

Elektrizität und Magnetismus

1. Elektrostatik

1.1. Die elektrische Ladung

Die am längsten bekannte elektrische Erscheinung ist die *Reibungselektrizität*. Mit einem an Wolle geriebenen Stück Bernstein lassen sich Papierschnipsel anziehen. Bernstein war schon bei den alten Griechen als Schmuckstein begehrt, aber auch wegen der ihm zugeschriebenen magischen Kräfte. Bernstein heißt auf griechisch Elektron, was GILBERT¹ Anlass war, die damit verbundenen Erscheinungen als "elektrische" zu bezeichnen. Reibt man verschiedene Materialien aneinander, kommt man zum Schluß, das es zwei verschiedene Sorten von Elektrizität gibt. DUFAY² nannte diese "vitreuse" (glasig) und "resineuse" (harzig), die sich wechselseitig anziehen bzw. abstoßen. FRANKLIN³ wies nach, dass diese Eigenschaften aus Überschuss und Mangel von Ladungen resultieren und sich dies mathematisch durch positive und negative Ladungen beschreiben lässt, die sich zu Null neutralisieren lassen. Ordnet man die Stoffe danach, welche sich bei Reibung eher positiv bzw. negativ aufladen, erhält man die *Triboelektrische Reihe*:

+ Luft, Asbest, Glas, Polyamid, Wolle, Seide, Bernstein,
Poly(ethylenterephthalat), PVC, Polystyrol, Polyethylen, Polypropylen, Poly(tetrafluorethylen) -

Triboelektrizität ist von großer praktischer Bedeutung. Werden durch Reibung Ladungen getrennt, kann dies durch Entladungsfunken in Kohlebergwerken, Getreidesilos, aber auch am Einfüllstutzen des Kraftstofftanks im Auto zu Explosionen führen. Weniger dramatisch, aber gleichermaßen zerstörend wirken elektrische Aufladungen bei elektronischen Bauelementen. Hier sind strenge Vorschriften zu beachten, da man seinen Körper durch Gehen über Teppichböden, Abziehen von Klebestreifen, Ablegen von Kleidung rasch auf etliche Kilovolt auflädt, was zur Zerstörung von Bauelementen führt, falls man diese ungeschützt in die Hand nimmt.

Die Ursache aller elektrischen und magnetischen Erscheinungen liegt in der Existenz von elektrischen Ladungen. Diese sind untrennbar an das Vorhandensein von Masse gebunden, wenngleich nicht jede Masse elektrische Ladung tragen muss. Ladungen sind additiv und auch teilbar, letzteres aber nicht unbegrenzt, denn es existiert eine kleinste (unteilbare) Ladung, die sogenannte *Elementarladung e*. Die materiellen Träger dieser Elementarladungen sind die Elementarteilchen *Elektron* und *Proton*. Das einfachste Atom, das Wasserstoffatom, besteht gerade aus je einem Elektron und einem Proton. Da Wasserstoffatome keine elektrische Ladung tragen, kann man schlussfolgern, dass beide Elementarteilchen Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen tragen, die sich zur Gesamtladung Null kompensieren (jedes vollständige Atom ist elektrisch neutral!). Das Vorzeichen der Elektronenladung wurde als negativ, das für die Ladung des Protons als positiv definiert.

Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung und Universalität bezeichnet man die Masse eines ruhenden Elektrons m_e und die Elementarladung e als Naturkonstanten:

Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Die geordnete Bewegung von Ladungsträgern wird als elektrischer Strom bezeichnet und in Ampère⁴ (Symbol A) gemessen. Wenn durch einen Leiter der Strom von 1 A fließt, bedeutet das somit, daß je Sekunde etwa $6,3 \cdot 10^{18}$ Elektronen das Meßgerät passieren müssen.

¹ William GILBERT (1540-1603), engl. Naturforscher, Leibarzt von Elisabeth I.

² Charles Francois de Cisternay DUFAY (1698-1739), franz. Chemiker

³ Benjamin FRANKLIN (1706-1790), amer. Staatsmann und Naturforscher, Erfinder des Blitzableiters

⁴ Andre Marie AMPÈRE (1775-1836), franz. Physiker, Mathematiker und Chemiker, experimentelle und theoretische Untersuchung der magnetischen Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern, Erklärung des Ferromagnetismus durch Ringströme; Doppelbrechung; kinetische Wärmetheorie

Die Existenz von Elektronen und die Größe der Elementarladung kann leicht experimentell nachgewiesen werden. Man kann z.B. durch Erhitzen einer Metalloberfläche diese zur Emission von Elektronen veranlassen. Bei hohen Temperaturen vollführen die Atome starke Schwingungen um ihre Ruhelage, ab und zu wird dabei von ihnen ein Elektron abgetrennt. Befindet sich diese Oberfläche im Vakuum, hat man freie Elektronen, mit denen man experimentieren kann. Wir werden uns später damit genauer befassen. Bei dem MILLIKAN⁵-Versuch werden winzige Öltröpfchen in das Feld eines Plattenkondensators gesprüht. Dabei werden sie durch die Reibung aufgeladen und können unter dem Mikroskop betrachtet werden. Ihre Sink- bzw. Steiggeschwindigkeiten im Schwerfeld der Erde weisen auf diskrete Ladungsunterschiede in der Größe von ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e hin.

Ein ganz anderer Zugang zur Elementarladung ist durch die von FARADAY⁶ gefundenen Gesetze der Elektrolyse gegeben. Wird bei einer Stromstärke I nach der Zeit Δt an der Anode eine Masse m von Atomen der Massenzahl M abgeschieden, so gilt

$$m = n M \frac{m_C}{12} \quad I \Delta t = Q = n k e ,$$

woraus sich die Elementarladung leicht berechnen läßt:

$$e = \frac{Q M m_C}{12 m k} ,$$

mit n der Anzahl der abgeschiedenen Ionen der Wertigkeit k ($k = 1, 2, 3, \dots$) und m_C der Masse des Kohlenstoffatoms des häufigsten Isotops ^{12}C .

Zusammen mit den Neutronen (die keine elektrische Ladung tragen) gehören Elektronen und Protonen zu den Grundbausteinen der Materie. Die aus ihnen gebildeten Atome und Moleküle sind elektrisch neutral. Sie werden als *Ionen* bezeichnet, wenn man ein oder mehrere Elektronen abspaltet oder hinzufügt. Durch Veränderung der Anzahl einer Sorte von Ladungsträgern also durch Stromfluss "nach außen" kann ein Stoff elektrisch geladen werden. Ladungen können nicht erzeugt, sondern nur getrennt und transportiert werden. Somit gilt:

Die Ladung ist eine *quantisierbare* Größe. Sie kommt als positive und negative Vielfache der Elementarladung e in der Natur vor.

Ladungen sind additiv. Im abgeschlossenen System bleibt die Summe aus positiven und negativen Ladungsträgern konstant.

Die am längsten bekannte elektrische Erscheinung ist die *Reibungselektrizität*. Mit einem an Wolle geriebenen Stück Bernstein lassen sich Papierschnipsel anziehen. Beim Reiben wird ein kleiner Teil der Ladungsträger getrennt, somit Tuch und Bernstein mit unterschiedlichen Vorzeichen aufgeladen. Unterschiedliche Ladungen üben aufeinander eine anziehende Kraft aus, die *elektrostatische Wechselwirkung*. Bei Ladungen mit gleichen Vorzeichen führt diese Wechselwirkung zu einer Abstoßung. Die Größe dieser Kraft läßt sich mit einem *Elektrometer* leicht messen.

Im Experiment wird hierzu ein Glasstab mit einem Lederlappen gerieben. Vom Glasstab können jetzt Ladungen auf das Elektrometer gebracht werden, was einen Zeigerausschlag bewirkt. Berührt man daraufhin mit dem Lederlappen den Elektrometeranschluss, geht der Ausschlag zurück, da sich die Ladungen ausgleichen. Die Ladungen von Stab und Lappen sind somit etwa gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen.

⁵ Robert Andrews MILLIKAN (1868-1953), amer. Physiker, Assistent MICHELSONS in Chicago; Messung der Elementarladung und der PLANCKSchen Konstanten

⁶ Michael FARADAY (1791-1867), engl. Physiker und Chemiker; Elektromotor; Induktiongesetz; Elektrolyse; Faraday-Käfig; Dielektrika; Diamagnetismus; optischer Faraday-Effekt; Paramagnetismus

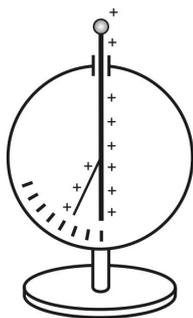


Abb. 1.1: Elektrometer

Flacher Hohlzylinder mit geerdetem Metallmantel und gläsernen Stirnflächen. Die Ladung wird auf den Pol oben aufgebracht und verteilt sich auf dem Leiter im Gehäuse. Ein dünnes Metallblättchen wird durch elektrostatische Kräfte abgespreizt.

Bei einem weiteren Versuch wird das Elektrometer nun wieder durch den erneut geriebenen Glasstab aufgeladen. Außerdem wird ein Hartgummistab mit einem Nylonlappen gerieben. Eine Berührung des Elektrometeranschlusses mit dem Stab führt jetzt zur Entladung. Beide Stäbe wurden also unterschiedlich aufgeladen. Der Glasstab trägt positive Ladungen, der Hartgummistab negative.

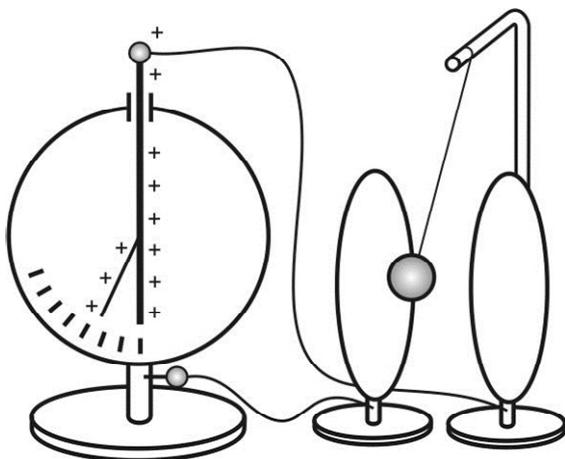


Abb. 1.2: Elektrostatisches Pendel

Eine isoliert aufgehängte Kugel mit leitfähiger Oberfläche wird zwischen zwei entgegengesetzt aufgeladene Platten gebracht. Die Kugel pendelt zwischen beiden Platten hin und her und entlädt sie dabei.

Im Allgemeinen hat man es mit räumlichen Verteilungen von Ladungen zu. Als Modellvorstellung ist es aber oft vorteilhaft, sich Ladungen als in einem Raumpunkt konzentriert vorzustellen. Man spricht dann von *Punktladungen*. Das Formelzeichen der elektrischen Ladung ist Q oder q (von lat. quantum).

1.2. Das elektrostatische Feld

Zwischen zwei geladenen Körpern, deren räumliche Ausdehnung gegenüber ihrem gegenseitigen Abstand klein ist (Punktladungen), tritt eine Kraft auf mit folgenden Merkmalen:

- Sie ist
1. direkt proportional zum Betrag jeder Ladung Q_1 und Q_2 ,
 2. umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes r^2 ,
 3. parallel zur Verbindungslinie beider Körper gerichtet,
 4. anziehend bei ungleichnamigen Ladungen und abstoßend bei gleichnamigen.

