haskell/Ersatz)
   (b,h von der Kommandozeile, Ausgabe nach stdout)

   (c) Lösen Sie $S(b,h)$ durch minisat (kissat, Z3, ...), vergleichen Sie die Laufzeiten (auch im nicht erfüllbaren Fall).

3. für das angegebene Ersatz-Programm zu N-Queens:

   - welche Größe haben die erzeugten Formeln (unter den `assert`)? (in Abhängigkeit von N)
   - welche Laufzeit hat das Programm?

4. Für $a,b \ge 2$: die Ramsey-Zahl $R(a,b)$ ist die kleinste Zahl n, für die gilt: jede rot-blau-Kantenfärbung eines K_n enthält einen roten K_a oder einen blauen K_b.

   (Der Satz von Ramsey ist, daß es für jedes a,b tatsächlich solche n gibt.)

   (a) Beweisen Sie:
   i. $R(a,b) = R(b,a)$
   ii. $R(2,b) = b$
   iii. $R(a+1,b+1) \le R(a,b+1) + R(a+1,b)$
   (das liefert einen Beweis des Satzes von Ramsey)
   iv. wenn dabei beide Summanden rechts gerade Zahlen sind, dann $R(a+1,b+1) < \ldots$

   (b) Bestimmen Sie damit obere Schranken für $R(3,3), R(3,4), R(4,4)$ und vergleichen Sie mit den

   unteren Schranken durch SAT-Kodierung.

5. Realisierung der SAT-Kodierung von $R(a,b)$: benutzen Sie eine Funktion, die alle Teilfolgen gegebener Länge bestimmt.

   Beispiel: `subs 3 [1,2,3,4,5]`
   `= [[1,2,3],[1,2,4],[1,2,5],...,[3,4,5]]`
   (nicht notwendig in dieser Reihenfolge)

```
subs :: Int -> [a] -> [[a]]
subs 0 xs = [ [] ]
subs k [] = []
subs k (x:xs) = map _  _  <> subs k xs
```

   Verwenden Sie `subs a [1 .. n]` zur Auswahl des K_a sowie `subs 2 xs` zur Auswahl der Kanten.

6. Modellierung als aussagenlogisches Constraint:

   - Rösselsprung (= Hamiltonkreis)
   - Norinori
     `https://nikoli.com/en/puzzles/norinori/`
   - ABCEndView (oder ähnlich)
     `https://www.janko.at/Raetsel/AbcEndView/`

   Vorgehen bei Modellierung:

   - welches sind die Unbekannten, was ist deren Bedeutung?
     (Wie rekonstruiert man eine Lösung aus der Belegung, die der Solver liefert?)
   - welches sind die Constraints?
     (wie stellt man sie in CNF dar? — falls nötig)

SAT: Normalformen, Transformationen

Normalformen (DNF, CNF)

Definitionen:

- Variable: $v_1, \ldots$ Literal: v oder $\neg v$
- DNF-Klausel: Konjunktion von Literalen
- DNF-Formel: Disjunktion von DNF-Klauseln
- CNF-Klausel: Disjunktion von Literalen
- CNF-Formel: Konjunktion von CNF-Klauseln

Disjunktion als Implikation: diese Formeln sind äquivalent:

- $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \rightarrow (y_1 \vee \ldots \vee y_n)$
- $(\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_m \vee y_1 \vee \ldots \vee y_n)$

Äquivalenzen

- Def: Formeln F und G heißen *äquivalent*, wenn $\mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$.
- Satz: zu jeder Formel F existiert äquivalente Formel G in DNF.
- Satz: zu jeder Formel F existiert äquivalente Formel G' in CNF.
- aber . . . wie groß sind diese Normalformen?

Erfüllbarkeits-Äquivalenz

- Def: F und G *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset \iff \mathrm{Mod}(G) \neq \emptyset$.
- Satz: es gibt einen Polynomialzeit-Algorithmus, der zu jeder Formel F eine erfüllbarkeitsäquivalente CNF-Formel G berechnet.
- (Zeit $\geq$ Platz, also auch $|G| = \mathrm{Poly}(|F|)$)
- Beweis (folgt): Tseitin-Transformation
- Vor-Überlegung: warum gibt es keine vergleichbare Aussage für DNF?

Tseitin-Transformation

Spezifikation:

- Gegeben F, gesucht erfüllbarkeitsäquivalentes G in CNF.
- wir verschärfen das zu: $\mathrm{Var}(F) \subseteq \mathrm{Var}(G)$ und $\forall b : b \models F \iff \exists b' : b \subseteq b' \wedge b' \models G$.

Plan:

- für jeden nicht-Blatt-Teilbaum T des Syntaxbaumes von F eine zusätzliche Variable n_T einführen,
- so daß $\forall b' \in \mathrm{Mod}(G) : \mathrm{val}(n_T, b') = \mathrm{val}(T, b)$.

Realisierung:

- (Bsp.) $T = L \vee R$, dann $n_T \leftrightarrow (n_L \vee n_R)$ als CNF
- für jeden der $|F|$ Knoten: ≤ 8 Klauseln mit 3 Literalen

Tseitin-Transf. für Schaltkreise

- beschriebenes Verfahren funktioniert ebenso für Schaltkreise (azyklische gerichtete Graphen, mit Booleschen Operatoren markiert)
- Schaltkreis entsteht aus Baum durch Identifikation (sharing) von Knoten
- für jeden Knoten eine neue Variable angelegen und deren Wert lokal durch eine CNF bestimmen
- Ersatz realisiert *observable sharing* durch Adress-Vergleich von Syntaxbaumknoten (des Typs `Bit`)

```
-- (a || b) wird nur einmal T-transformiert:
let { s = a || b } in  s && (c === s)
```


Tseitin-Transformation in Ersatz (Bsp)

- so ausprobieren:

```
ghci> :set -XTypeApplications
ghci> runSAT' $ do
  x <- exists; y <- exists @Bit; assert (x === y)
((),SAT 4 ((1) & (-4 | -3 | -2) & (-4 | 2 | 3)
   & (-2 | 3 | 4) & (-3 | 2 | 4) & (-4)) mempty)
```

- Aufgabe: damit observable sharing bestätigen
- Aufgabe: CNF zu `assert (x /== (y /== z))` (XOR)

Abmessungen von Schaltkreisen

- (die Frage ist *nicht*, ob AMD Epyc in SP5-Sockel paßt)
- Def. Schaltkreis (circuit): gerichteter kreisfreier markierter Graph, als symbolische Repräsent. einer Booleschen Fkt.
- Def. Abmessung (complexity):
  - Def. Größe (size): Anzahl der Knoten
    - bei Hardware: Material-Aufwand
    - für SAT-Kodierung: (nach Tseitin-T.) Größe der CNF
  - Def. Tiefe (depth): Länge eines längsten Pfades
    - bei (paralleler!) Hardware: Rechenzeit
    - bei SAT-Kodierung: Länge von Abhängigkeitsketten von (Hilfs)variablen, beeinflußt Solver-Laufzeit
- Bsp: XOR N-stellig: $O(N)$ Größe, $O(\log(N))$ Tiefe

Abmessungen von Schaltkreisen: wozu?

- SAT-Kodierung: man möchte immer die (Teil)Formel, für die der Solver am schnellsten die Erfüllbarkeit entscheiden kann
- das läßt sich sehr schwer vorhersagen, abhängig von
  - Lösungsverfahren auf Teilformeln
  - nicht-lokale Kombination von Teil-Lösungen
- betrachten stattdessen die Größe der Eingabe (CNF, Größen sind: Anzahl Variablen, Anzahl Klauseln) in vielen Publikationen so durchgeführt (siehe AMO)
- . . . stattdessen Größe eines Schaltkreises
  - mit beschränktem Eingangsgrad (z. B. 2)
  - unbeschränkt nur f. Disjunktion, Konjunktion

Tseitin-Transformation (Aufgaben)

1. für diese Formeln:
   - $(x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_3 \leftrightarrow x_4)$
   - Halb-Adder (2 Eingänge x, y, 2 Ausgänge r, c)
     $(r \leftrightarrow (\neg(x \leftrightarrow y))) \wedge (c \leftrightarrow (x \wedge y))$
   - Full-Adder (3 Eingänge, 2 Ausgänge)

   jeweils:
   - führe die Tseitin-Transformation durch
   - gibt es eine kleinere erfüllbarkeitsäquivalente CNF? (deren Modelle Erweiterungen der Original-Modelle sind)
2. `data Bit` hat weitere Konstruktoren (Xor, Mux).

Wo werden diese benutzt?

Helfen sie tatsächlich bei der Erzeugung kleiner CNFs?

Anzahl-Constraints

Definition, Motivation

- $\text{Count}_{\leq k}(x_1, \ldots, x_n) := (\sum_i x_i) \leq k$.
- AMO (at most one): $= \text{Count}_{\leq 1}$, entspr. ALO, EXO
- Schubfach-Constraint (als Testfall, erfüllbar gdw. $B \leq H$)
  $\bigwedge_{1 \leq i \leq H} \text{AMO}(x_{ij} | 1 \leq j \leq B) \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq B} \text{ALO}(x_{ij} | 1 \leq i \leq H)$
- Schubfach für $B = H$: dann ist x Permutationsmatrix, repräsentiert Bijektion von $\{1, \ldots, B\}$ auf sich
- Anwend.: Rösselsprung, Hamiltonkreis in $G = (V, E)$
  Pfad p in G als Bijektion von Indexmenge $\{1, \ldots, |V|\}$ in Knotenmenge V mit $\bigwedge_i (p(i), p(i+1)) \in E$.

SAT-Kodierung eines Rösselsprungs

```
let n = height * width; places = [0 .. n-1]

let decode p = divMod p width
    edge p q =
        let (px,py) = decode p; (qx,qy) = decode q
        in  5 == (px-qx)^2 + (py-qy)^2
    rotate (x:xs) = xs <> [x]

a <- replicateM n $ replicateM n $ exists @Bit
assert $ all exactly_one a
assert $ all exactly_one $ transpose a
assert $ flip all (zip a $ rotate a) $ \ (e, f) ->
  flip all places $ \ p ->  e!!p  ==>
    flip any (filter (edge p) places) (\ q -> f!!q)
```


SAT-Kodierungen von AMO (I)

- naiv, quadratisch:
  $\text{AMO}(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge \{\overline{x_i} \vee \overline{x_j} | 1 \leq i < j \leq n\}$
  $\binom{n}{2}$ Klauseln, keine zusätzlichen Variablen
- linear: mit Kodierung enc : $x \mapsto (x_e, x_z) = (x \geq 1, x \geq 2)$:
  $0 \mapsto (0,0), 1 \mapsto (1,0), 2, 3, \cdots \mapsto (1,1)$
  Addition: $(x_e, x_z) +_{\text{enc}} (y_e, y_z) = \ldots$
  so daß $\text{enc}(x+y) = \text{enc}(x) +_{\text{enc}} \text{enc}(y)$
  $\text{AMO}(x_1, \ldots, x_n) =$ `let` $(s_e, s_z) = \sum_{\text{enc}} \text{enc}(x_i)$ `in ...`
  das sind $2n$ Hilfsvariablen, aber bei `assert (amo xs)` werden n davon eliminiert durch Vorverarbeitung oder UP

SAT-Kodierungen von AMO (II) - log

- $\text{AMO}(x) = \exists h : (x_i \Rightarrow (i = h))$
  h binär repräsentiert mit $\log n$ Bits.
- Bsp. $\text{AMO}(x_0, \ldots, x_3) = \exists h_1, h_0 :$
  $$\begin{array}{rl} & (\overline{x}_0 \vee \overline{h}_1) \wedge (\overline{x}_0 \vee \overline{h}_0) \\ \wedge & (\overline{x}_1 \vee \overline{h}_1) \wedge (\overline{x}_1 \vee h_0) \\ \wedge & (\overline{x}_2 \vee h_1) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{h}_0) \\ \wedge & (\overline{x}_3 \vee h_1) \wedge (\overline{x}_3 \vee h_0) \end{array}$$
- $n \log n$ Klauseln, $\log n$ zusätzliche Variablen
- die Hilfsvariablen h_0, h_1 sind keine Funktionen der Eingangsvariablen.
  (wenn alle x_i falsch, dann h_i beliebig)

SAT-Kodierungen von AMO (III) - sqrt

- für $\text{AMO}(x)$: die x in einem Rechteck anordnen,
  $z_i := \bigvee_j x_{ij}$ (Zeile i), $s_j := \bigvee_i x_{ij}$ (Spalte j),
  dann $\text{AMO}(x) = \text{AMO}(z) \wedge \text{AMO}(s)$.
  Jingchao Chen: *A New SAT Encoding of the At-Most-One Constraint* 10th Workshop Constraint Modeling and Reformulation, 2010 `https://www.it.uu.se/research/group/astra/ModRef10/programme.html`
- Formelgröße $f(n) = \Theta(n) + 2f(\sqrt{n})$, mit $\Theta(\sqrt{n})$ Hilfsvar.
  Lineare Faktoren sind klein. Ü: wenn `assert (amo xs)`, kann man einige Klauseln weglassen. Welche?

Aufgaben

1. Vergleiche Sie die *commander*-Kodierung für AMO von Klieber und Kwon, Int. Workshop Constraints in Formal Verification, 2007, mit Kodierungen aus dem Skript.
   a) auf dem Papier, b) praktisch: mit ersatz implementieren, Formelgrößen messen, auch nach Vorverarbeitung durch minisat
2. Für die sqrt-Kodierung für AMO von Chen 2010:
   Benutzen Sie die gleiche Idee für eine höherdimensionale Anordnung, z.B. AMO von 30 Variablen als $2 \times 3 \times 5$.
   Teilen Sie AMO für 2^n Variablen in $2 \times \cdots \times 2$ ein und vergleichen Sie mit der log-Kodierung.

