

# Projektvorschlag für Wissenschaftssommer 2008:

## Die schwersten Spiele ihrer Klasse

Johannes Waldmann und Wolfgang Wittig, HTWK Leipzig

14. September 2007

### Teil I

## Allgemeines

### 1 Inhalt

- praktische Aufgabenstellungen (Ressourcen-Zuordnung, Wegplanung usw.)
- werden mathematisch exakt modelliert
- die Modelle sind oft Spiele (Puzzles)
- ausgehend von Modellen kann man algorithmische Lösungen finden
- und die Schwere der Aufgabe/Effizienz der Lösung einordnen
- in der Informatik: Komplexitätstheorie,
- mathematische Grundlagen: diskrete Mathematik, Kombinatorik, Graphentheorie

### 2 Zielgruppe

Schüler ab 5. Klasse; deren Lehrer; allgemein wissenschaftlich interessierte Öffentlichkeit.

### 3 Methode

- konkrete Exponate zum Ausprobieren (Spiele, Puzzles)
- Zuordnung der Spiele zu Motivation (Anwendung) und Theorie (Komplexitätsklasse) durch Poster, Handzettel, Standbetreuer

- Interaktive Webseite zum Betrachten von Aufgaben (die z. T. den Exponaten entsprechen), Eingeben von Lösungen, mit sofortiger Bewertung und Speicherung für Sammelauswertung (Highscores) nach gewisser Zeit.

## 4 Partner, verwandte Projekte

- E-Testing-Werkzeug autotool <http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/autotool/>  
mit noch anzupassender, speziell zugeschnittener Benutzeroberfläche
- Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik <http://www.lsgm.de/>  
langjährige Erfahrung in der mathematischen Schülerbildung

## 5 erwünschte Nebenwirkungen

- (Highscore/Preis-)Aufgaben über einen längeren Zeitraum (Woche) online: länger anhaltende Beschäftigung (als nur einmal kurz am Exponat); z. B. können sich Schüler im Unterricht weiter mit Aufgaben auseinandersetzen (dazu evtl. kurze Handreichung für interessierte Lehrer ausarbeiten)
- Bei Bearbeitung der Online-Aufgaben: deutlicher Verweis (Links usw.) auf HTWK (Studienwerbung) und LSGM (erhöht Attraktivität)
- Aufgaben-Webseite kann zu diesen Zwecken auch unabhängig weiter genutzt werden
- Preise gestiftet von Sponsoren, z. B. lokale IT-Unternehmen („wer diese Aufgabe lösen kann, wird sofort eingestellt,,u.ä.)

## Teil II

## Mögliche

## Exponate/Aufgabentypen (gegenständlich)

## 6 Komplexität von (Such)problemen

Idee: je ein Beispiel aus Komplexitätsklassen

- P: Sortieren  
Sortieren (von verdeckten Spielkarten) mit möglichst wenig Fragen

- NP: Graphenfärben, Vertex Cover  
Graph ausdrucken (A3), Knotenfärben, Knotenüberdeckung durch Spielsteine
- NP: SAT
- NP: Binpacking
- PSPACE: Verschiebe-Puzzles (Lunar Lockout usw.)
- RE: Postsches Korrespondenzproblem

jeweils Diskussion der Größe des Suchraumes möglich

## Teil III

# Mögliche Exponate/Aufgabentypen (Online)

Können getestet werden unter <https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/cgi-bin/Super.cgi> Schule: HTWK, Matrikel: 319, Passwort: loqzotepos, Semester: Sommer07, Vorlesung: WEL-Demonstration.

### 6.1 Sortiernetze

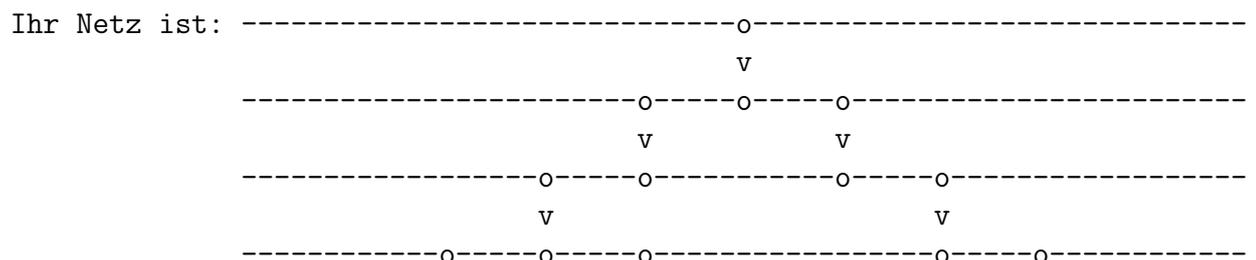
Ein Komparator ordnet zwei Eingaben (Ausgaben: max oben, min unten).  
Ein Netz besteht aus mehreren (möglichst wenigen) Komparatoren.

