Anhang 1 Mathematische Grundlagen

A1.1 Größen und Gleichungen

Gegenstand der Physik ist das Erkennen von Naturgesetzen sowie deren Beschreibung mit den Methoden der Mathematik. Physikalische *Größen* kennzeichnen Eigenschaften physikalischer Objekte, für die ein Messverfahren existiert, haben somit eine *Qualität* (Kraft, Masse, Geschwindigkeit, Dichte,...) wie auch *Quantität* (erfasst durch eine Zahl), die es gestattet, Größen gleicher Qualität miteinander zu vergleichen. Hierbei bezieht man sich auf physikalische *Einheiten*, das sind international festgelegte reproduzierbare Größen, die entweder durch einen *Prototypen* wie beim Kilogramm oder eine *Messvorschrift* wie beim Ampere (s.u.) definiert werden. Jede physikalische Größe G kann als Vielfaches dieser Einheiten ausgedrückt werden. Somit ergibt sie sich als Produkt aus dem quantitativen Merkmal, der *Maßzahl* oder dem *Zahlenwert* $\{G\}$, und dem qualitativen Merkmal, der *Maßeinheit* $[G]$:

$$G = \{G\}[G]. \qquad \text{(A1.1)}$$

Physikalische Gesetze finden ihren Ausdruck in der mathematischen Verknüpfung verschiedener physikalischer Größen. Gilt z.B. für die gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v ein Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg s und der dazu benötigten Zeit t als Produkt $s = v\,t$, erhält man laut A1.1 für die explizite Berechnung $s = \{v\}[v]\{t\}[t] = \{vt\}[vt] = \{s\}[s]$.
Physikalische Gesetze führen somit zu einer Verknüpfung von Maßeinheiten. Man unterscheidet hierbei zwischen *Basiseinheiten* und *abgeleiteten Einheiten*.

Dem Internationalen Einheitensystem (Système International d'Unités, abgekürzt SI) liegen sieben Basiseinheiten zugrunde:

Physikalische Größe	Basiseinheit	Symbol
Länge	das **Meter**	m
Zeit	die **Sekunde**	s
Masse	das **Kilogramm**	kg
Elektrische Stromstärke	das **Ampere**	A
Temperatur	das **Kelvin**	K
Stoffmenge	das **Mol**	mol
Lichtstärke	die **Candela**	cd
ergänzende Einheiten		
ebener Winkel	der **Radiant**	rad
Raumwinkel	der **Steradiant**	sr

Bei einer *Größengleichung* stehen die Symbole für die physikalischen Größen, also für die Produkte aus Zahlenwert und Einheit dieser Größen. Sie gilt unabhängig von der Wahl der Einheiten. Es ist unerheblich, ob man z.B. in der Gleichung $s = v\,t$, die Geschwindigkeit in m/s oder km/h angibt, wenn die Einheit der Zeit entsprechend in s oder h gewählt wird. Verwendet man dagegen *nichtkohärente* Einheiten - das ist insbesondere bei ingenieurtechnischen Anwendungen üblich - kommt man zur *Zahlenwertgleichung*. Bei dieser sind bestimmte Einheiten vorgeschrieben, in unserem Beispiel:

$s = v\,t/3{,}6$ mit s - Weg in Metern
v - Geschwindigkeit in Kilometern je Stunde
t - Zeit in Sekunden.

Die Verwendung der SI-Einheiten bietet dagegen den Vorteil, dass die Größengleichungen ohne Veränderung auch als Zahlenwertgleichungen benutzt werden können. Aus diesem Grunde werden im Folgenden stets Größengleichungen in SI-Einheiten verwendet.
Bei der Umformung einer Größengleichung gelten die üblichen Regeln der Mathematik. Zahlenwerte und Einheiten verschiedener Größen können in einem gemeinsamen Ausdruck umgeformt werden.

Da Summanden innerhalb einer Größengleichung stets gleiche Einheiten haben müssen, kann man diese aber auch ausklammern und getrennt umformen. Auf diese Weise entsteht aus einer Größengleichung die dazugehörige *Einheitengleichung*.

Größengleichung: $v = v_0 + s/t = \{v_0\}[v_0] + \{s/t\}[s/t] = \{v_0\}[v] + \{s/t\}[v] = (\{v_0\} + \{s/t\})[v]$
Zahlenwertgleichung: $\{v\} = \{v_0\} + \{s/t\}$
Einheitengleichung: $[v] = [v] + [s/t] = [s] / [t] = \mathrm{m/s}$

Man sollte die Einheitengleichung stets sorgfältig behandeln. Bei einer unrichtigen Größengleichung ist sehr oft die Einheitengleichheit nicht gegeben und man kommt dadurch dem Fehler rasch auf die Spur. Zu beachten ist, dass als Potenzen nur Zahlen in Frage kommen, ebenso wie Logarithmen auch nur von Zahlen gebildet werden können. Andererseits sind die trigonometrischen Funktionen nur für Winkel definiert.