3. für die lineare AMO-Kodierung (Addition auf $\{0, 1, \geq 2\}$):
   untersuchen Sie den Unterschied zwischen der Verwendung von `foldr` und `foldb`
4. für jede der betrachteten AMO-Kodierungen: wie kann mit möglichst wenig Zusatz-Aufwand EXO erhalten?
5. Für den Rösselsprung:
   - zusätzliches `assert $ a !! 0 !! 0` diskutieren und ausprobieren
   - AMO und ALO durch EXO ersetzen
   - umbauen, so daß ein kreuzungsfreier Weg der Länge $= l$ (zusätzlicher Eingabe-Parameter) beschrieben wird.
   - andere Kodierung für Hamiltonkreis: Neng-Fa Zhou: *In Pursuit of an Efficient SAT Encoding for the Hamiltonian Cycle Problem*, CP 2020, ModRef 2019, `https://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~zhou/`
   - Anwendung: George Jelliss: *Leapers at Large*, 2001, 2022 `http://www.mayhematics.com/t/pl.htm` Resultate zur Existenz von Hamilton-Pfaden (HP) und -Kreisen (HC) nachrechnen und ergänzen, Bsp.:
     – HP für Giraffe $(1, 4)$ auf 11× 11?
       (Nein—unsat nach 6 Stunden)
     – HP für Zebra $(2, 3)$ auf 13 × 13?
     – HP für Antilope $(3, 4)$ auf 20 × 20?
     vgl. Donald Knuth: *Leaper Graphs*, 1994, `https://arxiv.org/abs/math/9411240`

Komplexität der Erfüllbarkeit

Motivation, Begriffe

- Laufzeit-Komplexität eines Programms P
  ist die Funktion f mit $f(n) =$ die maximale Laufzeit von P über alle Eingaben der Größe $\leq n$.
- solche Funktionen vergleicht man *asymptotisch*
  (ignoriert Anfangswerte und konstante Faktoren)
- Laufzeit-Komplexität einer Aufgabe A:
  die minimale Komplexität aller Programme, die A lösen
- die Erfahrung lehrt: SAT $\notin$ P, das ist jedoch unbewiesen, man konnte bisher nur zeigen: SAT ist NP-vollständig.

Wiederholung: NP-Vollständigkeit

- nichtdeterministische Turingmaschine (NDTM)
  – Rechnung ist eine Baum,
  – jeder Knoten ist eine Konfiguration (Bandinhalt, Kopfzustand, Kopfposition),
  – jede Kante ist ein Rechenschritt
  – Rechnung ist erfolgreich, wenn in wenigstens einem Blatt der Zustand akzeptierend ist
- NP := die Sprachen, die sich in Polynomialzeit durch NDTM entscheiden lassen
- Reduktion $M \leq_P L \iff \exists f : \forall x : x \in M \iff f(x) \in L$ und f ist P-berechenbar
- L ist NP-vollständig: $L \in$ NP und $\forall M \in$ NP : $M \leq_P L$

Wiederholung: SAT ist NP-vollständig

SAT $\in$ NP ist klar (NDTM rät die Belegung)
Sei $M \in$ NP, zu zeigen $M \leq_P$ SAT. Gegeben ist also das Programm einer NDTM, die M in Polynomialzeit akzeptiert

- übersetze eine Eingabe x für diese Maschine in eine Formel $f(x)$ mit $x \in M \iff f(x) \in$ SAT:
- benutzt Unbekannte $C(t, p, a) : \iff$ zur Zeit t steht an Position p das Zeichen a.
- Klauseln legen fest:
  für $t = 0$ steht die Eingabe auf dem Band,
  $\forall t$: von t nach $t + 1$ richtig gerechnet (lt. Programm)
  schließlich akzeptierender Zustand erreicht

Die Tseitin-Transformation

- Def: SAT $=$ Erfüllbarkeit beliebiger aussagenlogischer Formeln (sogar: Schaltkreise)
  Def: 3 CNFSAT $=$ ... Formeln in konjunktiver NF mit 3 Literalen je Klausel
- die Tseitin-Transformation beweist SAT $\leq_P 3$ CNFSAT denn sie in erzeugt aus einer beliebigen Formel F in Polynomialzeit
  eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel G in 3-CNF
- vereinfacht den Beweis der NP-Vollständigkeit weiterer Aufgaben (z.B. Graphenfärbung) 3COL.
  zu zeigen ist: $\forall A \in$ NP : $A \leq_P$ 3COL
  man benutzt $A \leq_P$ SAT $\leq_P 3$ CNFSAT $\leq_P$ 3COL.

Was nützen diese Aussagen?

- 1. sie beantworten die Frage: welche Aufgaben lassen sich SAT-kodieren: Aufgabe A hat SAT-Kodierung mit polynomieller Formelgröße $\iff A \in$ NP.
- 2. SAT ist NP-vollständig:
  falls SAT $\in P$ (es gibt einen SAT-Solver in Polynomialzeit) dann folgt NP $\subseteq P$.
  (jede NP-vollständige Aufgabe ließe sich durch SAT-Kodierung in Polynomialzeit lösen)
  das ist unwahrscheinlich (nach jetzigem Kenntnisstand)
  – für jedes bekannte SAT-Lösungsverfahren gibt es schwere Eingaben
  – Verfahren sind trotzdem erstaunlich leistungsfähig

SAT-Solver

Spezifikation

- Eingabe: eine Formel in CNF
  [[1],[-4,-3,11],[-11,3],[-11,4],[-11],[3,4,13],[-13,-3],[-13,-4],[-2,12,13],[-12,2],[-13,-12],[-12],[-7,-6,14],[-14,6],[-14,7],[-14],[6,7,16],[-16,-6],[-16,-7],[-5,15,16],[-15,5],[-16,-15],[-15],[-10,-9,17],[-17,9],[-17,10],[-17],[9,10,19],[-19,-9],[-19,-10],[-8,18,19],[-18,8],[-19,-18],[-18],[2,5,8,20],[-20,-2],[-20,-5],[-20,-8],[-20],[3,6,9,21],[-21,-3],[-21,-6],[-21,-9],[-21],[4,7,10,22],[-22,-4],[-22,-7],[-22,-10],[-22]]
- Ausgabe:
  - eine erfüllende Belegung
  - *oder* ein Beweis für Nichterfüllbarkeit

Implementierung eines naiven SAT-Solvers

- benutzt die Schnittstelle aus `ersatz`

```
minisat :: Solver SAT IO
type Solver s m
  = s -> m (Result, IntMap Bool)
data Result
  = Unsolved  | Unsatisfied | Satisfied
class DIMACS t where
  dimacsNumVariables :: t -> Int
  dimacsClauses :: t -> Seq IntSet
data SAT; instancs DIMACS Sat
```


Lösungsverfahren

- vollständige Suche (alle Belegungen, vollst. Binärbaum)
- unvollständige Suche (einige Belegungen)
  - evolutionär (Genotyp $=$ Belegung)
  - lokale Suche (Selman, Kautz, Cohen 1993: Walksat)
- verbesserte vollständige Suche (Erkennen und Abschneiden sinnloser Teilbäume)
  DPLL (Davis, Putnam, Logeman, Loveland 1960/61)
- weitere Verbesserungen durch
  - Lernen (und Vergessen!) von zusätzlichen Klauseln
  - Vorverarbeitung zum Entfernen von Variablen
  - Parallelisierung
    (Kommunikation mehrerer Suchverfahren)

Evolutionäre Algorithmen für SAT

- Genotyp: Bitfolge $[x_1, \ldots, x_n]$ fester Länge
- Phänotyp: Belegung $b = \{(v_1, x_1), \ldots, (v_n, x_n)\}$
- Fitness: z. B. Anzahl der von b erfüllten Klauseln
- Operatoren:
  - Mutation: einige Bits ändern
  - Kreuzung: one/two-point crossover?
    Problem: starke Abhängigkeit von Variablenreihenfolge

Lokale Suche (GSat, Walksat)

Bart Selman, Cornell University,
Henry Kautz, University of Washington
`https://web.archive.org/web/20070311005144/http://www.cs.rochester.edu/u/kautz/walksat/`
Algorithmus:

- beginne mit zufälliger Belegung
- wiederhole: ändere das Bit, das die Fitness am stärksten erhöht

Problem: lokale Optima — Lösung: Mutationen.

DPLL

Davis, Putnam (1960), Logeman, Loveland (1962),
`http://dx.doi.org/10.1145/321033.321034`
`http://dx.doi.org/10.1145/368273.368557`
Zustand $=$ partielle Belegung

- *Decide*: eine Variable belegen
- *Propagate*: alle Schlußfolgerungen ziehen
  Beispiel: Klausel $x_1 \vee x_3$, partielle Belegung $x_1 = 0$, Folgerung: $x_3 = 1$
- bei *Konflikt* (widersprüchliche Folgerungen)
  - (DPLL original) Backtrack (zu letztem Decide)
  - (DPLL mit CDCL) Backjump (zu früherem Decide)

DPLL-Begriffe

für partielle Belegung b (Bsp: $\{(x_1, 1), (x_3, 0)\}$): Klausel c ist

- *erfüllt*, falls $\exists l \in c : b(l) = 1$, Bsp: $(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$
- *Konflikt*, falls $\forall l \in c : b(l) = 0$, Bsp: $(\neg x_1 \vee x_3)$
- *unit*, falls $\exists l \in c : b(l) = \bot \wedge \forall l' \in (c \setminus \{l\}) : b(l') = 0$,
  Bsp: $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$. Dabei ist $l = \neg x_2$ das Unit-Literal.
- *offen*, sonst. Bsp: $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

Eigenschaften: für CNF F und partielle Belegung b:

- wenn $\exists c \in F : c$ ist Konflikt für b, dann $\neg\exists b' \supseteq b$ mit $b' \models F$
  (d.h., die Suche kann dort abgebrochen werden)
- wenn $\exists c \in F$: c ist Unit für b mit Literal l, dann
  $\forall b' \supseteq b : b' \models F \Rightarrow b'(l) = 1$
  (d.h., l kann ohne Suche belegt werden)

DPLL-Algorithmus

Eingabe: CNF F,
Ausgabe: Belegung b mit $b \models F$ oder UNSAT.
$\mathrm{DPLL}(b)$ (verwendet Keller für Entscheidungspunkte):

- (success) falls $b \models F$, dann halt (SAT), Ausgabe b.
- (backtrack) falls F eine b-Konfliktklausel enthält, dann:
  - falls Keller leer, dann halt (UNSAT)
  - sonst $v := pop()$ und $\mathrm{DPLL}(b_{<v} \cup \{(v, 1)\})$.
    dabei ist $b_{<v}$ die Belegung *vor* decide(v)
- (propagate) falls F eine b-Unitklausel c mit Unit-Literal l enthält: $\mathrm{DPLL}(b \cup \{(\text{variable}(l), \text{polarity}(l))\})$.
- (decide) sonst wähle $v \notin \operatorname{dom} b$, push$(v)$, und $\mathrm{DPLL}(b \cup \{(v, 0)\})$.

DPLL: Eigenschaften

- Termination: DPLL hält auf jeder Eingabe
- Korrektheit: wenn DPLL mit SAT hält, dann $b \models F$.
- Vollständigkeit: wenn DPLL: UNSAT, dann $\neg\exists b : b \models F$

wird bewiesen durch Invariante

- $\forall b' : b' \in \mathrm{Mod}(F) \Rightarrow b \leq_{\text{lex}} b'$
  (wenn DPLL derzeit b betrachtet, und wenn F ein Modell b' besitzt, dann ist b' unterhalb oder rechts von b)
- dabei bedeutet: $b \leq_{\text{lex}} b'$:
  $b \subseteq b'$ oder $\exists v : b(v) = 0 \wedge (b_{<v} \cup \{(v,1)\}) \subseteq b'$

Satz (Ü): für alle endlichen V: $<_{\text{lex}}$ ist eine wohlfundierte Relation auf der Menge der partiellen V-Belegungen:

DPLL-Beispiel

```
[[2,3],[3,5],[-3,-4],[2,-3,-4]
,[-3,4],[1,-2,-4,-5],[1,-2,4,-5]]
```

decide belegt immer die kleinste freie Variable, immer zunächst negativ

DPLL-Beispiel (Lösung)

```
[[2,3],[3,5],[-3,-4],[2,-3,-4]
,[-3,4],[1,-2,-4,-5],[1,-2,4,-5]]

[Dec (-1),Dec (-2),Prop 3,Prop (-4),Back
,Dec 2,Dec (-3),Prop 5,Prop (-4),Back
,Dec 3,Prop (-4),Back,Back,Back
,Dec 1,Dec (-2),Prop 3,Prop (-4),Back
,Dec 2,Dec (-3),Prop 5]
```


DPLL: Implement., Heuristik, Ergänzungen

- Grundlage ist effiziente Impl. von UP und Konflikt-Erkennung
- Methoden:
  - Wahl der nächsten Entscheidungsvariablen (kommt am häufigsten in aktuellen Konflikten vor)
  - Lernen von Konflikt-Klauseln (erlaubt Backjump)
  - Vorverarbeitung (Variablen und Klauseln eliminieren)
- alles vorbildlich implementiert und dokumentiert in Minisat `http://minisat.se/` (Niklas Een, Niklas Sorenson) (seit ca. 2005 sehr starker Solver)
  später übernimmt diese Rolle: Cadical, Kissat `https://fmv.jku.at/kissat/` (Armin Biere)

Aufgaben

1. Geben Sie eine erfüllbare CNF an, für die monotone lokale Suche

```
improve n cnf b0 = ...
      let b1 = S.insert (negate l) $ S.delete l b0
      if badness cnf b1 <= badness cnf b0
        then improve n cnf b1
        else improve n cnf b0
```

   nicht funktioniert: es gibt eine Belegung b_0, von der aus *keine* zulässige Schrittfolge zu einer erfüllenden Belegung führt. Hinweis: z.B., weil es überhaupt keine erlaubten Schritte gibt.

   Wie behandeln gsat/walksat diesen Fall?