Diese Eigenschaften wurden vom französischen Physiker COULOMB⁷ (1736 - 1806) experimentell festgestellt. Als COULOMBkraft oder elektrostatische Feldkraft bezeichnet man die Kraft zwischen zwei elektrischen Punktladungen (gilt auch für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen). Im Internationalen Einheitensystem und in skalarer Form ist demnach die Kraft F welche zwei derartige Ladungen Q_1 und Q_2 aufeinander ausüben

$$\text{COULOMBSches Gesetz} \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \quad (1.1a)$$

⁷ Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), franz. Ing. und Physiker; Magnethadeln; magnet. Moment; elektrostatisches Kraftgesetz (Torsionswaage); Gleitreibung; innere Reibung

Berücksichtigt man die Richtungsabhängigkeit der Coulombkraft, erhält man das Coulomb-Kraftfeld

$$\text{COULOMBSches Gesetz} \quad \vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_{12} \quad (1.1b)$$

Hierbei zeigt der Einheitsvektor \vec{e}_{12} von der Ladung Q_2 nach Q_1 und \vec{F}_{12} stellt den Kraftvektor auf die Ladung Q_1 dar. Die Konstante ε_0 wird als *elektrische Feldkonstante*, *Permittivität des Vakuums* oder als *absolute Dielektrizitätskonstante* bezeichnet. Ein veralteter Name für ε_0 lautet *Influenzkonstante*. Die dimensionslose Konstante ε_r bezeichnet man als *relative Dielektrizitätskonstante* oder *Permittivitätszahl*. Sie hat im Vakuum und Luft den Wert 1, ist in anderen Medien größer als 1 und hängt in anisotropen Medien (z.B. Kristallen) von der Richtung ab.

$$\text{Elektrische Feldkonstante} \quad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Der Faktor 4π in Glg. 1.1 wurde aus Maßsystemgründen eingeführt. Dadurch wird vermieden, dass er in den fundamentalen MAXWELL⁸schen Gleichungen auftritt. Im hier verwendeten SI-System wird die Kraft in Newton, die Länge in Meter und die Ladung in Coulomb ($1 \text{ C} = 1 \text{ As}$) gemessen.

Wenn man die von einer feststehenden Ladung Q_2 auf eine Probeladung Q_1 ausgeübte Kraft für verschiedene Positionen der Probeladung im Raum durch jeweils einen Vektor beschreibt, erhält man folgende Darstellung:

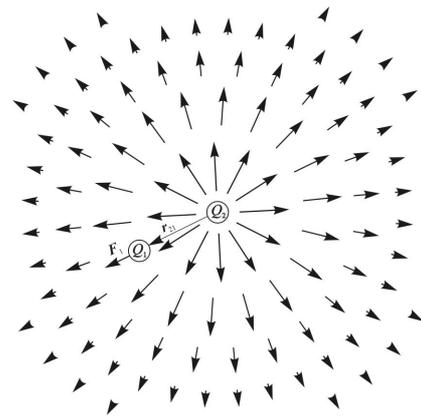


Abb. 1.3: Elektrostatisches Kraftfeld einer positiven Ladung Q_2

Durch Vektorpfeile ist nur die auf eine positive Probeladung Q_1 angreifende Kraft dargestellt, die sich jeweils für verschiedene Positionen der Probeladung im Raum ergibt. Bei einer negativen Ladung Q_2 kehren sich die Richtungen der Vektorpfeile um.

Laut Glg. 1.1.b ergeben zwei gleichnamige Ladungen Q_1 und Q_2 abstoßende Kräfte (wie auf der Abbildung), zwei ungleichnamige dagegen anziehende Kräfte.

Auf Abb. 1.3. wird eine wichtige Eigenschaft von elektrischen Ladungen ersichtlich: sie erzeugen ein *elektrostatisches Feld*, das den Raum durchsetzt. Bei einer Punktladung hat dieses Feld sphärische Symmetrie. Wenn man eine positive Probeladung in Richtung der wirkenden Kraft verschiebt und die hierbei berührten Raumpunkte miteinander verbindet, erhält man eine Kraft- oder Feldlinie (bei einer Punktladung sind die Feldlinien gerade; die Richtung der auf die Probeladung wirkenden Kraft wird durch einen Pfeil dargestellt). Offensichtlich haben die Feldlinien ihren Ursprung in der Ladung. Positive Ladungen sind *Quellen*, negative Ladungen *Senken* des elektrischen Feldes.

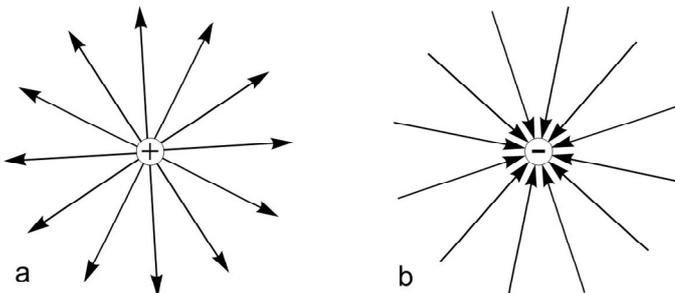


Abb. 1.4: Feldlinienverlauf bei einer positiven (a) sowie negativen (b) Punktladung

⁸ James Clerk MAXWELL (1831-1879), schott. Physiker, bedeutender Theoretiker und Experimentator; kinetische Gastheorie, Elektrodynamik, Farbsehen

Somit gibt es keine in sich geschlossenen Feldlinien (Wirbel) und es gilt:

Das elektrostatische Feld ist ein wirbelfreies Quellenfeld mit positiven Ladungen als Quellen und negativen Ladungen als Senken.

Bei parallel verlaufenden Feldlinien spricht man von einem *homogenen* Feld, ansonsten handelt es sich um ein *inhomogenes* Feld (so wie auf Abb. 1.4.). Die Feldlinien sind keine Vektoren! Allerdings kann man aus der Dichte der Feldlinien auf den Betrag der Feldkraft schließen. So nimmt z.B. bei der Punktladung auf Abb. 1.4. die Zahl der Feldlinien je cm^2 , die eine zu den Feldlinien senkrechte Fläche durchsetzt (bei einer sphärischen Ladungssymmetrie ist dies ein Segment einer Kugeloberfläche), mit dem Quadrat des Abstandes dieser Fläche von der Punktladung ab. Gerade diese Abstandsabhängigkeit hat die Coulombkraft! Die auf eine Probeladung wirkende Kraft F dient zur Definition der elektrischen Feldstärke E . Elektrische Feldstärke ist Kraft je Probeladung, also $E = F/Q$. Berücksichtigt man den Vektorcharakter von F , ergibt sich der Vektorcharakter des Elektrischen Feldes:

Elektrische Feldstärke	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$,	$[E] = 1 \frac{\text{N}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$	(1.2)
------------------------	---------------------------------	--	-------

Eine analoge Beziehung gilt natürlich für die Feldkraft: $\vec{F} = Q \vec{E}$. Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld und demzufolge ebenso additiv wie Ladungen. Für eine Ladungsverteilung lässt sich das elektrische Feld z.B. dadurch berechnen, dass man die elektrischen Felder von Punktladungen addiert. Ein elektrischer *Dipol*, bestehend aus zwei gleich großen, aber ungleichnamigen Ladungen im Abstand l hat somit (in Analogie zur Abb. 1.3) folgende Feldvektoren

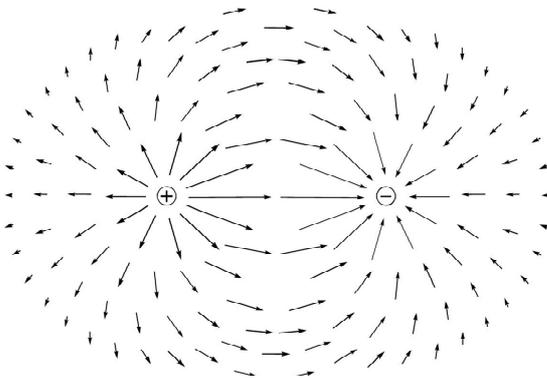


Abb. 1.5: Elektrostatisches Kraftfeld eines Dipols

Durch Vektorpfeile ist die an einer positiven Probeladung in verschiedenen Positionen angreifende Kraft dargestellt.

Auf ähnliche Weise wie oben beschrieben, kann man die Feldlinien des Dipols durch Verschieben der Probeladung entlang der Wirkungslinie der Feldkraft aufzeichnen.

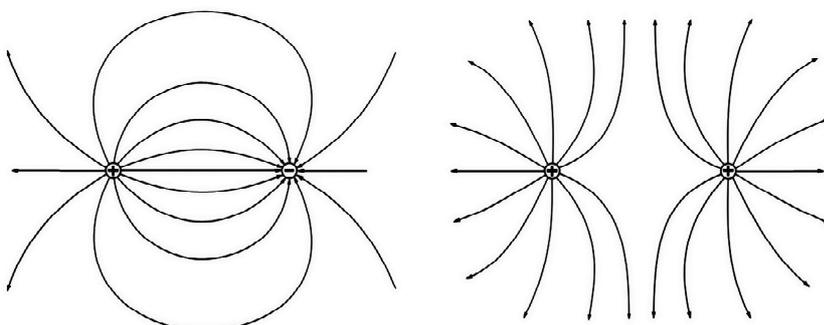


Abb. 1.6: Feldlinienbild

- a) zweier ungleichnamiger Punktladungen (Dipol)
- b) zweier positiver Ladungen

Sei \vec{l} der Ortsvektor von der negativen zur positiven Ladung im Dipol. Dann definiert man:

$$\boxed{\text{elektrisches Dipolmoment } \vec{p} = Q \vec{l}} \quad (1.2a)$$

Im homogenen elektrischen Feld \vec{E} wirken auf beide Ladungen vom Betrag gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte. Hieraus resultiert ein Drehmoment

$$\boxed{\text{Drehmoment eines elektrischen Dipols im elektrischen Feld } \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad (1.2b)$$

Offensichtlich ist das Drehmoment maximal bei senkrechter Orientierung von Dipol und Feldlinien. Bei paralleler Ausrichtung verschwindet das Drehmoment. Für den Fall, dass die Verbindungslinie beider Ladungen eines Dipols einen Winkel α mit den Feldlinien bildet, hat das Drehmoment den Betrag $M = Q l E \sin \alpha$.

Übungen (Übungen mit * entsprechen einem Leistungskurs-Niveau; Prüfungsaufgaben)

1.1. Berechnen Sie die Kraft, mit welcher sich zwei gleiche Punktladungen a) $Q = 3,5 \cdot 10^{-9}$ C im Abstand von $r = 12$ cm und b) $Q = 10^{-7}$ C im Abstand von $r = 1$ m abstoßen.

Ergebnis: a) 7,65 μ N; b) 90 μ N

1.2. Zwei gleiche Punktladungen stoßen sich im Abstand $d = 20$ cm mit einer Kraft $F = 1,5 \cdot 10^{-2}$ N ab. Wie groß sind die Ladungen?