A1.2 Differentiation physikalischer Größen

Oft sind die interessierenden Größen nicht konstant, sondern Funktionen verschiedener Variablen. Üblich ist in der Mathematik die Bezeichnung $y = f(x_1, x_2, x_3,...)$, mit dimensionslosen Variablen x_i und Funktion *f*. Funktionen und Variablen der Physik enthalten dagegen Maßeinheiten. Besonders häufig sind Zeitabhängigkeiten. Sei die Geschwindigkeit $v(t)$ eine solche Zeitfunktion. Die bekannte Beziehung $v = s/t$ liefert nur die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher in der Zeit t die Wegstrecke s zurückgelegt wird. Interessiert man sich für aktuelle Geschwindigkeitswerte, so betrachtet man kleine Teilwegstrecken Δs, die in Zeiten Δt zurückgelegt werden.

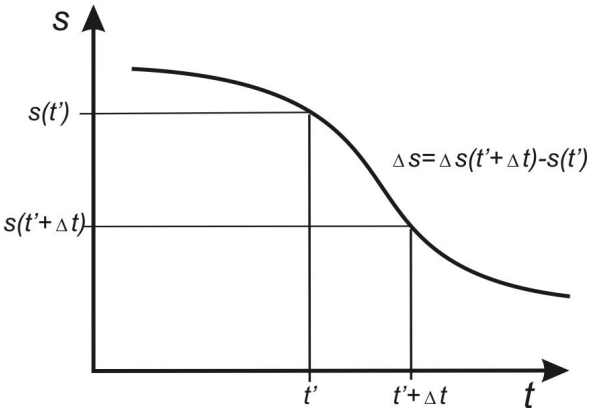


Abb. A1.1 Weg-Zeit-Funktion bei zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit

In diesem Fall wird $s(t)$ durch eine gekrümmte Kurve beschrieben. Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ entspricht der mittleren Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt. Durch Übergang zum Differentialquotienten erhält man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t' als $v(t')$.

Der Grenzübergang zu differentiellen Zeitintervallen dt liefert die Momentangeschwindigkeit $v(t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Die Differentiale ds und dt sind jeweils Produkte aus Maßzahl und Maßeinheit. Die Einheitengleichung lässt sich separieren, man erhält wieder die Maßeinheit der Geschwindigkeit. Als Aufgabe verbleibt die Differentiation der Zahlenwertfunktion $\{s(t)\}$ nach dem Zahlenwert der Zeit:

$$\{v\}[v] = \frac{\mathrm{d}\{s\}[s]}{\mathrm{d}\{t\}[t]} = \frac{\mathrm{d}\{s\}}{\mathrm{d}\{t\}} \cdot \frac{[s]}{[t]} = \frac{\mathrm{d}\{s\}}{\mathrm{d}\{t\}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \qquad \text{(A1.2)}$$

Das ist ein rein mathematisches Problem und leicht zu lösen, wenn die Zeitabhängigkeit $s(t)$ bekannt ist. Zweckmäßig geht man so vor, dass die Funktion $s(t)$ nach t formal differenziert wird (genau so, als würde eine analoge Funktion $y(x)$ nach x differenziert werden). Werden in die resultierende Funktion $v(t)$ dort enthaltene physikalische Größen eingesetzt, erhält $v(t)$ stets die richtige Maßeinheit.

Beispiel A1.1: Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit eines Oszillators

Aufgabe: Die Zeitfunktion der Auslenkung eines Oszillators (Federschwinger) der Frequenz f ist durch die Funktion $s(t) = B\cos(2\pi ft)$ gegeben. Man berechne die Geschwindigkeit $v(t)$.
Geg.: Amplitude $B = 0{,}05$ m; Frequenz $f = 1{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$.

Lösung: Die Funktion $s(t)$ wird formal differenziert: $v(t) = \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t = -2\pi f\, B \sin(2\pi ft)$. Die gegebenen Werte für Frequenz und Amplitude werden eingesetzt und die Maßeinheiten geeignet umgeformt:
$v(t) = -0{,}15\pi\sin(3\pi t/\mathrm{s})$ m/s. Das ist die gesuchte Geschwindigkeits-Zeit-Funktion. Interessiert ein spezieller Wert, z.B. zu $t = 0{,}5$s, wird für die Zeit diese Größe eingesetzt $v(0{,}5\mathrm{s}) = -0{,}15\pi\ \sin(1{,}5\pi)$ m/s = 0,471 m/s.

A1.3 Integration physikalischer Größen

Die Integration als Umkehrung der Differentialrechnung erweist sich auch in der Physik als eine wichtige Methode. Als Stammfunktion oder Integral einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ bezeichnet man eine differenzierbare Funktion $F(x)$, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist, also $F'(x) = f(x)$. Da bei der Differentiation einer Funktion eine in dieser additiv auftretende Konstante verschwindet, existieren zu einer gegebenen Funktion unendlich viele Stammfunktionen. Bei der Berechnung des Integrals ist diese *Integrationskonstante C* unbestimmt

$$\boxed{\textit{unbestimmtes Integral} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,.} \qquad \text{(A1.3)}$$

Die Funktion $f(x)$ bezeichnet man als *Integrand*, x ist die *Integrationsvariable*. Es ist insbesondere bei Anwendungen in der Physik durchaus üblich, das *Differential* dx auch unmittelbar hinter das Integralzeichen zu schreiben.
Wie verfährt man, wenn es sich um physikalische Größen handelt, *x, f, F* und *C* also Maßeinheiten enthalten? Auch hier können Zahlenwertgleichung und Einheitengleichung separiert werden.