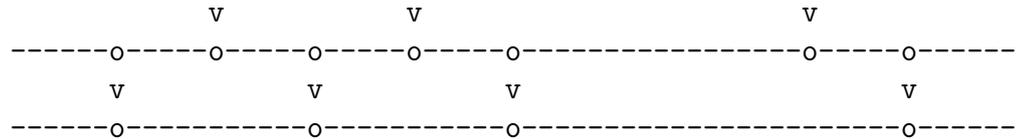
Beispiel (Sortier-Direct-12):

Finden Sie ein Sortiernetz für 6 Eingänge mit weniger als 15 Komparatoren.

```
gelesen: mkNetz [ ( 1 , 2 ) , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 ) , ( 3 , 4 )
                  , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 ) , ( 4 , 5 ) , ( 5 , 6 ) , ( 4 , 5 )
                  , ( 3 , 4 ) , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 )
                  ]
```

partiell korrekt?





total korrekt?

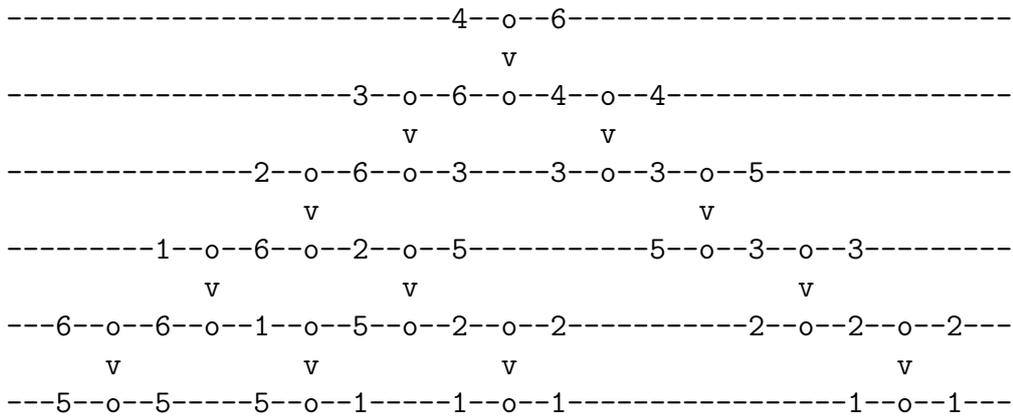
Diese Eingabe wird nicht korrekt geordnet:

[ 5 , 6 , 1 , 2 , 3 , 4 ]

Das Netz berechnet die Ausgabe:

[ 1 , 2 , 3 , 5 , 4 , 6 ]

Die Rechnung des Netzes ist:



## 6.2 Graphenfärben

Gegeben ist ein Graph (Bild), gesucht eine konfliktfreie Knotenfärbung mit vorgegebener Farbzahl.

Test: Col-Quiz-4

## 6.3 Lunar Lockout

Beispiel (Robots-Quiz-4)

Geben Sie eine Zugfolge an,  
die den Roboter (Großbuchstabe)  
ins Ziel (entsprechender Kleinbuchstabe) bringt:

C . A . . . B  
 . . e . . . .  
 D . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . . E .

gelesen: [ ( "A" , 0 ) , ( "E" , N ) , ( "A" , W ) ]

partiell korrekt?

C . A . . . B

```

. . e . . . .
D . . . . .
. . . . .
. . . . . E .
    nächster Zug: ( "A" , 0 )

```

```

C . . . . A B
. . e . . . .
D . . . . .
. . . . .
. . . . . E .
    nächster Zug: ( "E" , N )

```

```

C . . . . A B
. . e . . E .
D . . . . .
    nächster Zug: ( "A" , W )

```

```

C A . . . . B
. . e . . E .
D . . . . .

```

total korrekt?

```

C A . . . . B
. . e . . E .
D . . . . .

```

Sind alle Roboter an ihren Zielpunkten?

Diese ja: [ ]

```

Diese nicht: [ Robot { name = "E" , position = ( 2 , 1 )
                    , ziel = Just ( -1 , 1 )
                    }
              ]

```

## 6.4 Postsches Korrespondenzproblem

Test: PCProblem-Quiz-4

Lösen Sie diese Instanz des Postschen Korrespondenz-Problems:

```

PCP [ ( "cb" , "aa" ) , ( "b" , "cb" ) , ( "cabaab" , "cab" )
      , ( "c" , "b" )
      ]

```

gelesen: [ 3 , 1 , 4 , 2 , 3 ]

Aus Ihrer Folge entstehen die Zeichenketten:

cabaabcbcbcbabaab

cabaabcbcab

Die eine muß ein Präfix der anderen sein,  
nach Löschen des gemeinsamen Präfixes  
"cababcabc"  
entstehen jedoch die Reste  
( "bcabaab" , "ab" )

## 7 Codierungstheorie

Beispiel (Hamming-Direct-6)

Gesucht ist ein Code (als Liste von Wörtern über L, R)  
mit diesen Eigenschaften:

```
Config { width = ( Atmost , 6 )      -- Wortlänge
        , size = ( Atleast , 4 )    -- Anzahl der Wörter
        , distance = ( Atleast , 3 ) -- Hamming-Abstand
        , optimize = Size          -- möglichst viele Wörter
      }
```

```
gelesen: [ [ L , L , L , L , L , L ] , [ R , R , R , L , L , L ]
          , [ L , L , L , R , R , R ] , [ R , R , R , R , R , R ]
          , [ R , L , R , L , R , L ]
          ]
```

Haben alle Code-Wörter die gleiche Länge?