Ergebnis: $2,6 \cdot 10^{-7}$ As

1.3. Der Abstand zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom beträgt $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m.

a) Wie groß ist die Coulombkraft zwischen beiden Teilchen?

b) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen beiden Teilchen?

c) Wie groß ist das Verhältnis beider Kräfte, wie hängt es vom Abstand ab?

Geg.: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²;

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

Ergebnis: a) $8,2 \cdot 10^{-8}$ N; b) $3,7 \cdot 10^{-47}$ N; c) hängt nicht vom Abstand ab

1.4.* Die Oberfläche von Kontaktstiften soll vergoldet werden. Die Gesamtfläche aller Stifte beträgt $A = 10$ cm². Die aus dem Elektrolyten abgeschiedenen Goldionen sind 3-wertig. Die Dicke der Goldschicht soll $d = 1,0$ μ m betragen.

a) Bestimmen Sie die Masse des abzuscheidenden Goldes.

b) Bei einem Goldpreis von derzeit 970 €/Feinunze entspricht diese Menge welchem Materialwert?

c) Wie lange dauert es bei einem Gleichstrom von $I = 100$ mA, bis die gewünschte Schichtdicke erreicht wird?

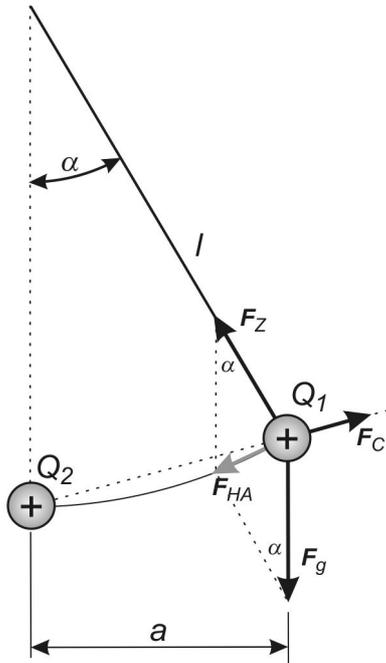
Geg.: 1 Feinunze = 31,2 g; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg; $\rho = 19,3$ g/cm³; $M_{\text{Au}} = 197$

Ergebnis: a) 19,3 mg; b) 0,60 €; c) 283 s

1.5.* Im Vorlesungsexperiment wurden Tennisbälle mit dem Durchmesser $\phi = 37,5$ mm und der Masse $m = 2,60$ g mit leitfähiger Oberfläche mit jeweils gleichen Ladungen Q aufgeladen. Eine Kugel war als Pendel der Länge 550 mm aufgehängt (vom Mittelpunkt des Tennisballes gerechnet). Die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage betrug 50 mm, während der zweite Tennisball in der ursprünglichen Ruhelage des beweglichen Balles fixiert wurde. Wieviel Elementarladungen befanden sich auf jeder der beiden Kugeln im Überschuß?

Anmerkung: Bestimmen Sie zuerst die Kraft, die infolge Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage ($\alpha \ll 1$, demzufolge $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong \alpha$) durch das Gewicht der Pendelmasse hervorgerufen wird, indem Sie die an der Pendelmasse angreifende Gewichtskraft in eine radiale Kraftkomponente (in Fadenrichtung wirkend) und in eine tangentielle Kraftkomponente (senkrecht dazu, also auf die andere Kugel gerichtet) zerlegen. Dieser Kraft entgegengesetzt gleich ist die *Coulomb*-Kraft der elektrostatischen Abstoßung. Gehen Sie von einer gleichmäßigen Verteilung der Ladungen auf den Oberflächen beider Kugeln aus! In diesem Fall entspricht deren resultierendes elektrisches Feld (außerhalb der Kugeln!) dem von Punktladungen Q , von denen jeweils eine im Mittelpunkt der Kugeln lokalisiert ist.

geg.: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As



Lösung: Gewichtskraft F_g , Zwangskraft F_Z und Coulombkraft F_C sind vektoriell zu addieren. Im statischen Gleichgewicht muß demnach gelten $\vec{F}_g + \vec{F}_Z + \vec{F}_C = 0$. Bei ungeladenen Kugeln ergeben Gewichtskraft und Zwangskraft addiert eine Hangabtriebskraft F_{HA} in Richtung der Tangente an die Kreisbahn, eine Pendelbewegung wäre die Folge. Bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage ($\alpha \ll 1$) kann man bei geladenen Kugeln vernachlässigen, dass die Wirkungslinien von Coulomb- und Hangabtriebskraft leicht unterschiedliche Richtungen haben. In dieser Näherung gilt $F_{HA} \cong -F_C$ und der Abstand der beiden Ladungen beträgt näherungsweise $a \cong l \cdot \sin \alpha$.

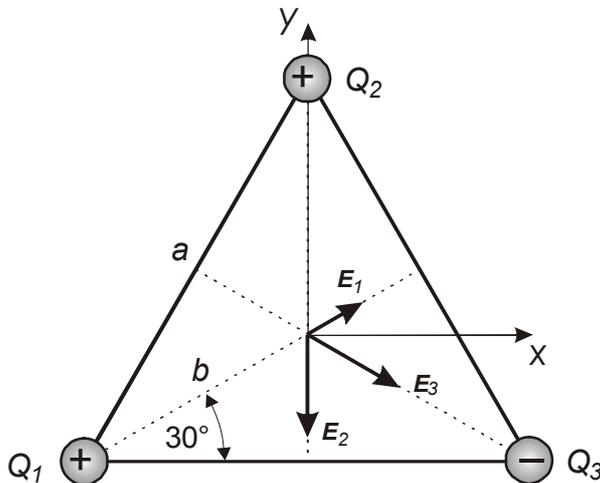
$mg \sin \alpha = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{n^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{mg a}{l}$ mit n der Anzahl der Elektronen auf einer Kugel.

$$n = \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0 a^3 mg}{e^2 l}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,55 \text{ m} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^2 \text{ Vm s}^2}}$$

$$n = 1,59 \cdot 10^{11}$$

1.6.* Berechnet werden soll die elektrische Feldstärke \vec{E}_p im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge $a = 2 \text{ cm}$ in Luft, wenn die Eckpunkte Ladungen $Q_1 = 10^{-8} \text{ As}$, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ As}$ und $Q_3 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ As}$ tragen.

Lösung: Immer zu empfehlen ist es, eine übersichtliche Skizze anzufertigen, das führt meist schon zu einem rationellen Lösungsweg. Da die Aufgabe offensichtlich nicht eindimensional ist, kommen wir nicht umhin, mit Vektoren zu arbeiten und legen deshalb aus Symmetriegründen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Dreiecks:



Die drei Feldstärken \vec{E}_1 , \vec{E}_2 und \vec{E}_3 addiert ergeben die gesuchte Größe \vec{E}_p . Da alle drei Ladungen den gleichen Abstand zum Mittelpunkt des Dreiecks haben, ergeben sich für die Beträge der drei Feldstärken

$$E_i = \frac{|Q_i|}{4\pi \epsilon_0 b^2} = \frac{3|Q_i|}{4\pi \epsilon_0 a^2} \text{ und explizit}$$

$$E_1 = \frac{3 \cdot 10^{-8} \text{ As} \cdot \text{Vm}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 6,74 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = E_3 = 1,348 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ \\ \sin 270^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos 330^\circ \\ \sin 330^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

erhält man durch vektorielle Addition

$$\vec{E}_p = E_1 \cdot \vec{e}_1 + E_2 \cdot \vec{e}_2 + E_3 \cdot \vec{e}_3 = 6,74 \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 6,74 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Der Betrag der Feldstärke ergibt sich zu $E_p = 2,43 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, der Winkel zur x-Achse beträgt

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \left(-\frac{5}{3\sqrt{3}} \right) = -43,9^\circ$$

1.3. Das elektrostatische Potential, Spannung

Da auf Ladungen im elektrischen Feld eine Kraft wirkt, muss zur Verschiebung der Ladung Arbeit aufgewendet werden. Wenn die Verschiebung von Punkt A nach B auf einer geraden Strecke erfolgt und die Kraft \vec{F} , gegen die Arbeit verrichtet wird, dabei sowohl in Betrag als auch in der Richtung konstant ist, gilt

$$W = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -F s \cos \alpha, \quad (1.3)$$

wobei \vec{F} die Feldkraft und \vec{s} den Verschiebungsvektor von A nach B beschreiben.

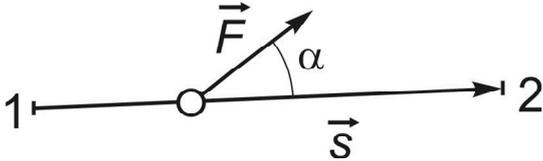


Abb. 1.7: Verschiebungsarbeit bei geradliniger Verschiebung von 1 nach 2 gegen eine konstante Kraft \vec{F} .

Arbeit, die am System geleistet wird und somit die Energie des Systems erhöht, ist positiv definiert, deshalb erscheint das Minuszeichen in der Gleichung (1.3). In Abb. 1.7 ist ein Fall dargestellt, bei dem eine Kraftkomponente (Projektion von \vec{F} auf \vec{s}) die Richtung der Verschiebung aufweist. Bei einer Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft von 1 nach 2 verringert sich die Energie des Systems, es wird somit negative Arbeit am System geleistet. Gleichbedeutend ist dies mit einer Energieabgabe nach außen. Im allgemeinen Fall erfolgt die Verschiebung einer Ladung auf krummliniger Bahn und die Kraft ist ortsabhängig. Diese Schwierigkeit lässt sich beheben, indem der Verschiebungsweg in so kleine Abschnitte unterteilt wird, dass diese als annähernd gerade und die Kraft für jeweils einen Abschnitt als konstant angesehen werden kann. Die Verschiebungsarbeit für einen Abschnitt lässt sich dann nach (1.3) berechnen. Über alle Teilarbeiten ist zu summieren.

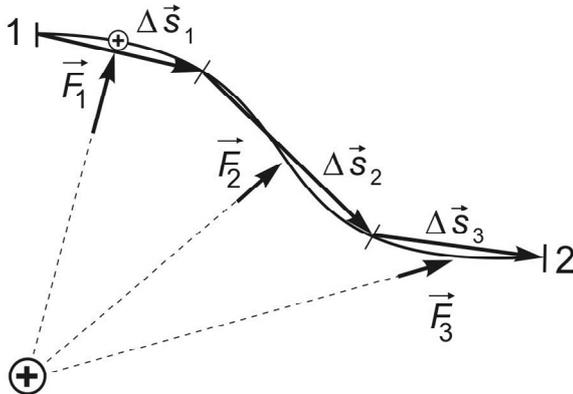


Abb. 1.8: zur Berechnung der Verschiebungsarbeit bei gekrümmter Bahn sowie ortsabhängiger Kraft

Die Verschiebung wird hier in drei Abschnitte geteilt, so dass für jeden Teilabschnitt eine annähernd lineare Verschiebung angenommen werden kann mit einer auf diesem Teilabschnitt wirkenden mittleren Kraft.