2. wenden Sie den SAT-Solver mit lokaler Suche auf realistische CNFs an, z.B. aus Kodierung Rösselsprung.
3. wie werden in minisat (kissat, ...) Einheits- und Konfliktklauseln erkannt? (Hinweis: two watched literals)
4. unit propagation (UP) implementieren:
   - Einheitsklauseln erkennen:
     ```
     type Literal = Int
     units :: CNF -> [Literal]
     units [[1,2],[-3],[3,4]] = [-3]
     ```
   - ein Literal belegen:
     ```
     assign :: Literal -> CNF -> CNF
     assign (-3) [[1,2],[-3],[3,4]] = [[1,2],[4]]
     ```

   Wo stehen die entsprechenden Funktionen im Quelltext der Autotool-Aufgabe zu DPLL?

SAT-Solver (fortgeschrittene Techniken)

Plan

- bisher:
  - (unvollst.) stochastische lokale Suche (gsat, walksat)
  - vollständige Suche (DPLL)
- jetzt und folgend:
  - DPLL beschleunigen durch Klausel-Lernen (CDCL)
  - (jedes Verfahren) beschleunigen durch Vorverarbeitung (preprocessing): Variablen-Elimination
  - Verifikation von UNSAT-Beweisen
  - gemeinsame Grundlage: Resolution

Semantisches Folgern

- Def: eine Formel F folgt aus einer Formelmenge M, geschrieben $M \models F$, falls $\mathrm{Mod}(M) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$.
- Bsp: $\{x_1 \vee \overline{x}_2, x_2 \vee x_3\} \models (x_1 \vee x_3)$, Beweise (lt. Def.) z.B. durch Vergleich der Wertetabellen (d.h., explizites Aufzählen der Modellmengen)

Eigenschaften (Übungsaufgaben):

- $M \models \mathsf{True}$
- $(M \models \mathsf{False}) \iff (\mathrm{Mod}(M) = \emptyset)$
- $(M \models F) \iff (\mathrm{Mod}(M \cup \{\neg F\}) = \emptyset)$
- wird bei CDCL benutzt: wir lernen nur Klauseln F, die aus der CNF (Klauselmenge) M folgen: $(M \models F) \iff (\mathrm{Mod}(M) = \mathrm{Mod}(M \cup \{F\}))$

Resolution

- Definition: für Literal l : die *Resolvente* $\mathrm{Res}_l(c, d)$

  der Klausel c mit $l \in c$, und der Klausel d mit $\neg l \in d$:

  ist die Klausel $(c \setminus \{l\}) \cup (d \setminus \{\neg l\})$.
- Bsp. $l = \overline{x_2}, c = (x_1 \vee \overline{x_2}), d = (x_2 \vee x_3)$,

  $\mathrm{Res}_l(c, d) = (x_1 \vee x_3)$.
- Satz: $\{c, d\} \models \mathrm{Res}_l(c, d)$.
- Beweis: für jede Belegung $b \in \mathrm{Mod}(c, d)$:

  vollst. Fallunterscheidung: $b(l) = 0$ oder $b(l) = 1$.
- Anwendung: Hinzufügen einer Resolvente ändert die Modellmenge nicht, kann Propagationen ermöglichen

DPLL mit CDCL (Plan)

conflict driven clause learning –
bei jedem Konflikt eine Klausel C hinzufügen, die

- aus der Formel folgt (d.h. Modellmenge nicht ändert)
- den Konflikt durch Propagation verhindert

Eigenschaften/Anwendung:

- danach *backjump* zur vorletzten Variable in C. (die letzte Variable wird dann propagiert, das ergibt die richtige Fortsetzung der Suche)
- C führt hoffentlich auch später zu Propagationen, d.h. Verkürzung der Suche
- . . . wenn nicht: gelernte Klauseln kann man auch vergessen

Naives Lernen

- jede partielle Belegung b mit $\mathrm{dom}(b) = \{v_1, \ldots, v_k\}$

  entspricht einer Konjunktion

  $B = (v_1 \leftrightarrow b(v_1)) \wedge \cdots \wedge (v_k \leftrightarrow b(v_k))$
- beim Lösen der Formel (Klauselmenge) F:
- Konflikt bei partieller Belegung b:

  man kann $C = \neg B = (\neg(v_1 \leftrightarrow b(v_1)) \vee \cdots \vee \neg(v_k \leftrightarrow b(v_k))$ lernen

  Beweis: zu zeigen ist $F \models C$, folgt aus $\mathrm{Mod}(F \cup \{B\}) = \emptyset$
- . . . sollte man aber nicht, denn C ist mglw. zu groß (enthält Literale, die am Konflikt gar nicht beteiligt sind)

Lernen (Implementierung) und Backjump

- benutze (resolviere) Klauseln, die seit der letzten Entscheidung für Propagationen verwendet wurden.
- ```
  c := Konflikt-Klausel // für aktuelle Bel. b
  while (...) { // inv: für alle l' in c: b(l')=0
    l := das in c zuletzt belegte Literal
    d := Unit-Klausel, durch die var(l) belegt wurde
    c := resolve_l (c,d); }
  ```

  diese Resolution ist immer möglich, denn es gilt $b(l) = 0, l \in c$ (ist Konflikt), $b(\overline{l}) = 1, \overline{l} \in d$ (ist Unit)
- Schleife verlassen (und c lernen), wenn c nur noch ein Literal l_h der aktuellen Entscheidungstiefe enthält.
- dann Backjump zu nächst-höherer Entscheidung in c. von dort wird l_h unit-propagiert.

Aufgaben

1. (Knuth Aufgabe 254) Für $\{12, \overline{1}3, 2\overline{3}, \overline{24}, \overline{3}4\}$: nach der Entscheidung 1: welche Klausel wird gelernt?

   D. E. Knuth, TAOCP Vol. 4, Fasc. 6, *Satisfiability*, 2015.
2. Schleife verlassen, wenn c nur noch ein Literal der aktuellen Entscheidungstiefe . . . :

(a) wieso ist die Bedingung anfangs falsch? (es kann nicht sein, daß die originale Konflikt-Klausel c gelernt wird)
(b) wieso wird diese Bedingung wahr? (es kann nicht sein, daß es immer ≥ 2 solche Literale sind oder plötzlich gar keines)
(c) wieso wird immer eine Klausel gelernt, die bisher nicht zur Klauselmenge gehört?

3. (Knuth Aufgabe 378) *blocked clause elimination*:

   Für Klauselmenge F: eine Klausel $C = (l \vee l_1 \vee \cdots \vee l_k)$

   heißt *blockiert durch Literal* l,

   falls für jede Klausel $D \in F$ mit $\overline{l} \in D$ gilt: $\exists i : \overline{l_i} \in D$.

(a) ein Beispiel angeben.
(b) beweisen: $F \setminus \{C\}$ erfüllbar $\Rightarrow$ F erfüllbar.
(c) ist jedes Modell b von $F \setminus \{C\}$ auch ein Modell von F?

4. *conflict clause minimization* (Sörenson, SAT 2005, `http://minisat.se/downloads/MiniSat_v1.13_short.pdf`): Ein Beispiel angeben. Entsprechende Ergänzung der autotool-Aufgabe vorschlagen.
5. hier besprochene Heuristiken und Ergänzungen
  ```

- in den Protokollen von minisat, kissat wiederfinden (z.B. wieviele Klauseln werden gelernt? wie groß sind diese? wann vergessen?)
- durch Optionen von kissat an/abschalten

Weitere Anwendungen der Resolution

Überblick

- Wiederholung Resolution
- Anwendung (Wdhlg): Ableiten (Lernen) einer Klausel aus Konflikt-Klausel und UP-Klauseln
- vollständige Resolution: zur Variablen-Elimination
  - als Vorverarbeitungs-Schritt im Solver
  - als vollständiges (aber im allg. unpraktisches) Entscheidungsverfahren für SAT
- Ableitung der leeren Klausel als Beweis der Unerfüllbarkeit, Anwendung: Formate RUP und DRAT

Resolution

- ein Resolutions-Schritt:

$$\frac{(x_1 \vee \ldots \vee x_m \vee y), (\neg y \vee z_1 \vee \ldots \vee z_n)}{x_1 \vee \ldots \vee x_m \vee z_1 \vee \ldots \vee z_n}$$

- Sprechweise: Klauseln C_1, C_2 werden nach y *resolviert*.
- Schreibweise: $C = C_1 \oplus_y C_2$, Beispiel: $\frac{x \vee y, \neg y \vee \neg z}{x \vee \neg z}$
- Satz: $\{C_1, C_2\} \models C_1 \oplus_y C_2$. (Resolvente folgt aus Prämissen.)
- Ü: Unit-Progagation als Resolution auffassen: $u \oplus (\neg u \vee l_2 \vee \ldots) = (l_2 \vee \ldots)$

Variablen-Elimination durch vollst. Resolution

- für Formel (Klauselmenge) F und Variable v:
  $\mathsf{Pos}_v(F) = \{c | c \in F, v \in c\}$; $\mathsf{Neg}_v(F) = \{c | c \in F, \neg v \in c\}$
  $\mathsf{Res}_v(F) = \bigcup_{p \in \mathsf{Pos}_v(F), n \in \mathsf{Neg}_v(F)} \mathsf{Res}_v(p, n)$
- Satz: F ist erfüllbarkeitsäquivalent zu G mit $G := F \setminus (\mathsf{Pos}_v(F) \cup \mathsf{Neg}_v(F)) \cup \mathsf{Res}_v(F)$.
- das (iteriert) ist ein vollständiges Lösungsverfahren! aber unpraktisch, weil $|G| \gg |F|$ möglich ist: $|G| = |F| - (|\mathsf{Pos}_v(F)| + |\mathsf{Neg}_v(F)|) + |\mathsf{Pos}_v(F)| \cdot |\mathsf{Neg}_v(F)|$.
- Anwendung: für solche v, für die $|G| \leq |F| + \Delta$
- Quelle: Een und Biere: *Effective Preprocessing ...*, SAT 2005, `http://minisat.se/downloads/SatELite.pdf` dort weitere Vorverarbeitungs-Verfahren

Resolution als Inferenzsystem

mehrere Schritte:

- Schreibweise: $M \vdash C$
- Klausel C *ist ableitbar* aus Klauselmenge M
- Definition:
  - (Induktionsanfang) wenn $C \in M$, dann $M \vdash C$
  - (Induktionsschrit) wenn $M \vdash C_1$ und $M \vdash C_2$, dann $M \vdash C_1 \oplus_y C_2$

Beachte Unterschiede:

- Ableitung $M \vdash C$ ist *syntaktisch* definiert (Term-Umformung)
- Folgerung $M \models C$ ist *semantisch* definiert (Term-Auswertung)

Resolution und Unerfüllbarkeit

Satz: $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset \iff F \vdash \emptyset$ (in Worten: F in CNF nicht erfüllbar $\iff$ aus F kann man die leere Klausel ableiten.)

- Korrektheit ($\Leftarrow$): Übung.
- Vollständigkeit ($\Rightarrow$): Induktion nach $|\mathrm{Var}(F)|$

dabei Induktionsschritt:

- betrachte F mit Variablen $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.
- Konstruiere F_0 (bzw. F_1) aus F durch „Belegen von x_{n+1} mit 0 (bzw. 1) “ (d. h. Streichen von Literalen und Klauseln)
- Zeige, daß F_0 und F_1 unerfüllbar sind.
- wende Induktionsannahme an: $F_0 \vdash \emptyset, F_1 \vdash \emptyset$
- kombiniere diese Ableitungen

Resolution, Bemerkungen

- moderne SAT-Solver können Resolutions-Beweise für Unerfüllbarkeit ausgeben
- es gibt nicht erfüllbare F mit (exponentiell) großen Resolutionsbeweisen (sonst wäre NP $=$ co-NP, das glaubt niemand)
- komprimiertes Format für solche Beweise (RUP—reverse unit propagation) wird bei “certified unsat track” der SAT-competitions verwendet (evtl. Übung)

Beweise für Nichterfüllbarkeit

- bisher: Interesse an erfüllender Belegung $m \in \mathrm{Mod}(F)$ ($=$ Lösung einer Anwendungsaufgabe)
- jetzt: Interesse an $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset$.
  Anwendungen: Schaltkreis C erfüllt Spezifikation $S \iff \mathrm{Mod}(C(x) \neq S(x)) = \emptyset$.

Solver rechnet lange, evtl. Hardwarefehler usw.

- $m \in \mathrm{Mod}(F)$ kann man leicht prüfen (unabhängig von der Herleitung)
- wie prüft man $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset$? (wie sieht ein *Zertifikat* dafür aus?)

Reverse Unit Propagation

http://www.satcompetition.org/2014/certunsat.shtml

RUP proofs are a sequence of clauses that are redundant with respect to the input formula. To check that a clause C is redundant, all literals C are assigned to false followed by unit propagation. In order to verify redundancy, unit propagation should result in a conflict.

$\curvearrowright$ Konflikt für $F \wedge \neg C \curvearrowright F \wedge \neg C$ ist nicht erfüllbar $\curvearrowright$ $\neg F \vee C$ ist allgemeingültig $\curvearrowright F \models C$ (aus F folgt C) $\curvearrowright C$ „ist redundant“

siehe auch E.Goldberg, Y.Novikov. *Verification of proofs of unsatisfiability for CNF formulas.* Design, Automation and Test in Europe. 2003, March 3-7,pp.886-891

http://eigold.tripod.com/papers/proof_verif.pdf

Deletion Resolution Asymmetric Tautology

- Nathan Wetzler, Marijn J.H. Heule and Warren A. Hunt: *DRAT-trim: Efficient Checking and Trimming Using Expressive Clausal Proofs.* SAT 2014
  https://www.cs.utexas.edu/~marijn/drat-trim/
- asymmetric literal addition: für CNF F, Klausel C: ALA(F, C) ist der Fixpunkt der Operation: wenn $\exists l_1, \ldots, l_k \in C, (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee l) \in F$, dann $C_{i+1} = C_i \cup \{\bar{l}\}$.
- asymmetrische Tautologie: AT$_F(C) := (\mathsf{ALA}(F, C) = 1)$.
  resolution AT:
  RAT$_F(C) := \exists l \in C : \forall D \in F : (\bar{l}) \in D \Rightarrow \mathsf{AT}((D \setminus \{\bar{l}\}) \cup C)$
  Satz: $C \notin F \wedge \mathsf{RAT}_F(C) \Rightarrow F \equiv_{\mathsf{SAT}} (F \cup \{C\})$

Übungen

WS23: empfohlen: 1, 2, 3, 5, 8

1. für unserer Microsat-Solver: Unit propagation und vollständige Elimination programmieren, testen, mit Vorverarbeitung von minisat usw. vergleichen.
2. Beispiele aus DRAT-Papier nachrechnen.
   Wieso gilt „the property AT is also known as RUP“?
   Den zitierten Satz $C \notin F \wedge \mathsf{RAT}_F(C) \Rightarrow F \equiv_{\mathsf{SAT}} (F \cup \{C\})$ beweisen.
3. von Cadical einen UNSAT-Beweis ausgeben lassen (für eine kleine CNF),
   von Hand überprüfen, maschinell überprüfen (https://github.com/marijnheule/drat-trim)

4. Die Werbung auf Webseite von drat-trim enthält: „RAT . . . permits all known techniques including extended resolution, blocked clause addition, bounded variable addition, extended learning“.
   Geben Sie Quellen und (einfache) Beispiele für diese Techniken an. Besonders: bounded variable *addition*.
5. für eine Teilformel $F = F_1 \wedge F_2$ wird die Tseitin-Transformation durchgeführt und für die dabei entstehende Variable v_F (mit $v_f \leftrightarrow F$) ein assert.
   Was passiert bei vollständiger Elimination von v_F?
   (Es ist anzunehmen, daß das alle Solver tun. Deswegen ist für ersatz wohl keine Plaisted-Greenbaum-Transformation (J. Symb. Comp. 2(3) 1986, pp 293-304) https:

//doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80028-1 notwendig.)

6. Wenn G aus F durch vollständige Resolution (Elimination) von v entsteht: Konstruieren Sie aus einem Modell b für G ein Modell für F (wie ist v zu belegen?)
7. für eine unerfüllbare Schubfachschluß-Formel (in jeder Zeile $1, \ldots, H$ höchstens einer wahr, in jeder Spalte $1, \ldots, B$ wenigstens einer wahr, z.B. für $B = 3, H = 2$ die Klauselmenge $\{\overline{12}, \overline{13}, \overline{33}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{56}, 12, 34, 56\}$
   einen möglichst kurzen Beweis der Unerfüllbarkeit
   (a) mit DPLL (ohne Lernen)
   (b) mit DPLL und CDCL
   (c) . . . und vorheriger Variablen-Elimination
   (d) . . . *nur* mit Variablen-Elimination (ohne DPLL)

8. Geben Sie ein Polynomialzeit-Entscheidungsverfahren für 2SAT (in der CNF hat jede Klausel ≤ 2 Literale) an.
   Sind die Lösungsverfahren (DPLL, DPLL + CDCL, Variablen-Elimination) für 2SAT polynomiell? (Wenn ja, Beweis; wenn nein, geben Sie eine Familie von nicht erfüllbare 2SAT-Formeln an, für welche die Verfahren lange rechnen)
9. ich denke, die Giraffe (der $(1, 4)$-Springer) hat keinen Hamiltonpfad auf 11×11, siehe https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/sat/leaper/. Nachrechnen und schön aufschreiben: Bachelorarbeit.

Bitblasting

Definition, Motivation, Beispiel

- Def: unbekanntes Element einer endlichen Menge M repräsentieren als Folge (Struktur) von `Bit`, (wenigstens $\lceil \log_2 |M| \rceil$ viele, damit jedes $x \in M$ darstellbar ist)
  ggf. zusätzliche Konsistenz-Bedingungen (nicht jede Bitfolge ist gültig)
  Operationen und Relationen auf M als aussagenlog. Formeln (Schaltungen) realisieren
- Motivation: Constraints über M durch SAT-Solver lösen
- Bsp (Wdhlg): Hamiltonpfad/Kreis: kodiert Zahlen für Zeit und Ort als charakteristischen Vektor (one-hot)

One-Hot-Kodierung mit Ersatz

- Datentyp: `data OH = OH [Bit]`
- eine Unbekannte (mit Bereich $\{0, \ldots, w\}$) anlegen:

```
make w = do
  bs <- replicateM (w+1) $ exists @Bit
  assert $ Ersatz.Counting.exactly 1 bs
  return $ OH bs
```

- Beziehung zwischen symbolischen und konkreten Daten:

```
instance Codec OH where
  type Decoded OH = Natural
  decode s (OH bs) = do vs <- decode s bs
    return $ genericLength $ takeWhile not vs
```


one-hot-Kodierung

- SAT-Kodierung von Exactly_1 ist entscheidend
  und deswegen ausführlich untersucht,
  Übersicht in: Hölldobler, Van Hau Nguyen:
  `http://www.wv.inf.tu-dresden.de/Publications/2013/report-13-04.pdf`,
  vgl. `https://github.com/Z3Prover/z3/issues/755`
- Funktion, Relation $\Rightarrow$ Wertetabelle, Beispiel:
  $f(a, b) = c$ wird zu $\bigwedge_{i,j}(a_i \wedge b_j) \Rightarrow c_{f(i,j)}$
- Ü: Relation $<$ (kleiner als)?
- Ü: partielle Funktion? z.B. Addition auf $\{0, \ldots, n-1\}$
- (partielle) Funktion $D^k \to W$ benötigt $|D|^k$ Klauseln
  nur für kleine Bereiche, geringe Stelligkeiten praktikabel

One-Hot-Arithmetik (variable Bitbreite)

- ```
  instance Equatable OH where
    OH xs === OH ys =
      let common = min (length xs) (length ys)
      in  take common xs === take common ys
  ```
- variable Bitbreite:

```
instance Num OH where
  OH xs + OH ys = OH $
    flip map [0 .. length xs + length ys] $ \ s ->
      or $ do -- nicht effizient!
        (i,x) <- zip [0..] xs
        (j,y) <- zip [0..] ys
        guard $ i + j == s
        return $ x && y
```


Feste (statische) Bitbreite: Zahlen auf Typ-Ebene

- ```
  {-# language DataKinds #-} import GHC.TypeLits
  data OH (w :: Nat) = OH [Bit]  -- Bitbreite im Typ
  ```
- Allokation in Ersatz (allgemein)

```
class Variable t where
  literally :: MonadSAT s m => m Literal -> m t
exists :: (Variable a, MonadSAT s m) => m a
```

- Allokation für `OH w`, dabei Typ-Zahl $\Rightarrow$ Daten-Zahl

```
instance KnownNat w => Variable (OH w) where
  literally l =
    .. replicateM (natVal (Proxy @w)) l ..
```

danach kann man schreiben `exists @(OH 3)`

Reflektion von Zahlen als Typ-Zahlen

- bisher: Zahlen im Typ, Umwandlung zu Daten-Zahlen.
  wir brauchen: die andere Richtung. Bsp: Zahl (Bitbreite) wird im Programm geändert oder ist Benutzer-Eingabe.
- Lösung: Paket `reflection`, enthält Funktion

```
import Data.Reflection
reifyNat :: Integer
 ->(forall (n::Nat).KnownNat n => Proxy n -> r)->r
```

`n` ist *lokal quantifiziert*, kann nicht in `r` verwendet werden

- Anw.: Typvar. `n` deklariert und mit Wert von `x` belegt

```
reifyNat (x :: Integer) $ \ (_ :: Proxy n) ->
  do ..  exists @(OH n) ..
```


Treppen-Kodierung (order encoding)

- Definition: $\forall i : b_i \iff (i \leq u)$
  Bsp: $u = 2$ kodiert durch $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$
- Constraints: $\forall i : b_i \Leftarrow b_{i+1}$ (Monotonie)
- Ü: einfache (lineare) Kodierung von $\leq$
  das erfordert nur linear große Formel
  Ü: ist das trotzdem forcierend?
- vergleiche: $\leq$ ist quadratisch für One-Hot.
  Ü: lineare Übersetzung f von One-Hot nach Treppe, dann $f(x) \leq f(y)$ insgesamt linear für One-Hot x, y.

Addition für Treppenkodierung

- (für variable Bitbreite) Addition *genau* wie für one-hot:

```
OH xs + OH ys = OH $
  flip map [0 .. length xs + length ys] $ \ s ->
    or $ do -- nicht effizient! (kubische Zeit)
      (i,x) <- zip [0..] xs
      (j,y) <- zip [0..] ys
      guard $ i + j == s  -- NICHT geändert!
      return $ x && y
```

Formelgröße: quadratisch. Ü: ist forcierend?

- effizientere Kodierung ($O(n \log n)$) der Addition über Merge-Netze: Een, Sorenson: *Translating Pseudo-Boolean Constraints into SAT*, 2007.
  `http://minisat.se/downloads/MiniSat+.pdf`

Binär-Kodierung, Addition

- in Ersatz: `data Bits = Bits [Bit]`, beginnt mit LSB!
- Ordnung (Ü: fehlende Fälle in eq, Ü: `Orderable`)

```
instance Equatable Bits where
  Bits xs === Bits ys = eq xs ys where
    eq [] [] = true
    eq (x:xs) (y:ys) = (x === y) && eq xs ys
```

- Addition (Ü: fehlende Fälle in add) Formelgröße linear

```
instance Num Bits where
  Bits xs + Bits ys = Bits $ add false xs ys where
    add cin (x:xs) (y:ys) =
      let (s,cout) = fullAdder cin x y
      in  s : add cout xs ys
```


Binäre Multiplikation

$[x_0, \ldots]_2 \cdot [y_0, \ldots]_2 = [z_0, \ldots]_2$,

- Schulmethode: $z = \sum 2^i \cdot x_i \cdot y$ (sequentielle Summation)
- Verbesserungen: C.S. Wallace (1964), L. Dadda (1965),

  benutze *full-adder* für *verschränkte* Summation,

  (ähnlich zu carry-save-adder)

  verringert Anzahl der Gatter und Tiefe des Schaltkreises

  vgl. Townsend et al.:*A Comparison of. . .*, 2003 `http://www.cerc.utexas.edu/~whitney/pdfs/spie03.pdf`,
- scheint für CNF-Kodierung wenig zu helfen

  Testfall: Faktorisierung.

Arithmetik für (statisch) fixierte Bitbreite

- `data Bin (w::Nat) = Bin [Bit]`

  Gibt es `instance Num (Bin 3)` ? Nein: $5 + 7 \notin$ `Bin 3`
- relationale Kodierung (Summe raten und überprüfen mit `plus_ok :: Bin w -> Bin w -> Bin w -> Bit`)
- funktionale Kodierung mit Überlauf