Ja: 6

Die Hamming-Weite dieses Codes ist: 2

```
zwei Wörter mit diesem Abstand sind: ( [ R , R , R , L , L , L ]
                                         , [ R , L , R , L , R , L ]
                                         )
```

total korrekt?

die Width soll höchstens 6 sein

Ja.

die Size soll wenigstens 4 sein

Ja.

die Distance soll wenigstens 3 sein

Nein.

Diskussion: wie man mit algebraischen Überlegungen günstige Codes konstruiert, Verweis auf Verwendung in Mobilfunk, Datenspeicherung auf CD usw.

## 8 Algebraische Ausdrücke (Operatoren)

### 8.1 Mengen

Algebraic\_Set-Direct-2

Gesucht ist ein Ausdruck (Term) mit dieser Bedeutung:

$\{\{\}, \{1, 3, \{2}\}, \{1, \{2}\}, \{3, \{2}\}, \{\{2}\}\}$

Der Ausdruck soll höchstens die Größe 10 haben.

Sie dürfen diese Symbole benutzen

zweistellige : [ + , - , & ]

einstellige : [ pow ]

nullstellige : [ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ]

und diese vordefinierten Konstanten:

A =  $\{\{2\}\}$

B = {1, 3}

gelesen: pow (1 + pow (2))

partiell korrekt?

Die Baumstruktur Ihrer Einsendung ist:

```
pow
|
'- +
  |
  +- pow
  | |
  | '- 2
  |
  '- 1
```

Die Größe Ihres Ausdrucks ist 5

total korrekt?

Der Wert Ihres Terms ist

$\{\{\}, \{1\}, \{1, \{\}\}, \{1, \{\}, \{2\}\}, \{1, \{2\}\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}$

stimmen die Werte überein?

Nein, diese Elemente kommen nur in jeweils einer der Mengen vor:

$\{\{1\}, \{1, 3, \{2}\}, \{1, \{\}\}, \{1, \{\}, \{2\}\}, \{3, \{2\}\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{2\}\}\}$

### 8.2 Relationen

Algebraic\_Relation-Direct-5

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf Relationen

über dem Grundbereich  $\text{mkSet } [ 1 , 2 , 3 , 4 ]$

Gesucht ist ein Ausdruck (Term) mit dieser Bedeutung:

$\{(4 , 1)\}$

Der Ausdruck soll höchstens die Größe 7 haben.

Sie dürfen diese Symbole benutzen

zweistellige :  $[ + , - , \& , * ]$

einstellige :  $[ \text{inv} , \text{tcl} , \text{rcl} ]$

nullstellige :  $[ ]$

und diese vordefinierten Konstanten:

$R = \{(1 , 2) , (3 , 4)\}$

$S = \{(2 , 3)\}$

gelesen:  $R * S + S$

partiell korrekt?

Die Baumstruktur Ihrer Einsendung ist:

```
+
|
+- S
|
'- *
  |
  +- S
  |
  '- R
```

Die Größe Ihres Ausdrucks ist 5

total korrekt?

Der Wert Ihres Terms ist die Relation

$\{(1 , 3) , (2 , 3)\}$

stimmen die Relationen überein?

Stimmen die Menge

Aufgabenstellung =  $\text{mkSet } [ ( 4 , 1 ) ]$

und die Menge

Einsendung =  $\text{mkSet } [ ( 1 , 3 ) , ( 2 , 3 ) ]$

überein?

Nein.

### 8.3 Graphen

(Konstanten: Kreis, Clique; Operatoren: Komplement, Produkt, Kantengraph)

## 8.4 boolesche Funktionen

(Darstellung in gegebener Basis)

## 9 Weiter denkbare Aufgaben (Experimentell)

das hat Bezüge zur Forschung (Waldmann).

Zum interaktiven Ausprobieren muß man aber noch glitzernde Oberflächen bauen.

- Wortersetzung: Schleifen finden,

Bsp: Regelmenge  $\{100 \rightarrow 00110\}$ , zu finden ist Schleife  $\underline{10000} \rightarrow 001\underline{1000} \rightarrow 001001\underline{100} \rightarrow 00100\underline{100}110 \rightarrow 00\underline{10000}110110$

Bsp: finde Schleife für  $\{cb \rightarrow bba, ab \rightarrow bca\}$ .

- Wortersetzung: Termination durch Interpretation  
finde lineare additive Gewichte (löse lineares Ungleichungssystem),  
finde Matrix-Interpretation (Schieberegler für Matrix-Einträge)
- Wortersetzung: matchbounds und inverse Matchbounds