Die gesamte Verschiebungsarbeit von 1 nach 2 ergibt sich in erster Näherung aus der Summe der Arbeiten auf den drei Teilstrecken

$$W_{1 \rightarrow 2} \cong -(\vec{F}_1 \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \Delta \vec{s}_2 + \vec{F}_3 \Delta \vec{s}_3) \cong -(F_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + F_3 \Delta s_3 \cos \alpha_3), \quad (1.4)$$

Führt man diese Zerlegung feiner durch, wird der Fehler ebenfalls geringer, im Grenzfall ergibt sich das Integral

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 F(s) \cos \alpha(s) ds. \quad (1.5)$$

Für die Verschiebung einer Ladung im elektrischen Feld erhalten wir mit (1.2)

Verschiebungsarbeit $W_{12} = -Q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \int_1^2 E \cos \alpha(s) ds$ $[W] = \text{Nm} = \text{VAs} = \text{Ws}$	(1.6)
--	-------

Der Ladung Q kann eine potentielle Energie W_P zugeschrieben werden, die sich während der Verschiebung ändert, da ja Arbeit geleistet wird. Diese Arbeit W_{12} ist gerade die Differenz der potentiellen Energien: $W_{12} = W_{P2} - W_{P1}$. Wird anstelle der potentiellen Energie die Energie pro Ladung verwendet, resultiert eine Größe, welche die Eigenschaften des Feldes charakterisiert, das *elektrostatische Potential* ϕ

$$W_{12} = W_{P2} - W_{P1} = Q(\phi_2 - \phi_1). \quad (1.7)$$

Den Ausdruck in der Klammer in Glg. 1.7 bezeichnet man als *Spannung* U_{21} (Potentialdifferenz von Punkt 2 gegen Punkt 1). Zu Ehren von VOLTA⁹ wird die Einheit der Spannung Volt genannt.

Spannung	$U_{21} = \phi_2 - \phi_1$	$[U] = \text{Nm/As} = \text{V (Volt)}$	(1.8)
----------	----------------------------	--	-------

Das elektrostatische Potential ist somit nur als Differenz zweier Werte zugänglich. Da sich diese Differenz nicht ändert, wenn man beide Werte um gleiche Beträge ändert, wird oft ein Bezugspunkt gewählt (z.B. Punkt 1) und dessen Potential gleich Null gesetzt. Der Wert von ϕ_2 entspricht dann gerade der Verschiebungsarbeit je Einheitsladung zum Punkt 2.

$$\phi_2 = -\int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s} = -\int_1^2 E(s) \cos \alpha(s) ds.$$

Oftmals ist es bequem, den Punkt 1 mit dem Nullpotential auf die Erdoberfläche zu legen oder ins Unendliche, da dort die Wechselwirkungen zwischen den Punkten 1 und 2 verschwinden. Mit einer solchen Nebenbedingung kann man bei bekanntem Feld $\vec{E}(\vec{r})$ jedem Raumpunkt ein skalares Potential $\phi(\vec{r})$ zuordnen:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s}. \quad (1.9)$$

Aus 1.7. und 1.8. folgt die besonders wichtige Erkenntnis

Ladung mal Spannung ist Arbeit (zugeführte Energie)

und formal sollten Sie sich einprägen

Verschiebungsarbeit	$W_{12} = Q \cdot U_{21}$	(1.10a)
Spannung	$U_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s} = -\int_1^2 E \cos \alpha(s) ds$	

In einem *homogenen* elektrischen Feld sind die Feldlinien parallel, die Elektrische Feldstärke hat im betrachteten Teil des Raumes gleichen Betrag und gleiche Richtung. Einen solchen Fall findet man zwischen den Platten eines Plattenkondensators. Verschiebt man eine Probeladung entlang der Feldlinie von einer Platte zur anderen, erhält man

$W = Q \cdot E \cdot s$	Q Ladung des Körpers	(1.10b)
$W = Q \cdot U$	E konstante Feldstärke	
$U = E \cdot s$	s Verschiebungsweg parallel zu den Feldlinien	
	U Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkt	

⁹ Alessandro VOLTA (1745-1827), it. Physiker, von Napoleon zum Grafen geadelt; Entwicklung von Kondensator, Elektrometer; Einführung der Begriffe Ladung, Spannung, Kapazität; Erklärung von GALVANIs Froschschenkelversuchen; VOLTAsche Säule

Sehr häufig wird das Bezugspotential φ_1 gleich Null gesetzt, so dass die Indizes der Spannung entfallen können. Wie im konkreten Fall eines *inhomogenen* elektrischen Feldes das Potential zu berechnen ist, soll gleich an Beispielen demonstriert werden. Prinzipiell wichtig ist der Umstand, dass U nur von den Werten des Integrals an den Punkten 1 und 2 abhängt, somit nicht von der Verschiebungstrajektorie. Da also jegliche Verschiebung von 1 nach 2 den gleichen Wert für U ergibt, können wir stets eine solche wählen, bei der sich das Integral bequem berechnen lässt. Zwischen zwei unmittelbar benachbarten Raumpunkten, die durch den Verschiebungsvektor $d\vec{s}$ verbunden sind, ist die Potentialdifferenz gleich Null, wenn die Verschiebung $d\vec{s}$ senkrecht zur Richtung des Feldes \vec{E} erfolgt. Die Gesamtheit solcher Orte gleichen Potentials bildet eine *Äquipotentialfläche*.

Äquipotentialflächen verbinden Orte gleichen Potentials, die Feldlinien schneiden die Äquipotentialflächen senkrecht.

Weiter folgt aus 1.10a, dass die Verschiebungsarbeit entlang einer geschlossenen Bahn gleich Null ist. Ein solches Feld mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *Konservatives Feld*.

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (1.11)$$

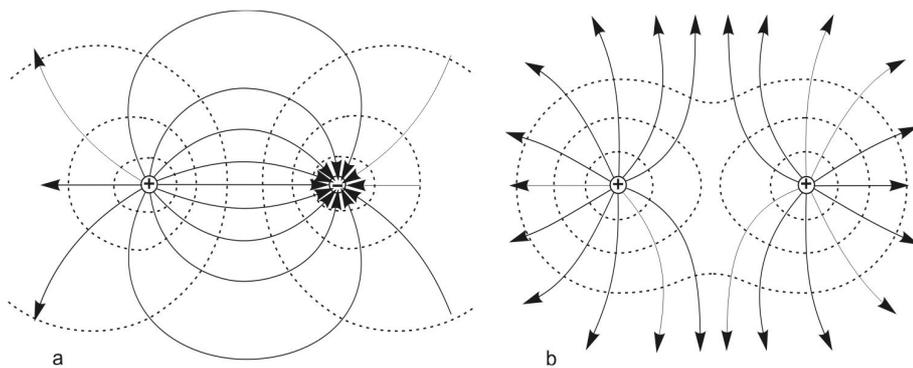


Abb. 1.9: Feldlinien (glatt) und Äquipotentialflächen (gestrichelt)
a) zweier ungleichnamiger Punktladungen (Dipol)
b) zweier positiver Ladungen

Übungen

1.7. In einem Kondensator mit dem Plattenabstand $d = 5$ cm besteht ein elektrisches Feld der Stärke $E = 9,4$ kV/m. Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Ladung $Q = 5,5 \cdot 10^{-12}$ C von der einen Platte zur anderen zu transportieren?

Ergebnis: $2,59 \cdot 10^{-9}$ Nm (Vorzeichen hängt von der Richtung der Verschiebung ab)

1.8. In homogenen Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke $E = 8,5 \cdot 10^4$ V/m. wird ein geladenes Teilchen ($Q = 2,5 \cdot 10^{-8}$ C) a) parallel zu den Feldlinien und b) unter einem Winkel von 30° zu den Feldlinien $1,2$ cm weit gegen das Feld transportiert.

Berechnen Sie die aufzubringende Arbeit.

Ergebnis: a) $-2,55 \cdot 10^{-5}$ Nm; b) $-2,21 \cdot 10^{-5}$ Nm

1.9. Zwischen beiden Platten eines Plattenkondensators liegt eine Spannung von $22,5$ V. Der Abstand zwischen den Platten beträgt $3,0$ cm.

- Wie groß ist die elektrische Feldstärke zwischen den Platten?
- Ein positiv geladener Körper mit einer Ladung von $Q = 6 \cdot 10^{-8}$ C wird um $2,0$ cm parallel zu den Feldlinien verschoben. Wie groß ist die Änderung seiner potentiellen Energie?
- Wie groß ist das Potential der negativ geladenen Platte, wenn man das der positiv geladenen Platte mit der Erde verbindet (gleich Null setzt)?

Ergebnis: a) 750 V/m; b) $-9 \cdot 10^{-7}$ Nm; c) $-22,5$ V

1.10* Im homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = 5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \vec{e}_x$ soll die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 mit den Ortsvektoren $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m}$ und $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \text{m}$ bestimmt werden.

Lösung: Eine Skizze schafft auch hier Klarheit über die Verhältnisse.

Nach Glg. 1.10a ergibt sich für den konkreten Fall

$$U_{21} = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = - \vec{E} \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} d\vec{s} = - \vec{E} \cdot (\vec{s}_2 - \vec{s}_1)$$

$$U_{21} = - \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = - E (\Delta s_x \cdot \cos 0 + \Delta s_y \cdot \cos 90^\circ)$$

$$U_{21} = - E \cdot \Delta s_x$$

Hierbei konnte der Umstand ausgenutzt werden, dass das elektrische Feld konstant ist und somit vor das Integral geschrieben werden kann. Die folgende Integration über die Verschiebung ergibt den Verschiebungsvektor, mit dem das elektrische Feld skalar zu multiplizieren ist. Mit den gegebenen Größen berechnet sich die Spannung zu $U_{21} = -25 \text{ V}$. Somit ist das Potential am Punkt 2 geringer als am Punkt 1.

1.11.* Zu berechnen ist das Potential $\varphi(\vec{r})$ einer Punktladung Q .

Lösung: Das elektrische Feld der Punktladung Q läßt sich leicht aus Glg. 1.1 ableiten, indem man durch die Probeladung dividiert. Man erhält $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$. Der Wert der Feldstärke geht im Unendlichen gegen Null, so dass es bequem ist, dort das Bezugspotential ebenfalls gleich Null zu setzen. Aus Glg. 1.9. folgt

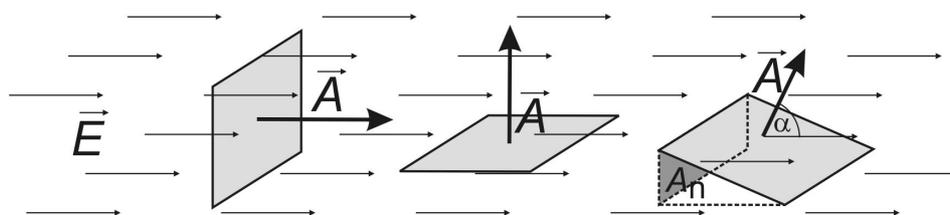
$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \int_r^{\infty} r^{-2} dr$$

Hierbei wurde die Verschiebung entlang einer Feldlinie gewählt ($\vec{e}_r \parallel d\vec{s}$), so daß $\vec{e}_r \cdot d\vec{s} = dr$.

$\varphi(r) = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_r^{\infty}$. Der Wert des Potentials hängt somit nur vom Abstand r ab, was aus Symmetriegründen zu erwarten ist.

$\varphi(r) = - \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$. Das Potential wächst folglich stark an bei Verringerung von r .