```
data Bin (w::Nat)
  = Bin { contents::[Bit], overflow::Bit }
```

  – Überlauf richtig erzeugen (für Addition trivial, Ü: Multiplikation)
  – Überlauf propagieren (aus den Argumenten für plus bzw. mal)
  – Überlauf bei Implementierung von `===`, `<?` beachten

Anwendung: Anzahl-Constraints

- wir kennen: at-most-one
- wir wünschen: at-most-k
- (jetzt) triviale Lösung: die Bits binär addieren (aber in der passenden Klammerung!)

  so realisiert in `Ersatz.Counting`
- geht das besser? ($\Rightarrow$ Bachelorarbeit (wenigstens))

Praktische Eigenschaften von Kodierungen (I)

- für CNF F auf Variablen $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$:

  Definition: F *erkennt Widersprüche durch UP (unit prop.)*:

  für jede partielle Belegung b gilt:

  wenn keine vollst. Belegung $b' \supseteq b$ existiert mit $b' \models F$,

  dann führt UP auf F von b aus zu einem Konflikt
- Bsp: $F = \{123, \overline{12}, 1\overline{23}, 2\overline{3}, \overline{23}\}$, $b = \{\overline{1}\}$.
- Ü: gilt diese Eigenschaft für die log-Kodierung von AMO?

  Zu betrachten ist eine Belegung $b = \{(x_i, 1), (x_j, 1)\}$.

  Wird durch UP ein Konflikt erreicht?

Praktische Eigensch. (II) – Forcing

- für CNF F auf Variablen $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und Hilfsvariablen H:

  Def.: F ist *(generalized) arc-consistent (GAC)* (*forcing*):

  für jede partielle Belegung b mit $\operatorname{dom} b \subseteq V$

  und jedes $v \in V$ mit $v \notin \operatorname{dom} b$:

  wenn v in allen Modellen $b' \supseteq b$ von F den gleichen Wert hat, dann folgt dieser Wert bereits durch UP.
- Bsp: log-Kodierung von AMO(x): Betrachte $b = \{(x_i, 1)\}$.

  Alle anderen x_j müssen dann falsch sein.

  Wird das durch UP erreicht?

Aufgaben

1. Ist die Kodierung des Halb-Addierers HA$(x, y; c, r)$ durch $(r \leftrightarrow x \oplus y) \wedge (c \leftrightarrow x \wedge y)$ (Tseitin-Kodierung ohne weitere Hilfsvariablen) forcing?

   Ist die Kodierung des Voll-Addierers FA$(x, y, z; c, r)$ durch HA$(x, y; c_1, r_1) \wedge$ HA$(r_1, z; c_2, r) \wedge (c \leftrightarrow c_1 \vee c_2)$ forcing?

   Desgl. für die Kodierung von ITE$(i, t, e; x)$ (if-then-else) durch $(i \wedge t \to x) \wedge (i \wedge \overline{t} \to \overline{x}) \wedge (\overline{i} \wedge e \to x) \wedge (\overline{i} \wedge \overline{e} \to \overline{x})$

   Lesen Sie dazu auch Een und Sörenson: *Translating Pseudo-Boolean Constraints into SAT*, JSAT 2006, (`http://minisat.se/Papers.html`) Abschnitt 5.1.

   Vergleichen Sie mit den Quelltexten von ersatz.

Aufgaben

1. Überprüfen Sie *generalized arc-consistency* (forcing) für `sym_diff_eq a b c` (Semantik: $|a - b| = c$) für One-Hot-Kodierung.

   Bsp.: Bitbreite 4 (für Bereich $\{0, 1, 2, 3\}$), partielle Belegung $a_0 = 0, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 0$. Welche c_i sind dadurch (semantisch) bestimmt? Erhält man diese durch Unit-Propagation? (nehmen Sie dabei an, daß die verwendete Kodierung von exactly-one forcierend ist).
2. zu D. E. Knuth: TAOCP Fasc. 7A (Version 18. Nov. 2022), S. 16 ff: *Graph labeling*

   Diskutieren/realisieren Sie Bitblasting (SAT-Kodierung) für das *reverse model* (S. 19)

Aufgaben

1. sind angegeben Implementierungen der binären Arithmetik und Vergleichsrel. fixierter Breite forcierend?
2. Binärzahlen (statt one-hot) für Graceful labeling.
3. Kodierung von vorzeichenbehafteten Zahlen
   (a) feste Bitbreite: im Zweierkomplement
   (b) variable Bitbreite: zur Basis -2, Bsp. $-5 = 1-2+4-8 = 1\cdot(-2)^0+1\cdot(-2)^1+1\cdot(-2)^3+1\cdot(-2)^3$ Instanzen für Ersatz (Codec, Equatable, Orderable, Num)
4. Diskutieren Sie richtige Propagation von Überläufen bei Kodierung von Zahlen aus $\{-B, \ldots, B\}$ für Operationen plus, mal, kleiner, gleich.

5. weitere Beispiele und Aufgaben zu Bitblasting-Arithmetik: `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/22/isr/#solving-qf_nia-by-bit-blasting` (ISR 2022)
6. Realisieren Sie die Berechnung des Überlaufs bei
   (a) Addition
   (b) Multiplikation

   in `QF_BV` durch möglichst kleine Formel.

   Damit können Sie ein Constraint P in `QF_NIA`, `QF_LIA` in Constraints P_w in `QF_BV` (mit Bitbreite w) übersetzen, und evtl. Glück haben, wie in VL beschrieben.

   Probieren Sie für einfache (handgeschriebene) Constraints P aus, ob (z.B. Z3) für P oder $P_1, P_2, \ldots$ schneller ist.

Prädikatenlogik

Plan

(für den Rest der Vorlesung)

- Prädikatenlogik (Syntax, Semantik)
- existentielle konjunktive Constraints

  in verschiedenen Bereichen, z. B.

  Gleichungen und Ungleichungen auf Zahlen $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$
- beliebige Boolesche Verknüpfungen

  SAT modulo T (= SMT), DPLL(T)
- Bit-blasting (SMT $\to$ SAT)

Syntax der Prädikatenlogik

- Signatur: Name und Stelligkeit für
  - Funktions-
  - und Relationssymbole
- Term:
  - Funktionssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Variable
- Formel
  - atomar: Relationssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Boolesche Verknüpfungen (von Formeln)
  - Quantor Variable Formel
  - gebundenes und freies Vorkommen von Variablen
  - Sätze (= geschlossene Formeln)

Semantik der Prädikatenlogik

- Universum, Funktion, Relation,
- Struktur, die zu einer Signatur paßt
- Belegung, Interpretation
- Wert
  - eines Terms
  - einer Formel

  in einer Struktur, unter einer Belegung

die Modell-Relation $(S, b) \models F$ sowie $S \models F$
Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit (Def, Bsp)

Theorien

Def: $\mathrm{Th}(S) := \{F \mid S \models F\}$
(Die Theorie einer Struktur S ist die Menge der Sätze, die in S wahr sind.)

Bsp: „$\forall x : \forall y : x \cdot y = y \cdot x$“ $\in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 1, \cdot)$

Für K eine Menge von Strukturen:
Def: $\mathrm{Th}(K) := \bigcap_{S \in K} \mathrm{Th}(S)$
(die Sätze, die in jeder Struktur aus K wahr sind)

Bsp: „$\forall x : \forall y : x \cdot y = y \cdot x$“ $\notin \mathrm{Th}(\text{Gruppen})$
. . . denn es gibt nicht kommutative Gruppen, z.B. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

Unentscheidbarkeit

- (Alonzo Church 1938, Alan Turing 1937)

  Das folgende Problem ist nicht entscheidbar:
  - Eingabe: eine PL-Formel F
  - Ausgabe: *Ja*, gdw. F allgemeingültig ist.
- Beweis: kodiert das Halteproblem für ein universelles Berechnungsmodell als eine Wahrheitsproblem der PL

  Rechnung einer Turingmaschine kodiert durch 2-stellige Funktion $f(i, t) =$ der Inhalt von Zelle i zur Zeit t.
- diese mathematische Fragestellung (von David Hilbert, 1928) begründet die Wissenschaft der Informatik.

  (die Berechenbarkeits-Theorie)

Folgerungen aus Unentscheidbarkeit

Suche nach (effizienten) Algorithmen für Spezialfälle
(die trotzdem ausreichen, um interessante Anwendungsprobleme zu modellieren)

- Einschränkung der Signatur (Bsp: keine F.-S., nur einstellige F.-S, nur einstellige Rel.-S.)
- Einschränkung der Formelsyntax
  - nur bestimmte Quantoren, nur an bestimmten Stellen (im einfachsten Fall: ganz außen existentiell)
  - nur bestimmte Verknüpfungen (Bsp: nur durch $\wedge$)
- Einschränkung auf Theorien von gegebenen Strukturen

  Bsp: $F \in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 0, +)$? $G \in \mathrm{Th}(\text{Gruppen})$

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Beispiel LP: monotone Interpretation

- Beispiel: das Wortersetzungssystem $R = \{aa \to bbb, bb \to a\}$ terminiert.
- Beweis: definiere $h : \Sigma \to \mathbb{N} : a \mapsto 5, b \mapsto 3$ und setze fort zu $h^* : \Sigma^* \to \mathbb{N} : h(c_1 \dots c_n) = \sum h(c_i)$. Dann gilt $u \to_R v \Rightarrow h^*(u) > h^*(v)$ wegen $\forall (l \to r) \in R : h^*(l) > h^*(r)$.
- Die Gewichtsfunktion h erhalt man als Lösung des linearen Ungleichungssystems $2a > 3b \wedge 2b > a \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0$.

Beispiel LP-Solver

- Aufgabenstellung im LP-Format (`http://lpsolve.sourceforge.net/5.0/CPLEX-format.htm`)

```
Minimize
 obj: a + b
Subject To
 c1: 2 a - 3 b >= 1
 c2: 2 b -   a >= 1
End
```

- lösen mit `glpsol` (GNU Linear Programing Kit, `https://www.gnu.org/software/glpk/`, 2000-2020, Andrew Makhorin)

```
glpsol --lp lin/lpex.cplex
```


Syntax, Semantik

- lin. (Un-)Gleichungssystem $\to \bigwedge_{i=1}^{n}$ Constraint
- Constraint $\to$ Ausdruck Relsym Ausdruck
- Relsym $\to \quad = \quad | \quad \leq \quad | \quad \geq$
- Ausdruck $\to$ Zahl $+ \sum_{i=1}^{n}$ (Zahl $\cdot$ Unbekannte)
- Zahlenbereich: $\mathbb{Q}$ (rational)

Beispiel: $4y \leq x \wedge 4x \leq y - 3 \wedge x + y \geq 1 \wedge x - y \geq 2$

Semantik: Wertebereich für Unbekannte ist $\mathbb{Q}$ (äquiv: $\mathbb{R}$)

Normalformen

- Beispiel:

  $4y \leq x \wedge 4x \leq y - 3 \wedge x + y \geq 1 \wedge x - y \geq 2$
- Normalform: $\bigwedge_i \sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i$

$$x - 4y \;\geq\; 0$$
$$\dots$$

- Matrixform: $Ax^T \geq b^T$

  A ist linearer Operator.

Lösung von linearen (Un-)Gl.-Sys. mit Methoden der linearen Algebra

Hintergründe

Warum funktioniert das alles?

- lineares Gleichungssystem:

  Lösungsmenge ist (verschobener) *Unterraum*, endliche Dimension
- lineares Ungleichungssystem:

  Lösungsmenge ist *Simplex* (Durchschnitt von Halbräumen, konvex), endlich viele Seitenflächen

Wann funktioniert es nicht mehr?

- nicht linear: keine Ebenen
- nicht rational, sondern ganzzahlig: Lücken

Lineare Gleichungssysteme

- Lösung nach Gauß-Verfahren:
  eine Gleichung nach einer Variablen umstellen,
  diese Variable aus den anderen Gleichungen eliminieren
  (= Dimension des Lösungsraumes verkleinern)
- Ü: es gibt kein solches Verfahren für CNF-SAT (es gibt keine Operation, die der Subtraktion entspricht)
  . . . aber für XOR-SAT (Konjunktion von XOR-Klauseln)
- Mate Soos, Karsten Nohl, Claude Castelluccia: *Extending SAT Solvers to Cryptographic Problems* SAT 2009 `https://github.com/msoos/cryptominisat`
  . . . we extended the solver's input language to support the XOR operation

Lineare Ungleichungen und Optimierung

Entscheidungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem,
- gesucht: eine erfüllende Belegung

Optimierungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem und *Zielfunktion* (linearer Ausdruck in Unbekannten)
- gesucht: eine optimale erfüllende Belegung (d. h. mit größtmöglichem Wert der Zielfunktion)

Standard-Form des Opt.-Problems:
$A \cdot x^T = b, x^T \geq 0$, minimiere $c \cdot x^T$.

Ü: reduziere OP auf Standard-OP, reduziere EP auf OP

Lösungsverfahren für lin. Ungl.-Sys.

- Simplex-Verfahren (für OP) (George Dantzig et al., 1947)

  Schritte wie bei Gauß-Verfahren für Gleichungssysteme (= entlang einer Randfläche des Simplex zu einer besseren Lösung laufen)

  Einzelheiten siehe Vorlesung Numerik/Optimierung

  exponentielle Laufzeit im schlechtesten Fall (selten)
- polynomielle Algorithmen: Leonid Kachiyan, 1979, Narendra Karmakar 1984.
- Fourier (1826)-Motzkin (1936)-Verfahren (für EP)

  vgl. mit Elimination durch vollständige Resolution

  exponentielle Laufzeit (häufig)

Fourier-Motzkin-Verfahren

Def.: eine Ungls. ist in x-Normalform, wenn jede Ungl.

- die Form „x $(\leq \mid \geq)$ (Ausdruck ohne x)“ hat
- oder x nicht enthält.

Satz: jedes Ungls. besitzt äquivalente x-Normalform.

Def: für Ungls. U in x-Normalform:
$U_x^{\downarrow} := \{A \mid (x \geq A) \in U\}$, $U_x^{\uparrow} := \{B \mid (x \leq B) \in U\}$,
$U_x^{-} = \{C \mid C \in U, C \text{ enthält } x \text{ nicht}\}$.

Def: (x-Eliminations-Schritt) für U in x-Normalform:
$U \to_x \{A \leq B \mid A \in U_x^{\downarrow}, B \in U_x^{\uparrow}\} \cup U_x^{-}$

Satz: (U erfüllbar und $U \to_x V$) $\iff$ (V erfüllbar).

FM-Verfahren: Variablen nacheinander eliminieren.

Aufgaben

1. Finden Sie eine monotone Interpretation durch eine Gewichtsfunktion für das Wortersetzungssystem

```
(RULES
a a a -> b b,
b b b -> c d ,
c -> a a ,
d -> c )
```

(Quelle: SRS/Zantema/z116.srs aus `https://www.lri.fr/~marche/tpdb/tpdb-2.0/`, vgl. `https://termination-portal.org/wiki/TPDB`)

Stellen Sie das passende Ungleichungssystem auf, geben Sie eine (geratene) Lösung an.

2. Führen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren für dieses Ungleichungssystem durch.
3. Bestimmen Sie eine Lösung mit GLPK
4. Bestimmen Sie eine Lösung mit hmatrix-glpk.

   Alberto Ruiz, Dominic Steinitz, 2010-2018, *Simple interface to linear programming functions provided by GLPK*. `https://hackage.haskell.org/package/hmatrix-glpk`
5. Finden Sie weitere Systeme aus SRS/Zantema/z101 . . . z112 mit Gewichtsfunktion.

   Vergleichen Sie mit den Lösungen, die in der letzten

Termination Competition gefunden wurden. `https://termination-portal.org/wiki/Termination_Competition`

6. Vorverarbeitung eines Terminationsproblems durch *sparse tiling*, dann Gewichtsfunktion: siehe Geser, Hofbauer, Waldmann FSCD 2019 `https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10528/`

   beruht auf einer alten und einfachen Idee, Beispiel: 2-Kachelung für $aa \to aba$ ergibt $\{[aa] \to [ab][ba]\}$, Anzahl der $[aa]$ nimmt ab,

   das klappt aber nicht immer so einfach (wann nicht?), läßt sich leicht reparieren (wie?)

   in zitierter Quelle: Einschränkung der Kachelmenge

7. cryptominisat: anwenden, Papier lesen, wie wird DPLL/CDCL für XOR-Klauseln angepaßt?

Ganzzahlige lineare Ungleichungen

(Mixed) Integer Programming

- “linear program” (LP): lineares Ungleichungssystem mit Unbekannten aus $\mathbb{Q}$
- “integer program” (IP): lineares Ungleichungssystem, mit Unbekannten aus $\mathbb{Z}$
- “mixed integer program” (MIP): lineares Ungleichungssystem, mit Unbekannten aus $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$
- die Komplexität steigt: LP $\in$ P, MIP $\in$ NPc
- mit MIP kann man Boolesche Constraints simulieren

  . . . sollte man aber nicht: Boolesche Lösungsverfahren (DPLL, CDCL) sind besser als numerische

MIP-Beispiel

LP-Format mit Abschnitten

- `General` für ganzzahlige Unbekannte
- `Binary` für Unbekannte in $\{0, 1\}$