1.4. Elektrische Flussdichte



$$\Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = \epsilon_r \epsilon_0 EA \quad \Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = 0 \quad \Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = \epsilon_r \epsilon_0 EA \cos \alpha = \epsilon_r \epsilon_0 EA_n$$

Abb. 1.10: Elektrischer Fluss durch eine ebene Fläche A

Der Vektor \vec{A} einer Fläche hat den Betrag des Flächeninhalts der Fläche und steht senkrecht auf ihr. Der elektrische Fluss Ψ bestimmt sich aus der auf dem elektrischen Feld \vec{E} senkrechten Flächenprojektion A_n

Definition: Unter dem elektrischen Fluss Ψ durch ein Flächenstück A versteht man das Produkt aus der elektrischen Feldkonstanten $\varepsilon_r \varepsilon_0$, der die Fläche durchsetzenden Feldstärke E und der senkrecht zu den Feldlinien stehenden Flächenprojektion A_n : $\Psi = \varepsilon_r \varepsilon_0 E A_n$.

Da positive und negative Ladungen Quellen bzw. Senken von Feldlinien darstellen, erscheint die Vorstellung zunächst plausibel, dass bei sonst gleichen geometrischen Verhältnissen die gesamte "Anzahl" der Feldlinien proportional zur Ladung in einem Raumgebiet sein sollte. Legt man eine geschlossene Fläche um ein solches Raumgebiet und "zählt" die Feldlinien, müssten hieraus Schlussfolgerungen bezüglich der eingeschlossenen Ladung möglich sein.

Der von einer Ladung Q ausgehende, eine diese vollständig umschließende Oberfläche durchsetzende elektrische Fluss ist gleich der Ladung: $\Psi = Q$.

Besteht eine geschlossene Oberfläche aus k ebenen Teilstücken (z.B. wie beim Quader), summiert man über die die einzelnen Flächen durchsetzenden elektrischen Flüsse

$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_k = \varepsilon_r \varepsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + E_2 \cdot A_{2n} + \dots + E_n \cdot A_{kn})$. Diese Beziehung gilt nur, wenn das eine Teilfläche durchsetzende elektrische Feld jeweils konstant ist.

Im Allgemeinen ist jedoch die geschlossene Fläche gekrümmt und das Feld inhomogen. Die Berechnung des gesamten Flusses wird möglich, indem man diese Fläche differentiell fein unterteilt. Jedem Flächenelement kann ein zur Oberfläche senkrechter Vektor $d\vec{f}$ zugeordnet werden. Der elektrische Fluss $d\Psi$ durch $d\vec{f}$ ergibt sich somit zu $d\Psi = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{D} \cdot d\vec{f} = D \cdot df_n$. Man definiert:

$$\text{elektrische Flussdichte oder Verschiebungsdichte } \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1.12)$$

Im Unterschied zum Elektrischen Feld ist die Verschiebungsdichte eine vom Material unabhängige Größe und wird ausschließlich durch die Verteilung der Ladungen im Raum bestimmt. Den gesamten Fluss durch die geschlossene Oberfläche erhält man durch Summation (Integration) der Beiträge aller Flächenelemente. Wirklich ist dieser Wert gerade gleich der gesamten umschlossenen Ladung, unabhängig von der Gestalt der sie umschließenden Oberfläche!

$$\begin{aligned} \text{GAUSS}^{10}\text{scher Satz} \quad Q &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{f} \\ Q &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \oiint E \, df_n = \oiint D \, df_n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Das eigenartige Integralzeichen \oiint besagt lediglich, dass die Integrationsvariable eine Fläche darstellt und sich die (bestimmte) Integration über eine *geschlossene* Oberfläche erstreckt. Der GAUSS'sche Satz ist ein **Grundgesetz** der Elektrostatik und gilt übrigens ganz unabhängig von der Form der Hüllfläche und der Art der umschlossenen Ladungsverteilung, egal ob Leiter oder Nichtleiter! Da Q die Gesamtladung darstellt, ergibt die Berechnung nach Glg. 1.13 für einen umschlossenen Dipol (zwei gleich große Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens im Abstand d) offensichtlich den Wert Null. Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, wie man den GAUSS'schen Satz anwenden kann.

¹⁰ Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) dt. Mathematiker und Physiker; Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten; Erdmagnetismus, Magnetometer; elektromagnet. Telegraph, Maßsystem (mit Weber); Prinzip des kleinsten Zwanges in der Mechanik; Mathemat. Beiträge zur Physik: Methode der kleinsten Quadrate in der Fehlerrechnung; Fehlerfunktion; Zahlenebene; Gamma-Funktion; Differentialgeometrie; Potentialtheorie; Gaußscher Satz der Vektoranalysis

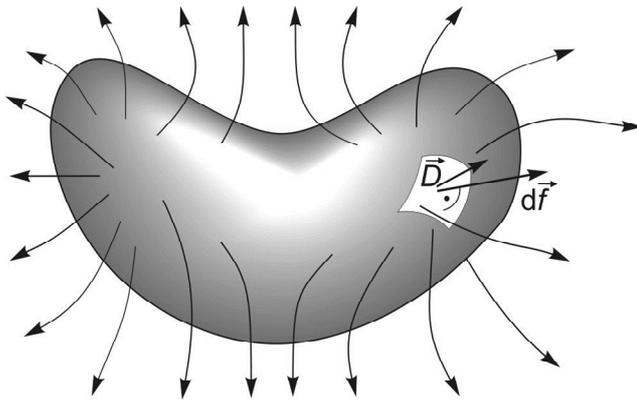


Abb. 1.11: Elektrischer Verschiebungsfluss durch eine geschlossene Oberfläche. Jedes Flächenelement wird durch einen zur Oberfläche senkrechten Vektor dargestellt. Bei differentiell kleinem Flächenelement $d\vec{f}$ ist in dessen Bereich die Verschiebungsdichte \vec{D} konstant. Der elektrische Fluß durch dieses Flächenelement ist $d\Psi = D df_n$, wobei df_n die auf \vec{D} senkrechte Flächenprojektion von $d\vec{f}$ darstellt.

Übungen

1.12. Welches Vorzeichen hat der elektrische Fluss Ψ durch eine um eine negative Punktladung geschlossene Fläche? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis: negatives, weil $d\vec{f}$ und \vec{E} antiparallel verlaufen

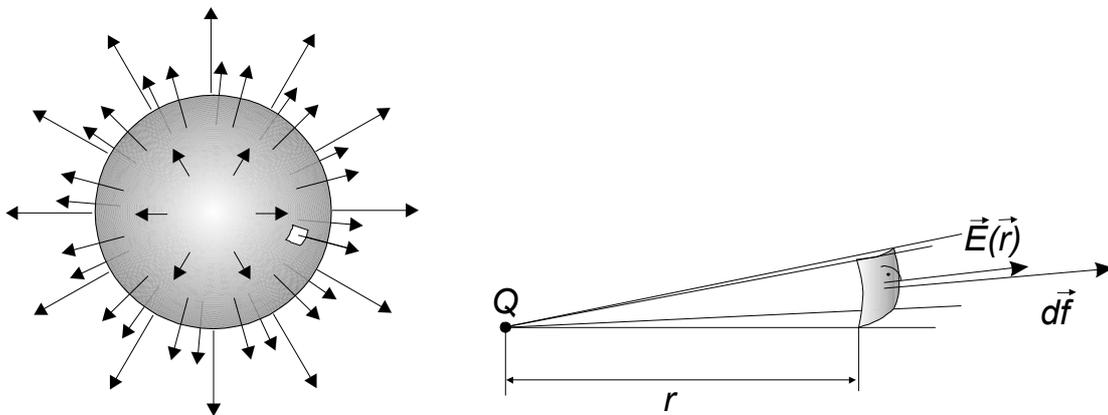
1.13. Eine Kugel ($r = 6,2$ cm) wird negativ aufgeladen ($Q = 2,8 \cdot 10^{-8}$ C). Berechnen Sie die elektrische Flussdichte (Quotient aus Fluss und Fläche)

a) auf der Oberfläche der Kugel; b) im Abstand $a = 3,1$ cm von der Oberfläche.

Ergebnis: a) $5,8 \cdot 10^{-7}$ C/m²; b) $2,6 \cdot 10^{-7}$ C/m²

1.14.* Berechnen Sie das Elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer Punktladung Q !

Hinweis: Eine Punktladung erzeugt ein Feld mit Kugelsymmetrie. Es erleichtert wesentlich die Berechnung, wenn man die Integrationsfläche als Kugeloberfläche annimmt, mit der Ladung im Zentrum.



Lösung: Auf der Abbildung sind links die Feldlinien einer Punktladung durch eine Kugeloberfläche und rechts ein Flächenelement dargestellt. Der Vektor des E-Feldes an dieser Stelle $\vec{E}(\vec{r})$ steht senkrecht auf dieser Fläche, ebenso wie der dazu gehörende Flächenvektor $d\vec{f}$.

Da beide Vektoren parallel verlaufen, kann man das Skalarprodukt durch das Produkt der Beträge ersetzen: $\vec{E} \cdot d\vec{f} = E \cdot df \cdot \cos 0^\circ = E \cdot df$. Somit ergibt sich $Q = \epsilon_r \epsilon_0 \oint E(r) df$. Dabei ist auch zu berücksichtigen, dass für alle Flächenelemente auf der Kugeloberfläche der Betrag des Feldes gleich groß ist, denn dieser hängt lediglich vom Abstand r zur Punktladung ab. Da sich dieser im Rahmen der durchzuführenden Integration nicht ändert (r hängt nicht von der Integrationsvariablen f ab, also auch nicht E), ist E eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Hierdurch reduziert sich das Integral auf die Berechnung der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r :

$Q = \epsilon_r \epsilon_0 E(r) \oint df = \epsilon_r \epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2$. Durch Umstellen erhält man leicht den Betrag des Feldes einer Punktladung $E(r) = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2}$. Da $\vec{E}(\vec{r})$ die Richtung des Einheitsvektors von \vec{r} hat ($\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$), gilt für das

Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r$, also lautet die allgemeine Lösung

Elektrisches Feld einer Punktladung	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	(1.14)
-------------------------------------	---	--------

Nennen wir jetzt diese Punktladung Q_2 und bringen in deren Nähe eine zweite Probeladung Q_1 , so wird laut Glg. 1.2 auf die Probeladung Q_1 eine Feldkraft $\vec{F}_{12}(\vec{r}) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ ausgeübt. Dies ist das oben bereits formulierte COULOMB-Gesetz. Hier ist $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Vektor von Q_2 nach Q_1 .

1.15.* Eine aus nichtleitendem Material mit $\varepsilon_r=1$ hergestellte Kugel mit dem Radius R wurde so präpariert, dass in ihrem Volumen eine konstante Ladungsträgerkonzentration $\rho = dQ/dV = Q/V$ von negativen Ladungsträgern erzeugt wurde.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des *Gaußschen Satzes* das Elektrische Feld $E(r)$ sowohl für $r < R$ als auch $r > R$!

b) Tragen Sie die Abhängigkeit $E(r)$ qualitativ in einem Diagramm auf!

geg.: $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

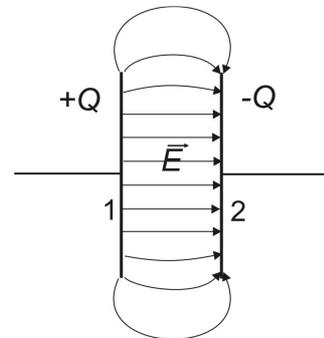
Anmerkung: Gehen Sie bei der Ableitung ganz analog vor, wie bei der Berechnung des Elektrischen Feldes einer Punktladung (s. Vorlesung). Im Unterschied dazu ist aber im aktuellen Fall die von der Integrationsfläche umschlossene Ladung (für Bereiche innerhalb der Kugel) von der Größe des von der Integrationsfläche umschlossenen Volumens abhängig.

1.5. Die Kapazität

Eine Anordnung von zwei voneinander elektrisch isolierten planparallelen Platten aus leitfähigem Material wie auf Abb. 1.12 bezeichnet man als *Plattenkondensator*. Wenn man eine Ladung Q von der einen auf die andere Platte transportiert, ist der Kondensator geladen und es bildet sich ein Elektrisches Feld heraus.

Abb 1.12: Plattenkondensator

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand. Im Innern des Kondensators verlaufen die Feldlinien parallel. Somit sind Betrag und Richtung des Feldes dort konstant, man bezeichnet dies als *homogenes Feld*. An den Plattenrändern ist das Feld dagegen inhomogen. Dieser Effekt ist dann von untergeordneter Bedeutung, wenn der Plattenabstand klein ist gegen deren Durchmesser.



Unter der für kleinen Abstand und großem Durchmesser der Platten guten Annahme eines homogenen Feldes lässt sich die Spannung zwischen beiden Platten leicht aus Glg. 1.10b berechnen:

$$U_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -E \cdot d . \quad (1.15)$$

In welchem Zusammenhang steht die Ladung Q des Kondensators mit der Feldstärke E ? Hier findet wieder der Gaußsche Satz Anwendung. Es gilt, zunächst eine geeignete Fläche zu finden, welche die Ladung Q umschließt und eine einfache Integration gestattet. Wie auf Abb. 1.13 gezeigt, kann eine solche Fläche z.B. die Oberfläche eines Quaders sein, die eine Kondensatorplatte voll umschließt. Dabei verläuft eine der 6 Flächen des Quaders zwischen beiden Kondensatorplatten. Wenn man Randeffekte vernachlässigt, gibt es nur auf dieser Fläche Bereiche mit $E \neq 0$, nämlich gerade zwischen beiden Platten der Fläche A . Somit ist nur der elektrische Fluss durch diese Fläche ungleich Null und wir erhalten für den gesamten elektrischen Fluss durch die Oberfläche des Quaders

$$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 + \Psi_6 = \varepsilon_r \varepsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + \dots + E_6 \cdot A_{6n}) = \varepsilon_r \varepsilon_0 E \cdot A \quad (1.16)$$

Ersetzt man das elektrische Feld in Glg. 1.16 unter Anwendung von Glg. 1.15, so erhält man einen wichtigen Zusammenhang für die Beträge von Spannung und Ladung eines Plattenkondensators:

$Q = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \cdot U$	(1.17)
Kapazität des Plattenkondensators $Q = C \cdot U \quad [C] = 1 \frac{As}{V} = 1F \quad (\text{Farad})$	

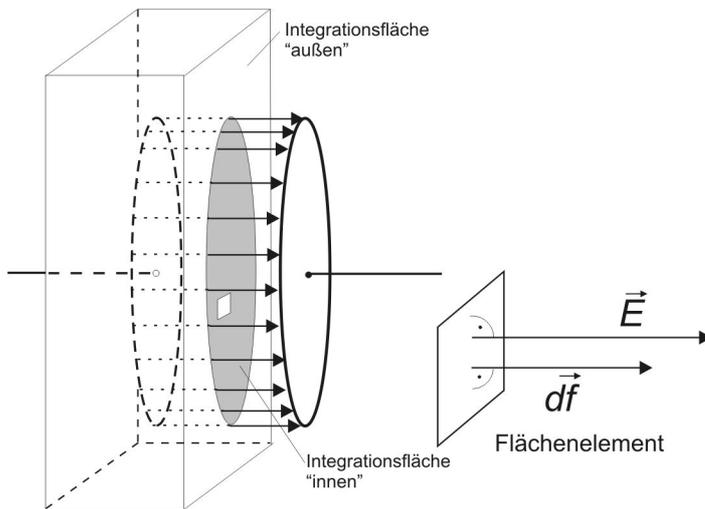


Abb 1.13: Elektrischer Fluß beim Plattenkondensator

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand. Zwischen beiden rechteckigen Kondensatorplatten ist das Feld homogen, außerhalb ist es vernachlässigbar klein. Die vom Feld durchsetzte Fläche ist somit gerade gleich der einer Platte. Da die Feldlinien von \vec{E} senkrecht zur Oberfläche verlaufen, sind sie stets parallel zu dem Vektor $d\vec{f}$ eines jeden Flächenelementes (rechts im Bild).

Im Experiment lässt sich die Beziehung 1.17 leicht verifizieren: Wenn man den Plattenabstand eines aufgeladenen Kondensators bei gleichbleibender Ladung vergrößert, wächst die Spannung zwischen den beiden Platten proportional mit d . Einen analogen Effekt erreicht man bei Verringerung der Fläche des Kondensators, indem man z.B. beide Platten parallel zueinander verschiebt.

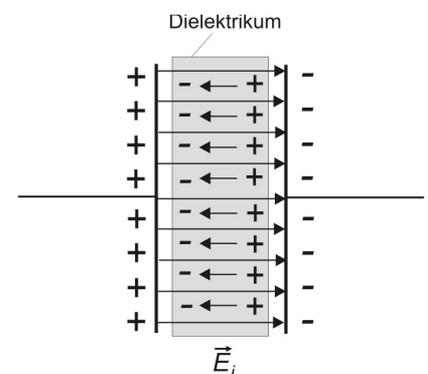
Vergrößert man die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r , z.B. durch Einschleiben einer Platte aus PVC, sinkt die Spannung, beim Herausziehen steigt sie dagegen wieder auf den vorigen Wert an.

Ein solches Dielektrikum erzeugt durch Verschiebung seiner Ladungen infolge der Feldkraft des außen angelegten Feldes ein diesem entgegengesetztes inneres Feld \vec{E}_i . Da sich beide Felder addieren, sinkt das gesamte Feld und damit die außen angelegte Spannung. Aus Glg. 1.17 ist ersichtlich, dass die Kapazität mit ϵ_r wächst.

Abb. 1.14: Plattenkondensator mit Dielektrikum

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand infolge der außen aufgetragenen Ladungen (äußeres Feld), sowie des durch Polarisation des Dielektrikums erzeugten inneren Feldes. Da Felder additiv sind, hat das resultierende Feld eine wesentlich geringere Stärke.

Ein Dielektrikum ist ein Isolator. Die Verschiebung von Ladungen ist deshalb nur auf molekularer Ebene möglich. Die negativ geladene Elektronenhülle verschiebt sich geringfügig gegenüber dem Gerüst aus den positiv geladenen Kernen. Jedes Molekül erhält hierdurch ein elektrisches Dipolmoment, es wird *polarisiert*. Die Felder aller polarisierten Moleküle addieren sich zum inneren Feld. Bei Kristallen verschieben sich im äußeren Feld unterschiedlich geladene Ionen des Gitters gegeneinander, wodurch eine Polarisation erreicht wird.



Parallel- und Reihenschaltung

Wenn man Kondensatoren parallel bzw. in Reihe schaltet (s. Abb. 1.15), kann man die Kapazität einer solchen Anordnung leicht durch die Einzelkapazitäten ausdrücken. Betrachten wir zunächst die Parallelschaltung. Es gilt

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U$$

Eine analoge Beziehung erhält man für die Reihenschaltung, wenn man beachtet, dass die Ladungen auf jedem der beiden Kondensatoren gleich der Gesamtladung ist (dies folgt aus dem Umstand, dass die Summe der positiven und negativen Ladungsträger auf beiden miteinander leitend verbundenen Kondensatorflächen unter Berücksichtigung der Vorzeichen verschwindet).

$$U_{ges} = U_1 + U_2, \quad \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}.$$

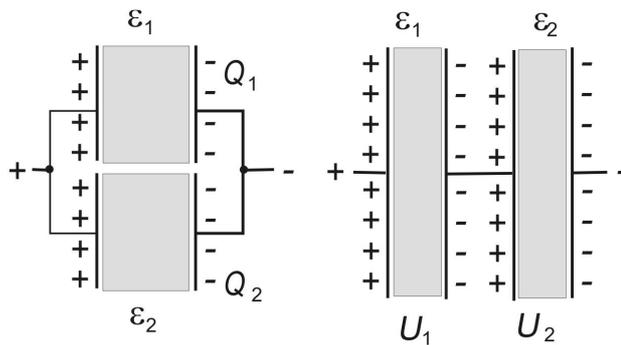


Abb. 1.15: Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Zu beachten ist, dass durch Leiter verbundene Teile stets auf gleichem Potential liegen. Bei Reihenschaltung tragen beide Kondensatoren die gleiche Ladung, bei Parallelschaltung sind die Spannungen gleich.

Ganz ähnliche Betrachtungen kann man für entsprechende Schaltungen mit mehr als zwei Kondensatoren anstellen:

Parallelschaltung $C_{ges} = \sum_i C_i$	(1.18)
Reihenschaltung $C_{ges}^{-1} = \sum_i C_i^{-1}; C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; C_{ges} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}$	

Energiegehalt des geladenen Kondensators

Die im Kondensator gespeicherte *Energie* ist gleich der Arbeit, die zur Aufladung des Kondensators notwendig ist. Diese Arbeit wird von der Stromquelle geleistet, indem Ladungen gegen die aktuelle Potentialdifferenz auf die Kondensatorplatten gebracht werden. Liegt während dieses Prozesses zwischenzeitlich eine Spannung U' an, benötigt man zur Vergrößerung der bereits aufgebrauchten Ladung um dQ die Energie $dW = U' dQ$. Verwendet man Glg. 1.17, um die Abhängigkeit der Spannung von der Ladung explizit auszudrücken und integriert über den gesamten Aufladevorgang, erhält man die

hierzu notwendige Arbeit: $W = \int_0^Q U' dQ = C \int_0^U U' dU' = \frac{C}{2} U^2.$

Energie des geladenen Kondensator $W = \frac{Q}{2} U = \frac{C}{2} U^2$	(1.19)
---	--------

1.6. Die Energiedichte des elektrischen Feldes

Ersetzt man in Glg. 1.19 die Ausdrücke für Spannung und Kapazität mittels Glgn. 1.12, 1.15 und 1.17, folgt für den Energieinhalt eines homogenen elektrischen Feldes innerhalb eines Volumens V

$$W = \frac{C}{2} U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot V = \frac{1}{2} D \cdot E \cdot V. \text{ Division von } W \text{ durch } V \text{ ergibt die}$$

$$\text{Energiedichte des elektrischen Feldes } \omega_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (1.20)$$

Im Plattenkondensator ist die Energiedichte konstant und man erhält die Gesamtenergie durch Multiplikation der Energiedichte mit dem Volumen des Dielektrikums. Bei inhomogenen elektrischen Feldern ist eine differentielle Rechnung notwendig. Das Volumenelement dV enthält die Energie $dW = \omega_{el} dV$, eine Integration über das von Feld durchsetzte Raumgebiet liefert die darin enthaltene Feldenergie: $W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 dV$.