```
Minimize  obj: y
Subject To
 c1: 2 x  <= 1
 c2: - 2 x + 2 y <= 1
 c3:  2 x + 2 y >= 1
General  x y
End
```

Lösen mit `https://projects.coin-or.org/Cbc`:

```
cbc check.lp solve solu /dev/stdout
```

Ü: ausprobieren und erklären: nur x, nur y ganzzahlig

MIP-Lösungsverfahren

- Ansatz: ein MIP M wird gelöst,

  indem eine Folge von LP $L_1, \ldots$ gelöst wird.
- Def: *Relaxation* $R(M)$: wie M, alle Unbekannten reell.
- *Einschränkung*: für eine ganze Unbekannte x_i

  falls $\max\{x_i \mid \vec{x} \in \mathrm{Mod}(R(M))\} = B < \infty$,

  füge Constraint $x_i \leq \lfloor B \rfloor$ hinzu
- *Fallunterscheidung (Verzweigung)*:

  wähle eine ganze Unbekannte x_i und $B \in \mathbb{R}$ beliebig:

  $\mathrm{Mod}(M) = \mathrm{Mod}(M \cup \{x_i \leq \lfloor B \rfloor\}) \cup \mathrm{Mod}(M \cup \{x_i \geq \lceil B \rceil\})$

  entspricht *decide* in DPLL — aber es gibt kein CDCL

SAT als IP, Komplexität von IP

- es gilt SAT $\leq_P$ IP

  Beweis durch Funktion T : CNF $\to$ IP mit
  - T ist in Polynomialzeit berechenbar
  - $\forall F \in$ CNF : F erfüllbar $\iff$ $T(F)$ lösbar

  Lösungsidee:
  - Variablen von $T(F) =$ Variablen von F
  - Wertebereich der Variablen ist $\{0, 1\}$
  - Negation durch Subtraktion, Oder durch Addition, Wahrheit durch ≥ 1
- Folgerung: aus SAT $\in$ NPc folgt IP $\in$ NPc,

  deswegen kein IP- oder MIP-Solver in Polynomialzeit (oder P $=$ NP $=$ 1 Million Dollar)

Travelling Salesman als MIP

(dieses Bsp. aus Papadimitriou und Steiglitz: *Combinatorial Optimization*, Prentice Hall 1982)

Travelling Salesman:

- Instanz: Gewichte $w : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ und Schranke $s \in R_{\geq 0}$
- Lösung: Rundreise mit Gesamtkosten $\leq s$

Ansatz zur Modellierung:

- Variablen $x_{i,j} \in \{0, 1\}$, Bedeutung: $x_{i,j} = 1 \iff$ Kante (i, j) kommt in Rundreise vor
- Zielfunktion?
- Constraints — reicht das: $\sum_i x_{i,j} = 1, \sum_j x_{i,j} = 1$?

Travelling Salesman als MIP (II)

Miller, Tucker, Zemlin: *Integer Programming Formulation and Travelling Salesman Problem* JACM 7(1960) 326–329

- zusätzliche Variablen $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$
- Constraints C: $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : u_i - u_j + n x_{i,j} \leq n - 1$

Übung: beweise

- für jede Rundreise gibt es eine Belegung der u_i, die C erfüllt.
- aus jeder Lösung von C kann man eine Rundreise rekonstruieren.

Was ist die anschauliche Bedeutung der u_i?

min und max als MIP

- kann man den Max-Operator durch lin. Ungln simulieren?

  (gibt es äq. Formulierung zu $\max(x, y) = z$?)
- Ansatz: $x \leq z \wedge y \leq z \wedge (x = z \vee y = z)$,

  aber das *oder* ist verboten.

Idee zur Simulation von $A \leq B \vee C \leq D$:

- neue Variable $f \in \{0, 1\}$
- Constraint $A \leq B + \ldots \wedge C \leq D + \ldots$

  falls eine obere Schranke S für die Werte von A, B, C, D bekannt ist

Übungen zu DL, MIP

1. Diskussion, Beispiel für TSP als MIP

   (es wird kein Kreis, sondern ein Weg bestimmt?)
2. Formulierung eines SAT-Problems als IP, Lösung mit CBC.
3. Überdeckungsproblem (möglichst wenige Damen, die das gesamte Schachbrett beherrschen) as IP,

   Constraint-System programmatisch erzeugen, z.B. `https://hackage.haskell.org/package/limp`, Lösen mit `https://hackage.haskell.org/package/limp-cbc`

   Vergleichen mit SAT-Kodierung, Anzahlconstraint mit

Bit-Blasting

4. Auswertung Adventskalender (Aufgaben: 1, 24)

   Planung Projekte

(Integer/Real) Difference Logic

Motivation, Definition

- viele Scheduling-Probleme enthalten:
  - Tätigkeit i dauert d_i Stunden
  - i muß beendet sein, bevor j beginnt.
- das führt zu Constraintsystem:
  - Unbekannte: $t_i =$ Beginn von i
  - Constraints: $t_i \leq t_j - d_i$
- das ist Spezialfall eines linearen Ungleichungssystems,

  mit einfachem Lösungsverfahren,

  wird später verwendet als Unterprogramm in DPLL(T)

Constraint-Graphen für IDL

- Für gegebenes IDL-System S konstruiere gerichteten kantenbewerteten Graphen G
  - Knoten $i =$ Unbekannte t_i
  - gewichtete Kante $i \xrightarrow{d} j$, falls Constraint $t_i \leq t_j + d$

  beachte: Gewichte $d \in \mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$, ist äquivalent)

  (Ü: wenn alle ≥ 0: Problem ist trivial lösbar. Wie?)
- Satz: S lösbar $\iff$ G besitzt keinen gerichteten Kreis mit negativem Gewicht.

  (Implikation $\Rightarrow$ ist offensichtlich, wir brauchen $\Leftarrow$)
- Ansatz: $t_i =$ minimales Gewicht aller Wege von 1 zu i

  Diskussion: min existiert nicht? Weg existiert nicht?

Kürzeste Wege in Graphen

- (single-source shortest paths)
  - Eingabe:
    - gerichteter Graph $G = (V, E)$
    - Kantengewichte $w : E \to \mathbb{R}$

      äquivalent: Matrix $w : V \times V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
    - Startknoten $s \in V$
  - Ausgabe: Funktion $D : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $\forall x \in V : D(x) =$ minimales Gewicht aller Wege von s nach x
- der bekannte (und schnelle) Algorithmus von Dijkstra funktioniert nur, falls $\forall i, j : w(i, j) \geq 0$ (Ü: Beispiel)

  Lösung: Algorithmus von Bellmann (1958), Ford (1956)

Lösungsidee

iterativer Algorithmus mit *Zustand* $d : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
$d(s) := 0, \forall x \neq s : d(x) := +\infty$
while es gibt eine Kante $i \xrightarrow{w_{i,j}} j$ mit $d(i) + w_{i,j} < d(j)$
$\quad d(j) := d(i) + w_{i,j}$ // Kante ij wird entspannt
jederzeit gilt die *Invariante*:

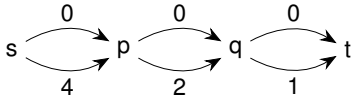
- $\forall x \in V$: es gibt einen Weg von s nach x mit Gewicht $d(x)$
- $\forall x \in V : D(x) \leq d(x)$.

verbleibende Fragen:

- Korrektheit (falls Termination)
- Auswahl der Kante (aus mehreren Kandidaten)
- Termination, Laufzeit

Laufzeit

- exponentiell viele Relaxations-Schritte:



- besser (polynomiell): Bellman-Ford
  - for i from 1 to $|V|$: jede Kante $e \in E$ einmal entspannen
  - dann testen, ob alle Kanten entspannt sind, d. h., $\forall i, j : d(i) + w_{i,j} \geq d(j)$

  Wenn nein, dann existiert negativer Kreis. (Beweis?)
- Dijkstra ist schneller, aber nur bei Gewichten ≥ 0 korrekt

Aufgaben Differenz-Logik

beachte: hier *System* $=$ Konjunktion.
andere Boolesche Kombinationen: später (SMT).

1. ein unlösbares IDL-System S angeben,

   (mit 4 Constraints, so daß jedes echte Unter-System $S' \subsetneqq S$ (mit ≤ 3 Constraints) lösbar ist)

   Bellmann-Ford für den Graphen dieses S,

   Dijkstra für den Graphen dieses S.
2. Wie aufwendig ist die Lösung eines IDL-Systems durch Fourier-Motzkin?

   vergleichen mit Laufzeit Bellmann-Ford

SMT (Satisfiability Modulo Theories)

Definition, Lösungsverfahren (Plan)

- Erfüllbarkeitsproblem für beliebige boolesche Kombination von atomaren Formeln aus einer Theorie

  Beispiel: $(x \geq 3 \vee \neg(x + y \leq 4)) \leftrightarrow x > y$
- Verfahren: 1. (wirklich) ersetze jedes T-Atom a_i durch eine boolesche Unbekannte u_i, erhalte Formel F

  2. (naiv) für jedes boolesche Modell $b \models F$: entscheide, ob die Konjunktion der entsprechenden (ggf. negierten) Atome in T erfüllbar ist
- (2. besser) *DPLL modulo Theory*: Verschränkung der booleschen Suche mit T-Erfüllbarkeit für partielle Modelle

SMT-{LIB,COMP}

- Standard-Modellierungssprache, Syntax/Semantik-Def: `https://smtlib.cs.uiowa.edu/standard.shtml`
- Aufgabensammlung: `https://smtlib.cs.uiowa.edu/benchmarks.shtml` Kombinatorik, Scheduling, Hard- und Software-Verifikation, . . . crafted, industrial, (random?)
- Wettbewerb: `https://smt-comp.github.io/`
- typische Solver (Beispiele)
  - Z3 (Nikolas Bjorner, Leo de Moura et al.) `https://github.com/Z3Prover/z3/`
  - CVC5 (Clark Barrett, Cesare Tinelli et al.) `https://cvc5.github.io/`

Beispiel `queen10-1.smt2` aus SMT-LIB

```
(set-logic QF_IDL) (declare-fun x0 () Int)
(declare-fun x1 () Int) (declare-fun x2 () Int)
(declare-fun x3 () Int) (declare-fun x4 () Int)
(assert (let ((?v_0 (- x0 x4)) (?v_1 (- x1 x4))
(?v_2 (- x2 x4)) (?v_3 (- x3 x4)) (?v_4 (- x0 x1))
(?v_5 (- x0 x2)) (?v_6 (- x0 x3)) (?v_7 (- x1 x2))
(?v_8 (- x1 x3)) (?v_9 (- x2 x3))) (and (<= ?v_0 3)
(>= ?v_0 0) (<= ?v_1 3) (>= ?v_1 0) (<= ?v_2 3) (>=
?v_2 0) (<= ?v_3 3) (>= ?v_3 0) (not (= x0 x1))
(not (= x0 x2)) (not (= x0 x3)) (not (= x1 x2))
(not (= x1 x3)) (not (= x2 x3)) (not (= ?v_4 1))
(not (= ?v_4 (- 1))) (not (= ?v_5 2)) (not (= ?v_5
(- 2))) (not (= ?v_6 3)) (not (= ?v_6 (- 3))) (not
(= ?v_7 1)) (not (= ?v_7 (- 1))) (not (= ?v_8 2))
(not (= ?v_8 (- 2))) (not (= ?v_9 1)) (not (= ?v_9
(- 1)))))) (check-sat) (exit)
```


Umfang der Benchmarks (2014)

```
http://www.cs.nyu.edu/~barrett/smtlib/?C=S;O=D
QF_BV_DisjunctiveScheduling.zip           2.7G
QF_IDL_DisjunctiveScheduling.zip          2.4G
incremental_Hierarchy.zip                 2.1G
QF_BV_except_DisjunctiveScheduling.zip    1.6G
QF_IDL_except_DisjunctiveScheduling.zip   417M
QF_LIA_Hierarchy.zip                      294M
QF_UFLRA_Hierarchy.zip                    217M
QF_NRA_Hierarchy.zip                      170M
QF_LRA_Hierarchy.zip                      160M
```

- QF: quantifier free,
- I: integer, R: real, BV: bitvector
- D: difference, L: linear, N: polynomial

Anwendung zur Terminations-Analyse

- der *arktische* Halbring: $\mathbb{A} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{N}, \max, +, -\infty, 0)$
- $\mathbb{A}^{d\times d}$: quadratische Matizen über $\mathbb{A}$,
- $P > Q$ falls $\forall i, j : (P_{i,j} > Q_{i,j}) \vee (P_{i,j} = -\infty = Q_{i,j})$.
- Matrix-Interpretation: $i : \Sigma \to \mathbb{A}^{d\times d}$ mit $\forall c : i(c)_{1,1} \geq 0$ Interpretation von Wörtern: $i(c_1 \dots c_n) := i(c_1) \circ \dots \circ i(c_n)$ Bsp: $i : a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}$
- i kompatibel mit R, falls $\forall (l, r) \in R : i(l) > i(r)$. Bsp (Fortsetzg.) i kompatibel mit $\{aa \to aba\}$
- dann terminiert R, denn jede R-Ableitung von w aus hat $\leq i(w)_{1,1}$ Schritte
- für gegebenes R und d: Kompatibilitä von i ist Constraint-System in `QF_LIA`.

e-DSLs für Constraint-Prog.

- die Constraint-Sprache C dient zur Kommunikation mit Solver (nicht: mit Anwender/Anwendungsprogrammierer)
- Programm in einer Gastsprache G für
  - Konstruktion des Constraint-Systems
  - Verarbeitung des Resultates (des Modells)
- dabei müssen übersetzt werden
  - Namen in C, Namen in G
  - Werte in C (symbolisch), Werte in G (tatsächlich)
  - Typen in C (Bsp: `Bit`), in G (Bsp:`Bool`)
- Entwurfs-Ziele:
  - symbolisches Programm (in C) sieht aus wie tatsächliches Programm (in G)
  - notwendige Übersetzungen möglichst unsichtbar

Wiederholung: ersatz als e-DSL für SAT

- ```
  (let b = True in solveWith minisat $ do
     p <- exists @Bit; assert (p === encode b)
     return p
   ) >>= \ case (Satisfied, Just (p :: Bool))
  ```
- ```
  class Codec c where
     type Decoded c
     encode :: Decoded c -> c
     decode :: Belegung -> c -> Decoded c
  instance Codec Bit where
     type Decoded Bit = Bool; ...
  ```
- Ü: überprüfen Sie die Design-Ziele, geben Sie die technischen Mittel an, durch die diese erreicht werden

Beispiel: Python-Bindung für Z3

- `https://github.com/Z3Prover/z3/blob/master/examples/python/hamiltonian/hamiltonian.py`

```
L = {0:[1,2], 1:[2], 2:[1,0]} # Beispiel-Graph
cv = [Int('cv%s'%i) for i in range(L)]
s = Solver() ; s.add(cv[0]==0)
for i in range(L):
  s.add(Or([cv[j]==(cv[i]+1)%L for j in gr[i]]))
s.check(); print (s.model())
```

- Design-Ziele überprüfen:
  - Namen, Typen, Ausdrücke, Übersetzungen, Sichtbarkeit
- beachte: hier wird keine SMTLIB-Datei erzeugt, sondern API des Solvers aufgerufen.

Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 1)

- Iavor S. Diatchki:
  `https://hackage.haskell.org/package/simple-smt`
- ```
  s <- newSolver "cvc4" ["--lang=smt2"] Nothing
  setLogic s "QF_LIA"
  x <- declare s "x" tInt
  assert s (add x (int 2) `eq` int 5)
  check s
  print =<< getExprs s [x]
  ```
- C-Namen sind sichtbar
- C-Typen (`tInt`) erscheinen nicht statisch in G-Typen
- C- und G-Operatoren: add, +
- explizite Rück-Übersetzung (getExprs)

Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 2)

- Henning Günther: `https://hackage.haskell.org/package/smtlib2`
- ```
  withBackend (createPipe "z3" ["-smt2","-in"]) $ do
    x <- declareVar int; y <- declareVar int
    assert $ x .+. y .==. cint 5
    assert $ x .>. cint 0; assert $ y .>. cint 0
    checkSat
    IntValue vx <- getValue x; IntValue vy <- getValue
    return (vx,vy)
  ```
- C-Typen erscheinen statisch in G-Typen, Bsp:

```
(.>.) :: (Embed m e, IsSMTNumber tp, HasMonad a, Ha
  , MatchMonad a m, MatchMonad b m
  , MonadResult a ~ e tp, MonadResult b ~ e tp)
  => a -> b -> m (e BoolType)
```


Aufgaben

1. Bestimmen Sie:
   die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zwei verschiedene Weisen als Summe von zwei Kuben schreiben läßt
   mit einem SMT-Solver. Schreiben Sie das Constraint-System von Hand. Benutzen Sie Logiken `QF_NIA` (Polynom-Arithmetik) (Warum nicht `QF_LRA`?)
   Hinweis: die Bedingung *die kleinste* kann man nicht hinschreiben, aber durch systematisches Probieren realisieren
   Lösen Sie nun die gleiche Aufgabe mit `QF_BV` (Bitvektoren)

2. Dieses Beispiel in `QF_NIA` ist wohl zu schwer für heutige Solver:
   Andrew R. Booker, Andrew V. Sutherland: *On a question of Mordell*, `https://arxiv.org/abs/2007.01209`
   John Pavlus: *Sum-of-Three-Cubes Problem Solved for 'Stubborn' Number 33*,
   `https://www.quantamagazine.org/sum-of-three-cubes-problem-solved-for-stubb`
3. wählen Sie zufällig in SMTLIB eine (quantorenfreie) Logik und dort eine Benchmark. Erklären Sie die Benchmark. Wenden Sie verschiedene SMT-Solver an (z.B. Z3 und Z3++) und vergleichen Sie Laufzeiten. Ändern Sie die Formel (vorsichtig), erläutern Sie die Änderungen der Belegung oder Erfüllbarkeit.

4. die zitierte Hamiltonkreis-Kodierung (oder die früher zitierte MIP-Kodierung dafür) in SMTLIB-Syntax hinschreiben (in möglichst einfacher Logik) und ausprobieren.
5. Eine kompatible arktische Matrix-Interpretation für $aa \to aba$ (das Bsp. auf Folie) durch Lösen eines `LIA`-Systems bestimmen
   Desgl. für $a^2b^2 \to b^3a^3$ (größere Dimension verwenden).
   Warum gibt es keine solche Interpretation für $ab \to ba$?
   Hinweis: weil diese Regel quadratische lange Ableitungen gestattet (von welchen Startwörtern?), aber solche können bei arktischen Interpretationen nicht vorkommen (warum?)

Uninterpretierte Funktionen (UF)

Motivation, Definition

Interpretation $\models$ Formel,
Interpretation $=$ (Struktur, Belegung)
Die *Theorie* $\mathrm{Th}(S)$ einer Struktur S ist Menge aller in S wahren Formeln: $\mathrm{Th}(S) = \{F \mid \forall b : (S, b) \models F\}$
Beispiel 1: Formel $a \cdot b = b \cdot a$ gehört zur $\mathrm{Th}(\mathbb{N}$ mit Multipl.$)$, aber nicht zu $\mathrm{Th}($Matrizen über $\mathbb{N}$ mit Multipl.$)$.
Beispiel 2: Formel

$$(x = y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y))$$

gehört zu *jeder* Theorie (mit passender Signatur),

Gleichheit von Termen

In jeder Algebra gelten diese Formeln:

$$(t_1 = s_1) \wedge \ldots \wedge (t_k = s_k) \rightarrow f(t_1, \ldots, t_k) = f(s_1, \ldots, s_k)$$

(Leibniz-Axiom für die Gleichheit, *functional consistency*)

- Definition: eine Σ-Algebra A heißt *frei*, wenn die Implikation im Leibniz-Axiom eine Äquivalenz ist
- Beispiel: jede Termalgebra ist frei.
- Nicht-Beispiel: $\Sigma = \{+/2\}, D = \mathbb{N}$ ist nicht frei.
- Bsp.: eine freie Algebra auf $\mathbb{N}$ zur Signatur $\{f/2\}$ ist $f(x, y) = 2^x \cdot 3^y$ (Satz von Euklid: jede positive natürliche Zahl besitzt *genau eine* Zerlegung in Primzahlpotenzen)

Anwendungen

Für jede Σ-Algebra S gilt:

- Formel F ist allgemeingültig in der *freien* Σ-Algebra
- $\Rightarrow$ Formel F ist allgemeingültig in S.

Vorteil: kein Entscheidungsverfahren für S nötig
Nachteil: Umkehrung gilt nicht.

Anwendung bei Analyse von Programmen, Schaltkreisen: Unterprogramme (Teilschaltungen) als *black box*,

Roope Kaivola et al.: *Replacing Testing with Formal Verification in Intel CoreTM i7 Processor Execution Engine Validation*, Conf. Computer Aided Verification 2009, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02658-4_32`

Die Logik QF_UF in SMT-LIB

- Bsp: die Formel $(x = y) \wedge (f(f(g(x))) \neq f(f(g(y))))$

```
(set-logic QF_UF) (declare-sort U 0)
(declare-fun f (U) U) (declare-fun g (U) U)
(declare-fun x () U) (declare-fun y () U)
(assert (and (= x y)
          (not (= (f (f (g x))) (f (f (g y
(check-sat)
```

  ist nicht erfüllbar,
- d. h., das Gegenteil ist allgemeingültig:

$$\forall f, g, x, y : ((x = y) \rightarrow (f(f(g(x))) = f(f(g(y)))))$$

Lösungsverfahren für UF

- *Eingabe*: Formel F als Konjunktion von Gleichungen und Ungleichungen auf Termen, *Ausgabe*: F erfüllbar?
  Bsp. $f(a, b) = a \wedge f(f(a, b), b) \neq a$
- Verfahren *congruence closure* (Shostak 1978):
  Folge von Partitionen der Menge aller Teilterme
  Beginn: jeder Teilterm bildet eine Klasse
  $\{a\}, \{b\}, \{f(a, b)\}, \{f(f(a, b), b)\}$, dann wiederholt:
  – für Gleichung: $t_i = t_j$: Klassen vereinigen
  – Abschluß unter Symmetrie, Transitivität, Kongruenz
  Ausgabe: erfüllbar, wenn kein $t_i \neq t_j$ in einer Klasse
- Sekundär-Quelle (z.B.) L. Koller, 2020
  `https://www21.in.tum.de/teaching/sar/SS20/6.pdf`

DPLL(T) (Modulo Theories)

DPLL(T), Prinzip

für jedes T.Atom $A = P(t_1, \ldots, t_k)$
eine boolesche Unbek. $p_A \leftrightarrow A$.

- naives Vorgehen:
  - für jede Lösung des SAT-Problem für diese Variablen p_*:
  - bestimme Erfüllbarkeit dieser Konjunkt. von T-Literalen
- Realisierung mit DPLL(T):
  - decide, T-solve (Konjunktion von T-Literalen)
  - Konflikte (logische und T-Konfl.): backtrack
  - logische Propagationen, Lernen
  - T-Propagation (T-Deduktion)

DPLL(T), Beispiel QF_LRA

- T-Solver für Konjunktion von Literalen

  z. B. Simplex, Fourier-Motzkin
- T-Konfliktanalyse:

  bei Nichterfüllbarkeit liefert T-Solver eine „Begründung“

  $=$ (kleine) nicht erfüllbare Teilmenge (von Literalen $\{a_1, \ldots, a_k\}$), dann Klausel $\neg a_1 \vee \ldots \vee \neg a_k$ lernen
- T-Deduktion, Bsp: aus $x \leq y \wedge y \leq z$ folgt $x \leq z$

  neues (!) Atom $x \leq z$ entsteht durch Umformungen während Simplex oder Fourier-Motzkin

  betrachte $\neg x \leq y \vee \neg y \leq z \vee x \leq z$ als Konfliktklausel, damit CDCL

DPLL(T): Einzelheiten, Beispiele

- Literatur: Robert Niewenhuis et al.:
  `https://www.cs.upc.edu/~roberto/papers/IJCAR2012Slides.pdf`
- Univ. Barcelona, Spin-Off: Barcelogic, Bsp:

  `https://barcelogic.com/en/sports-planning/`

  . . . software for professional sports scheduling. It has been successfully applied during the last five years in the Dutch professional football (the main KNVB Ere- and Eerste Divisies).

  An adequate schedule is not only important for sportive and economical fairness among teams and for public order. It also plays a very important role reducing costs and increasing revenues, e.g., the value of TV rights.

Aufgaben

1. freie Algebra:
   - weitere freie Algebren zu $\Sigma = \{f/2\}$ über $\mathbb{N}$.
   - die von $F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$; $G(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$; $I() = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Algebra ist frei?
2. `QF_UF`:

(a) warum ist diese Formel nicht erfüllbar?
`https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/blob/master/TypeSafe/z3.1184163.smt2`

(b) Benchmarks `https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/tree/master/eq_diamond` ausprobieren, angegebene Quelle (SMT 2005) lesen

(c) über alle Benchmarks
`https://clc-gitlab.cs.uiowa.edu:2443/SMT-LIB-benchmarks/QF_UF/-/tree/master/`
welches ist die schwerste (für Z3, für CVC5)?

(d) Für *quantifiers in the UF theory* `https://smt-comp.github.io/2021/system-descriptions/Yices2.pdf`: Beschreibung und Beispiele suchen, Yices installieren, Beispiele ausprobieren

3. inkrementeller Theorie-Solver:

(a) für `QF_IDL` (Niewenhuis JACM 2006 `https://www.cs.upc.edu/~roberto/papers.html`), Unterschiede zu nicht inkrementellem Verfahren.

(b) für `QF_LRA`: wie kann man Fourier-Motzkin inkrementell verwenden? (Der Anwendungsfall ist: es taucht eine

neue Ungleichung auf, in der Variablen vorkommen, die durch Fourier-Motzkin bereits eliminiert wurden)

4. DPLL(T) in autotool-Aufgabe
5. Diskussion zu Projekten

Kombination von Theorien

Beispiele f. Theorie-Kombinationen

(Kroening/Strichman: Kapitel 10)

- Lineare Arithmetik + uninterpretierte Funktionen:

  $(x_2 \geq x_1) \wedge (x_1 - x_3 \geq x_2) \wedge (x_3 \geq 0) \wedge f(f(x_1) - f(x_2)) \neq f(x_3)$

- Bitfolgen + uninterpretierte Funktionen:

  $f(a[32], b[1]) = f(b[32], a[1]) \wedge a[32] = b[32]$

- Arrays + lineare Arithmetik

  $x = ((v, i, e), j) \wedge y = (v, j) \wedge x > e \wedge x > y$

Anwendung: statische Software-Analyse

- Patrick M. Rondon, Ming Kawaguchi, Ranjit Jhala: *Liquid (= logically qualified) Types*, PLDI 2008;
  automatically infer dependent types precise enough to prove a variety of safety properties. . . . decidable logic of equality, uninterpreted functions and linear arithmetic
- Niki Vazou, Patrick M. Rondon, Ranjit Jhala: *Abstract Refinement Types*, ESOP 2013
  preserving SMT-based decidability by encoding refinement parameters as uninterpreted propositions within the refinement logic.

  `https://ucsd-progsys.github.io/liquidhaskell/`
-
```
type Even = {v:Int | v % 2 = 0 }
maximum :: [Even] -> Even
```


Definition f. Theorie-Kombination

(Wdhlg) Signatur Σ, Theorie T, Gültigkeit $T \models \phi$
Kombination von Theorien:

- . . . mit disjunkten Signaturen: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$
- Theorie T_1 über Σ_1, Theorie T_2 über Σ_2.
- Theorie $T_1 \oplus T_2$ über $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$

Aufgabenstellung:

- gegeben: Constraint-Solver (Entscheidungsverfahren) für T_1, Constraint-Solver für T_2;
- gesucht: Constraint-Solver für $T_1 \oplus T_2$

Konvexe Theorien

eine Theorie T heißt *konvex*, wenn für jede Konjunktion ϕ von Atomen, Zahl n, Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ gilt:

- aus $T \models \forall x_1, \ldots, y_1, \ldots : (\phi \rightarrow (x_1 = y_1 \vee \ldots \vee x_n = y_n))$
- folgt: es gibt ein i mit $T \models \forall x_1, \ldots, y_1, \ldots : (\phi \rightarrow (x_i = y_i))$

Ü: warum heißt das *konvex*?

Beispiele: konvex oder nicht?

- lineare Ungleichungen über $\mathbb{R}$ (ja)
- lineare Ungleichungen über $\mathbb{Z}$ (nein)
- Konjunktionen von (Un)gleichungen (ja)

Das Nelson-Oppen-Verfahren (Quellen)

- Greg Nelson, Derek C. Oppen: *Simplification by Cooperating Decision Procedures*, ACM TOPLAS 1979, `http://doi.acm.org/10.1145/357073.357079`
- Oliveras und Rogriguez-Carbonell: *Combining Decisions Procedures: The Nelson-Oppen Approach*,
  als Teil der Vorlesung *Deduction and Verification Techniques*, U Barcelona, 2009 `https://www.cs.upc.edu/~oliveras/teaching.html`
- Tinelli und Harandi: *A new Correctness Proof of the Nelson-Oppen Combination Procedure*, FROCOS 1996.
  `http://homepage.cs.uiowa.edu/~tinelli/papers/TinHar-FROCOS-96.pdf`

Das Nelson-Oppen-Verfahren: purification

purification (Reinigung):

- durch Einführen neuer Variablen:
- alle atomaren Formeln enthalten nur Ausdrücke *einer* Theorie

Beispiel:

- vorher: $\phi := x_1 \leq f(x_1)$
- nachher: $\phi' := x_1 \leq a \wedge a = f(x_1)$

im Allg. $\phi \iff \exists a, \ldots : \phi'$
d. h. ϕ erfüllbar $\iff$ ϕ' erfüllbar.

Nelson-Oppen für konvexe Theorien

für entscheidbare Theorien $T_1, \ldots, T_n$ (jeweils T_i über Σ_i)

- Eingabe: gereinigte Formel $\phi = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$
  (mit ϕ_i über Σ_i)
- wenn ein ϕ_i nicht erfüllbar, dann ist ϕ nicht erfüllbar
- wenn $T_i \models (\phi_i \rightarrow x_i = y_i)$, dann Gleichung $x_i = y_i$ zu allen ϕ_j hinzufügen,. . .
- bis sich nichts mehr ändert, dann ϕ erfüllbar

(Beispiele)
(Beweis)

Nelson-Oppen, Beispiel

(Kroening/Strichman, Ex. 10.8)
NO-Verfahren anwenden auf:
$x_2 \geq x_1 \wedge x_1 - x_3 \geq x_2 \wedge x_3 \geq 0 \wedge f(f(x_1) - f(x_2)) \neq f(x_3)$

Diese Beispiel als Constraint-Problem in der geeigneten SMT-LIB-Teilsprache formulieren und mit Z3 Erfüllbarkeit bestimmen.

Anwendg.: Bounded Model Checking

Begriff, Motivation

- *model checking*: feststellen, ob
  - ein *Modell* eines realen Hard- oder Softwaresystems (z.B. Zustandsübergangssystem f. nebenläufiges Programm)
  - eine *Spezifikation* erfüllt (z.B. gegenseitiger Ausschluß, Liveness, Fairness)
- *symbolic* model checking:
  symbolische Repräsentation von Zustandsfolgen
  im Unterschied zu tatsächlicher Ausführung (Simulation)
- *bounded*: für Folgen beschränkter Länge

Literatur, Software

- Armin Biere et al.: *Symbolic Model Checking without BDDs*, TACAS 1999, `http://fmv.jku.at/bmc/`
  Software damals: Übersetzung nach SAT, später: SMT (`QB_BV`), Solver: `http://fmv.jku.at/boolector/`
- Daniel Kroening und Ofer Strichman: *Decision Procedures, an algorithmic point of view*, Springer, 2008.
  `http://www.decision-procedures.org/`
  Software: `http://www.cprover.org/cbmc/`
- Nikolaj Bjørner et al.: *Program Verification as Satisfiability Modulo Theories*, SMT-Workshop 2012,
  `http://smt2012.loria.fr/`
  Softw.: `https://github.com/Z3Prover/z3/wiki`

BMC für Mutual Exclusion-Protokolle

System mit zwei (gleichartigen) Prozessen A, B:

```
A0: maybe goto A1
A1: if l goto A1 else goto A2
A2: l := 1; goto A3
A3: [critical;] goto A4
A4: l := 0; goto A0

B0: maybe goto B1
B1: if l goto B1 else goto B2
B2: l := 1; goto B3
B3: [critical;] goto B4
B4: l := 0; goto B0
```

Schließen sich `A3` und `B3` gegenseitig aus? (Nein.)

(nach: Donald E. Knuth: TAOCP, Vol. 4 Fasz. 6, S. 20ff)

Modell: Zustandsübergangssystem

Zustände:

- jeder Zustand besteht aus:
  - Inhalte der Speicherstellen (hier: $l \in \{0, 1\}$)
  - Programmzähler (PC) jedes Prozesses (hier: $A \in \{0 \dots 4\}, B \in \{0 \dots 4\}$)
- Initialzustand: $I = \{l = 0, A = 0, B = 0\}$
- Menge der Fehlerzustände: $F = \{A = 3, B = 3\}$

Übergangsrelation (nichtdeterministisch): für $P \in \{A, B\}$:

- P führt eine Aktion aus (schreibt Speicher, ändert PC)

Aussagenlog. Formel für $I \rightarrow^{\leq k} F$ angeben,
deren Erfüllbarkeit durch SAT- oder SMT-Solver bestimmen

Übung BMC

- Software: `https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/boumchak`
- überprüfe 1. gegenseitigen Ausschluß, 2. deadlock, 3. livelock (starvation) für weitere Systeme, z.B.

  E. W. Dijkstra, 1965:
  `https://www.cs.utexas.edu/~EWD/transcriptions/EWD01xx/EWD123.html#2.1.`

  G. L. Peterson, *Myths About the Mutual Exclusion Problem*, Information Processing Letters 12(3) 1981, 115–116

Theorie der Bitvektoren (QF_BV)

Beispiel, Anwendung, Solver

```
(declare-fun a () (_ BitVec 12))
(declare-fun b () (_ BitVec 12))
(assert (and
   (bvult (_ bv1 12) a) (bvult (_ bv1 12) b)
   (= (_ bv1001 12) (bvmul a b))))
```

- Verifikation von Hard- und Software für Arithmetik auf Bitfolgen (Maschinenzahlen) fester Länge

  (d.h., CPU und maschinen(nahe) Programme)
- Aina Niemetz, Mathias Preiner: *Bitwuzla*,
  `https://bitwuzla.github.io/`

  gewinnt 26 vonn 56 Kategorien SMT-Comp 2023

Lazy und Eager Approach für QFBV

- *eager* (kennen wir schon) bit-blasting:
  unbekannter Bitvektor = Folge unbekannter Bits
  QFBV-Constraint $\Rightarrow$ aussagenlog. Formel (mit z.B. Addier-, Multiplizierschaltkreisen)
  dann SAT-Solver
- *lazy*: DPLL(T) für T = Theorie der Bitvektoren
  (u.a. Assoziativität, Kommutativität von Add., Mult.)
  T-Solver löst Konjunktion von T-Literalen
  - zunächst symbolisch, erst danach durch ...
  - bit-blasting,
  - lokale Suche (Niemetz, Preiner, *ternary propagation based local search*, FMCAD 2020

QFBV für arithmetische Constraints

- ... mit „richtigen Zahlen“:

  z.B., aus Terminationsanalyse (Koeffz. in natürlichen und arktischen Matrizen)

  man muß den Überlauf erkennen und verhindern

  für Addition: einfach (mit einem Bit mehr rechnen),

  für Multiplikation: ?

Zusammenfassung, Ausblick

Kernaussagen

- Constraint-Programmierung $=$
  - anwendungsspezifische logische Formel,
  - generische bereichsspezifische Such/Lösungsverfahren
- CP ist eine Form der deklarativen Programmierung
- typische Anwendungsfälle für CP mit Formeln ohne Quantoren, mit freien Variablen, Solver sagt:
  - JA: beweist Existenz-Aussage, rekonstruiere Lösung der Anwendungsaufgabe aus Modell
  - NEIN: das beweist All-Aussage (z. B. Implementierung erfüllt Spezifikation für jede Eingabe)

Kernthemen

Aussagenlogik (SAT)

- Grundlagen: Formeln, Resolution, DPLL, CDCL
- Anw.: SAT-Kod. für kombinatorische Aufgaben, Forcing,

Prädikatenlogik: Bereiche und -spezifische Verfahren:

- Zahlen: Differenzlogik, lineare Ungleichungen (Fourier-Motzkin),
- uninterpretierte Funktionen,

Prädikatenlogik: allgemeine und spezielle Verfahren:

- Kombination von Theorie-Löser und SAT-Löser (DPLL(T))
- Bit-Blasting für finite-domain-Constraints

Typische Anwendungen

- Ressourcen-Zuordungs-, -Optimierungs-Aufgaben mit
  - nicht linearen Funktionen
  - nicht nur konjuktiver Verknüpfung von Teilbedingungen
- Hardware-Verifikation: digitale Schaltnetze, Schaltwerke
- Software-Verifikation:
  - bounded model checking,
  - Terminations-Analyse, siehe *Constraint Programming for Analysis of Rewriting*, 13th Intl. School on Rewriting, Tbilisi, 2022, `https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/22/isr/`

Geschichte der Constraint-Progr. (I)

- Lineare Optimierung (Dantzig 1947 et al.)

  $\Rightarrow$ Mixed Integer LP (Gomory 195* et al.)
  `https://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/builders/builders_gomory.html`
- PROLOG (Kowalski 1974)
  - löst Unifikations-Constraints über Bäumen
  - mit fixierter Suchstrategie (SLD-Resolution)

  $\Rightarrow$ Constraint Logic Programming (spezielle Syntax und Strategien für Arithmetik, endliche Bereiche)

  Global constraints in CHIP: Beldiceanu, Contejean 1994
  `http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177(94)90127-9`

Geschichte der Constraint-Progr. (II)

- fixierte, bekannte Suchstrategie: PROLOG
- Strategie innerhalb des CP bestimmt: gecode
- (praktisch unbekannte) Strategie im externen Solver:
  - SAT
    - DPLL: Martin Davis, Hilary Putnam (1960), George Logemann, Donald W. Loveland (1962),
    - SAT ist NP-vollst. (Steven Cook, Leonid Levin, 1971)
    - CDCL: J.P Marques-Silva, Karem A. Sakallah (1996)
  - SMT
    - DPLL(T): the *lazy* approach to SMT
    - Yices 2006,
    - Z3 (de Moura, Bjorner, 2008)

Constraints für (baum)strukturierte Daten

- Sprache CO4, Dissertation von A. Bau
  `http://abau.org/co4.html`
- Constraint `c :: P -> U -> Bool` *in Haskell*
- . . . das geht in `ersatz` auch?

  Ja — aber nur für $U =$ `Bool`, `[Bool]`, usw., und auch dafür nicht vollständig:

  `if a == b then c else d && e`

  $\Rightarrow$ `ite (a === b) c (d && e)`
- CO4 gestattet für P *und* U:
  - algebraische Datentypen (`data`)
  - pattern matching (`case`)

SAT-Kodierung von Bäumen

- kodiere (endl. Teilmengen von) algebraischen Datentypen

  ```
  data U = C1 T11 .. T1i | C2 T21 .. T2j | ..
  ```
- durch Baum mit Grad $\max(i, j, \ldots)$,

  in jedem Knoten die FD-Kodierung des Konstruktor-Index
- ```
  e = case (x :: U) of
          C1 .. -> e1 ; C2 .. -> e2
  ```

  übersetzt in $\bigwedge_k (\text{index}(x) = k) \Rightarrow (e = e_k)$

Spezifikation, Implementierung, Korrektheit, Anwendungsfälle (Terminations-Analyse, RNA-Design), Messungen, Verbesserungen, Erweiterungen.
siehe Publikationen auf `http://abau.org/co4.html`

Themen für Bachelor/Master-Arbeiten

- Dokumentation, Messung und Verbesserung von ersatz:
  - Relationen (BA abgeschlossen)
  - Zahlen mit type-level Länge und Überlauf
  - Anzahl-Constraints
- Vergleich von propositionaler und funktionaler Kodierung bei klassischen (publizierten) Testfällen
- Verbesserung/Alternativen Bitblasting in Termination: durch SMT-Solver (QFBV)
- Methoden zur Analyse von SAT-Kodierungen
  - automat. Prüfen (Herstellen?) d. Forcing-Eigenschaft
  - Rückübertragung von Laufzeitinformation (wer wird eliminiert/propagiert) auf Quelltext-Ebene
  ```