Tabelle 1.1. Relative Permittivitäten ε , bei ca. 20°C gemessen in statischen oder niederfrequenten Feldern

Helium	1,00007	Glimmer	5 - 8
CO ₂	1,00099	Glas	4 - 16
O ₂	1,00049	Porzellan	6
N ₂	1,00053	Aluminiumoxid	9 - 12
Pentan	1,84	MgTiO ₃	10 - 50
Benzol	2,28	BaTiO ₃	10 ³ - 10 ⁴
Chloroform	4,81	NaCl	6,1
Aceton	21,4	Diamant	5,5
Äthanol	25,1	Silizium (undotiert)	11,5
Glycerin	41,1	Germanium "	16
Wasser 80,4		GaAs "	13
Cyanwasserstoff	114,9	PVC	3,0

Technische Kondensatoren

Die ursprüngliche Form des Kondensators (=Verdichter) war die der *Leidener Flasche*, also eines mit Metallfolie ausgekleideten oder mit Wasser gefüllten gläsernen Gefäßes. Die Wirkung von Elektrisiermaschinen konnten durch Speicherung der Ladung in einer Leidener Flasche viel eindrucksvoller demonstriert werden.

Heute sind Kondensatoren fundamentale Bauelemente der Elektrotechnik. Sie dienen u.a. der Glättung, Kopplung, Phasenschiebung, Kompensation, Entstörung, als Filter, in Schwingkreisen, Erzeugung von Stoßentladungen in mächtigen Impulslasern, aber auch als winzige Datenspeicher in integrierten Schaltungen. Die beiden wichtigen Kenngrößen sind *Kapazität* und *zulässige Spannung*. Weiterhin sind neben den Abmessungen des Bauelementes dessen Temperatur- und Hochfrequenzverhalten wichtig.

Es gibt sehr verschiedenartige Bauausführungen von Kondensatoren. Die ursprüngliche Form als Plattenkondensator findet man stilisiert als Schaltzeichen in elektronischen Schaltungen: Zwei voneinander isolierte Platten mit zugeführten Leitern.

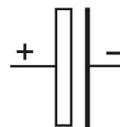


Plattenkondensatoren mit Luft als Dielektrikum findet man nur noch selten als Drehkondensator mit einstellbarer Kapazität. Hierbei werden kammartige Strukturen von Plattenstapeln ineinander verdreht und hierdurch stufenlos Kapazitäten eingestellt. Wesentlich höhere Kapazitäten erreicht man mit *Keramikkondensatoren*, bei denen die hohen Werte der relativen Permittivität von Titanaten und Zirkonaten (10⁴ - 10⁵) zu Kapazitäten von einigen μF bei Abmessungen von wenigen mm² Kondensatorfläche führen. Hervorragend sind die Hochfrequenzeigenschaften im GHz-Bereich und hohe Nennspannungen bis zu einigen 10 kV.

Wickelkondensatoren bestehen aus Papier- oder Kunststofffolien, die Metallfolien oder dünne Bedampfungsschichten isolieren. Es werden trotz der geringen Werte der Permittivität der verwendeten Folien durch große aufgewickelte Flächen und Verwendung dünner Folien hohe Kapazitäten

(ca. 10mF) erreicht und Nennspannungen bis ca. 10 kV. Nachteile sind schlechte HF-Eigenschaften (sog. parasitäre Induktivität durch den Wicklungscharakter) und großes Volumen.

Bei den *Elektrolytkondensatoren* (Aluminium- und Tantal-Elkos) besteht die positive Anode aus einer Metallschicht mit großer Oberfläche (geätzte Alu-Folie oder gesintertes Ta-Pulver). Als Dielektrikum dient eine dünne Oxidschicht mit relativ großem ϵ (ca. 10 bei Al bzw. 27 bei Ta). Die zweite Platte ist ein Elektrolyt, der von der Kathode (unoxidierte Al-Folie bzw. Leitsilberschicht) kontaktiert wird. Da die Oxidschicht stets auf der Anode liegt, gilt es bei der praktischen Anwendung stets auf richtige Polung der Kondensatoren zu achten. Falschpolung führt wie Überschreiten der höchstzulässigen Spannung zur Zerstörung des Kondensators infolge elektrochemischer Gas- und Wärmeentwicklung. Der Kondensator kann geräuschvoll (und gefährvoll!) platzen. Ta-Elkos sind besonders klein und werden bis etwa $300\mu\text{F}$ und 100V gebaut, Al-Elkos gibt es bis über 1kV und 1F. Für Wechselfspannungen sind Elkos natürlich nicht geeignet.



Goldkondensatoren sind eine spezielle Bauform von Elkos, bei denen als Dielektrikum eine molekulare Doppelschicht fungiert. Die Nennspannungen sind auf einige Volt begrenzt, infolge der großen erreichbaren Kapazitäten bis über 1000 F sind solche Kondensatoren als Notstromversorgung u.a. für Mikrocomputer verwendbar. Hierbei ist interessant, dass sie eine praktisch unbegrenzte Zahl von Lade-Entladezyklen überstehen, und hierbei (ebenfalls im Unterschied zu den Akkus) innerhalb weniger Sekunden be- und entladen werden können.

Übungen

1.16. Berechnen Sie die im Plattenkondensator ($A = 314 \text{ cm}^2$, $d = 0,5 \text{ mm}$) bei einer Spannung von $U = 220 \text{ V}$ gespeicherte Energie (Dielektrikum ist Glimmer mit $\epsilon_r = 6$). Wie groß ist die Energiedichte?

Ergebnis: $0,16 \text{ mWs}$; $10,2 \text{ Ws/m}^3$

1.17. Welche Energiedichte kann ein elektrisches Feld in feuchter Luft höchstens haben, wenn es bei einer Feldstärke $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ zum Funkenüberschlag kommt? Berechnen Sie die Spannung, die man hierbei an einem luftgefüllten Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von $d = 4 \text{ mm}$ höchstens anlegen kann.

Ergebnis: $17,7 \text{ Ws/m}^3$; 8 kV

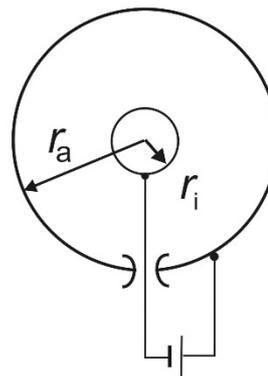
1.18. Ein auf die Spannung $U_1 = 100 \text{ V}$ aufgeladener Kondensator der Kapazität $C_1 = 20 \mu\text{F}$ wird an einem ungeladenen Kondensator der Kapazität $C_2 = 10 \mu\text{F}$ parallel geschaltet. Berechnen Sie die Spannung, die an beiden Kondensatoren anliegt. Bleibt nach der Parallelschaltung die Energie erhalten?

Ergebnis: $66,7 \text{ V}$; nein

1.19. Wie groß müsste die Plattenfläche eines luftgefüllten Plattenkondensators sein, der bei einem Plattenabstand von $d = 1 \text{ mm}$ und einer Spannung von $U = 220 \text{ V}$ die gleiche Energie speichert wie eine Autobatterie von 12 V und 88 Ah?

Ergebnis: 17700 km^2

1.20.* Wie groß ist die Kapazität eines Kugelkondensators, wenn die Durchmesser von Innen- und Außenkugelschalen $d_i = 200 \text{ mm}$ und $d_a = 300 \text{ mm}$ betragen und das Dielektrikum eine relative Dielektrizitätskonstante von $\epsilon = 4$ aufweist?



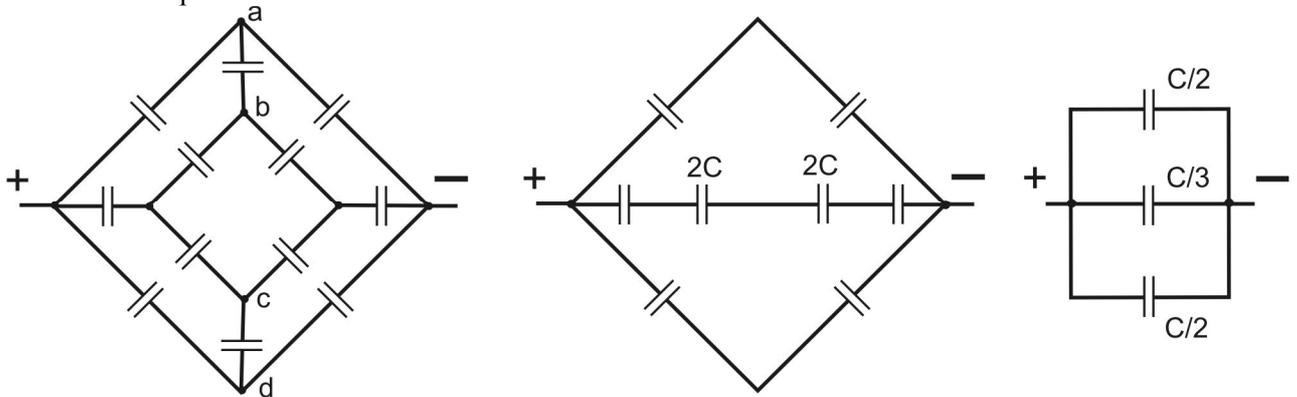
Anmerkung: Gehen Sie bei der Ableitung ganz analog vor, wie bei der Berechnung der Kapazität für den Plattenkondensator, beachten Sie aber hier, daß das elektrische Feld zwischen beiden Kugelschalen nicht homogen ist (anders als beim Plattenkondensator), sondern offensichtlich Kugelsymmetrie hat. Eine günstige Integrationsfläche ist die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt mit der des Kugelkondensators identisch ist und für deren Durchmesser d gilt $d_i < d < d_a$.

Ergebnis: 135 pF

1.21. Aus 12 Röhrenkondensatoren gleicher Kapazität C wird ein Würfel angefertigt, indem je ein Anschluss von jeweils drei Kondensatoren zusammengelötet eine Würfecke bildet. Die "Würfelkante" wird durch einen Kondensator gebildet. Wie groß ist die Gesamtkapazität, wenn diese über zwei Eckpunkte des Würfels gemessen wird, die durch eine *Flächendiagonale* verbunden sind?

Anmerkung: Die Lösung wird vereinfacht, wenn Sie beachten, dass ggf. Punkte gleichen Potentials (Symmetrie ausnutzen!) stets durch einen zusätzlichen Leiter verbunden werden könnten, der dann die Messung nicht beeinflusst (denn über den Leiter würden ja keine Ladungen fließen). Nach dem gleichen Prinzip kann man einen zwischen zwei Punkten gleichen Potentials befindlichen Kondensator entfernen (denn in einem solchen Fall ist er ja nicht geladen) oder durch einen Draht ersetzen, s.o.

Lösung: Wieder ist eine Skizze hilfreich. Allerdings ist es günstig, anstelle einer perspektivischen Darstellung des Würfels, diesen quasi platt zu drücken und, um Kurzschlüsse der Verbindungsdrähte der Kondensatoren zu vermeiden, diese ggf. etwas zu dehnen oder zu stauchen. Das sollte möglichst symmetrisch geschehen. Dann erkennt man leichter, dass die Punkte a, b, c und d (s. Abb.) alle auf gleichem Potential liegen, nämlich gerade auf dem mittleren, bezogen auf die Anschlüsse + und -. Somit ist es praktisch, die Punkte b und c leitend zu verbinden, die Kondensatoren zwischen a, b sowie zwischen c, d können entfernt werden. Es ergibt sich eine Gesamtkapazität von $4C/3$.



1.22. Wie 1.15. aber mit den Anschlüssen a) über die Raumdiagonale und b) über eine Würfelkante.

1.23.* Ein $l = 1$ m langes Koaxialkabel mit einem Innenleiter ($R_i = 0,5$ mm) und einem Außenleiter ($R_a = 3,5$ mm) bildet einen sogenannten Zylinderkondensator. Der Raum zwischen beiden Leitern besteht aus einem Dielektrikum mit $\epsilon = 1,2$.

a) Geben Sie in einer Skizze (Querschnitt) den Verlauf der Feldlinien des elektrischen Feldes innerhalb und außerhalb des Kabels qualitativ an, wenn der Innenleiter positiv gegen den Außenleiter geladen ist.

b) Leiten Sie eine Formel ab zur Bestimmung der Kapazität des Zylinderkondensators.

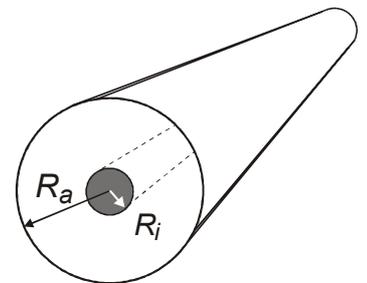
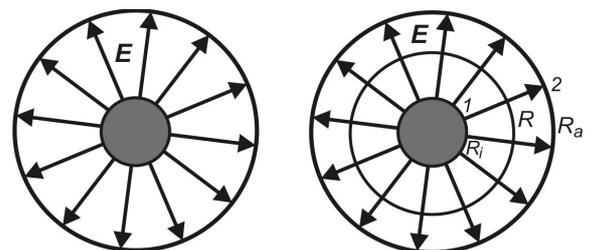


Abb. Koaxialkabel

Anmerkung: Verfahren Sie hierbei wie bei der Berechnung der Kapazität des Plattenkondensators. Wenden Sie also den Gaußschen Satz an sowie die Definition der elektrischen Spannung (Zusammenhang zwischen Elektrischem Feld und Potential). Eine günstige Integrationsfläche ist die Oberfläche eines Zylinders, dessen Symmetrieachse mit der des Koaxialkabels identisch ist und für dessen Radius R gilt $R_i < R < R_a$. Vergessen Sie aber der Vollständigkeit halber nicht, dass zu einer geschlossenen Zylinderfläche auch die Stirnseiten gehören.

geg.: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

Lösung: a) Ein Feld kann nur die gleiche Symmetrie haben wie die Anordnung, die es hervorruft. Somit hat das Feld zylindrische Symmetrie. Da die Feldlinien aus den positiven Ladungen quellen, sich diese auf dem Innenleiter befinden, verlaufen die Feldlinien radial. Da sich die positiven Ladungen nur auf der Oberfläche des Innenleiters befinden, ist das Innere des Innenleiters feldfrei. Da die Gesamtladung von Innen- und Außenleiter gleich Null ist, ist



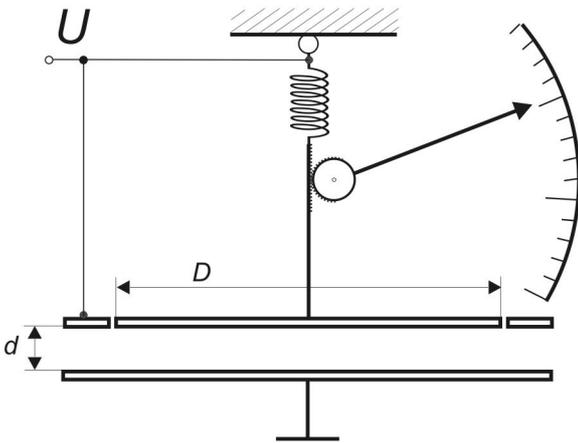
auch das Feld außerhalb des Außenleiters gleich Null. Das Feldlinienbild ist auf der linken Abbildung wieder gegeben.

b) Wie in der Anmerkung angeregt, ist eine für die Anwendung des Gaußschen Satzes günstige Oberfläche die eines zwischen Innen- und Außenleiter angeordneten Zylinders mit dem Radius R . Dann besteht die Integrationsfläche aus der Zylinderwandung A_1 sowie den beiden Stirnflächen A_2 und A_3 . Die beiden Stirnflächen haben aber keine Flächenprojektion senkrecht zu den Feldlinien, also gilt für den gesamten Elektrischen Fluß durch die Oberfläche des Zylinders laut Glg. 1.13

$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \epsilon_r \epsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + E_2 \cdot A_{2n} + E_3 \cdot A_{3n}) = \epsilon_r \epsilon_0 E(R) \cdot 2\pi R \cdot l + 0 + 0$. Die Feldstärke ist somit umgekehrt proportional zum Abstand von der Zylinderachse. Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ergibt sich nach Glg. 1.10a. Der Verschiebungsweg wird dabei zweckmäßig in Richtung einer Feldlinie gewählt, da dafür gilt $\cos \alpha = 1$:

$$U = - \int_{R_1}^{R_2} E(s) \cos \alpha(s) ds = - \int_{R_1}^{R_2} E(s) ds = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi s \cdot l} ds = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi \cdot l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Die Kapazität des Zylinderkondensators ist somit $C = Q/U = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi \cdot l}{\ln R_2/R_1}$.



1.24.* Die nebenstehende Abbildung zeigt ein *elektrostatisches Voltmeter*. Es besteht aus einer feststehenden Kondensatorplatte mit Masseanschluss sowie einer ebenfalls runden beweglich angeordneten Platte mit dem Durchmesser $D = 3$ cm, die noch von einem Kreisring umgeben ist. Als Maß für die Spannung wird die Kraft gemessen, die auf die bewegliche Platte ausgeübt wird, sobald der Kondensator aufgeladen ist.

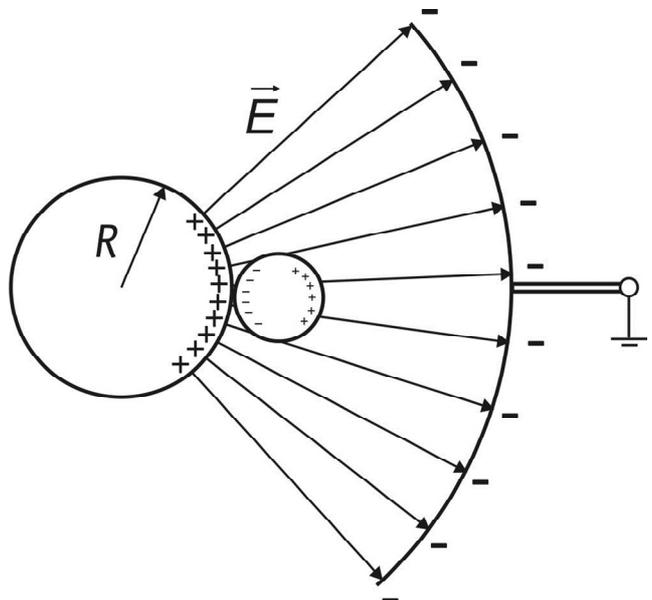
- Bei einem Plattenabstand von $d = 3$ mm wird eine Kraft von $0,7$ mN auf die obere Kondensatorplatte ausgeübt. Wie groß ist die angelegte Spannung U ?
- Wozu dient der Ring um die obere Platte?
- Worin besteht der Vorteil eines elektrostatischen Voltmeters?

Ergebnis: 1420 V; Feld wird homogenisiert; stromlos, hohe Spannungen

1.25.* Ein elektrostatisches Staubfilter benutzt ein *inhomogenes* Feld, dessen Stärke an der Oberfläche eines dünnen Drahtes mit einem Durchmesser $d = 0,2$ mm $E = 10^6$ V/m beträgt. Die Feldstärke verringert sich mit zunehmendem Abstand r von der *Mittellinie* des Drahtes gemäß $E(r) \propto 1/r$. Die elektrisch neutralen Staubteilchen werden unter dem Einfluss des Feldes polarisiert und verhalten sich dann so, als trügen sie $+5000$ e sowie -5000 e in $1 \mu\text{m}$ Abstand. Welche elektrostatische Kraft wirkt auf sie direkt in Drahtnähe? Wie groß ist hierzu im Vergleich die Gewichtskraft, wenn die Teilchen kugelförmig sind mit einem Durchmesser von $1 \mu\text{m}$ und einer Dichte von 2g/cm^3 ?

geg.: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As

Ergebnis: $8 \cdot 10^{-10}$ N; 10^{-14} N



1.26.* Die Beschleunigungsspannung U_B für den Elektronenstrahl eines Oszilloskops beträgt 4,5 kV. Die Ablenkung des zunächst horizontalen Strahls erfolgt durch ein zusätzliches elektrisches Feld E . Dieses wird durch einen Plattenkondensator mit der Ablenkspannung $U_A=1,8$ kV und dem Plattenabstand $d = 4$ cm erzeugt. Näherungsweise ist das Feld innerhalb des Kondensators homogen, außerhalb des Raumes zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigbar klein.

a) Fertigen Sie die (evtl. perspektivische) Prinzipskizze eines vertikalen Schnittes durch eine Elektronenstrahlröhre an, welche die Elektronenquelle mit Beschleuniger sowie die für die Vertikalablenkung notwendigen Elektroden (analog Plattenkondensator) enthält. Zeichnen Sie die für eine Ablenkung nach oben notwendige Richtung des Elektrischen Feldes ein sowie die hierzu notwendige Polung der Ablenkspannung U_A (Begründung) !

b) Berechnen Sie die Elektronengeschwindigkeit infolge der Beschleunigungsspannung!

c) Die zwischen den Ablenkplatten auf das Elektron wirkende elektrostatische Feldkraft bewirkt, dass dieser Teil der Flugbahn von der Geraden abweicht. Bestimmen Sie die Trajektorie der Elektronen $y(x)$, wobei der Ursprung des Koordinatensystems an der Stelle liegt, an welcher der Elektronenstrahl in den Bereich des Ablenkfeldes eintritt, die x -Richtung entspricht der ursprünglichen Richtung des Elektronenstrahls, die y -Achse zeigt in Richtung der ablenkenden Feldkraft.

Anmerkung: Die Elektronengeschwindigkeit ermittelt man, indem die kinetische Energie verglichen wird mit der Energie, die das Elektron durch die Beschleunigungsspannung erfährt. Die zur Ablenkung notwendige elektrische Feldkraft erzeugt eine konstante Beschleunigung. Vergleichen Sie die Bewegung in x -Richtung ($x(t)$) mit der in y -Richtung ($y(t)$) und eliminieren Sie in beiden Gleichungen die Zeit t .

geg.: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Ergebnis: b) 40000 km/s c) $y(x) = \frac{U_A}{U_B} \frac{x^2}{4d}$