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \{v(t)\}[v(t)]\,\{\mathrm{d}t\}[\mathrm{d}t] = \int \{v(t)\}\,\{\mathrm{d}t\}\ \mathrm{m} = \{s(t)\}[s(t)] + \{C\}[C] = \{s(t)\}\ \mathrm{m} + \{C\}\ \mathrm{m} = s(t) + C$$

In der Praxis wird man wieder so verfahren, dass die Funktion $v(t)$ formal über die Zeit integriert wird, das Ergebnis erhält automatisch die richtige Maßeinheit (sofern richtig integriert wurde - Kontrollmöglichkeit!). Welche Bedeutung hat die Integrationskonstante C? Diese enthält einen zunächst unbestimmten zeitunabhängigen, also konstanten, Anteil am Weg s. Es wird zur expliziten Bestimmung von C also noch eine weitere Angabe zu s benötigt. Sei der Weg S_1 zum Zeitpunkt t_1 gegeben. Hieraus ergibt sich eine Möglichkeit, C zu bestimmen: $C = S_1 - s(t_1)$. Mit der so bestimmten Integrationskonstante kann man für beliebige Zeiten den Weg berechnen. Interessiert der innerhalb eines Zeitintervalles $[t_a; t_e]$ zurückgelegte Weg, berechnet man die Differenz $s(t_e) - s(t_a)$.
Während eines sehr kleinen Zeitintervalls $[t_1; t_1+\Delta t]$ kann die Geschwindigkeit als nahezu konstant betrachtet werden $v = v(t_1)$. Das Produkt $v(t_1)\Delta t$ hat die Dimension einer Länge mit der Maßeinheit Meter und entspricht dem während Δt zurückgelegten Weg Δs. Teilt man das Intervall $[t_a; t_e]$ in ausreichend viele Δt_i , so ist die Summe über die Teilstrecken Δs_i in guter Näherung gleich dem in dieser Zeit zurückgelegten Weg

$$s(t_e) - s(t_a) \cong \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\ \Delta t_i\ . \qquad \text{(A1.4)}$$

Von dieser Summe wird der Grenzwert für den Fall berechnet, dass die Dauer der Elementarintervalle gegen Null strebt und demzufolge ihre Anzahl gegen ∞. Dieser Grenzwert heißt das bestimmte Riemann[11]sche Integral der Funktion in dem gegebenen Intervall. In unserem Beispiel schreibt man dafür

[11] Bernhard RIEMANN (1826-1866), dt. Mathematiker; part. Diff.-Glg. der Theoret. Physik; Funktionentheorie; Riemann-Integral u.v.m.

$$s(t_e) - s(t_a) = \lim_{\substack{\Delta t_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\, \Delta t_i = \int_{t_a}^{t_e} v(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{(A1.5)}$$

Die beiden *Intervallgrenzen* werden zu Integrationsgrenzen, sie legen das *Integrationsintervall* fest. Die Berechnung eines bestimmten Integrals wird über die Beziehung

Hauptsatz der Integralrechnung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x == \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$ (A1.6)

auf die Berechnung des zugehörigen unbestimmten Integrals $F(x)$, d.h. auf die Ermittlung einer Stammfunktion s. Glg.A1.3 zurückgeführt. Angewandt auf unser Beispiel ergibt sich eine Übereinstimmung mit Glg. A1.5.

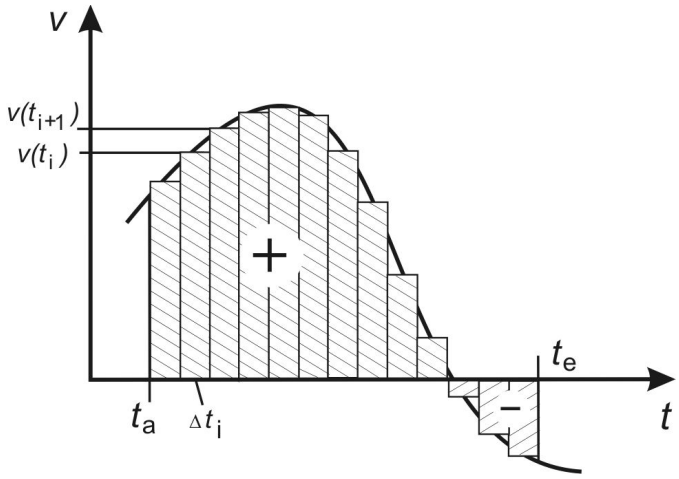


Abb. A1.2 Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals

Die bestimmte Integration kann mit einer Flächenberechnung verglichen werden. Die Abbildung zeigt dies anschaulich für eine relativ grobe Zerlegung laut Glg. A1.4. Teilsummen für positive Werte von $v(t)$ erhalten positives Vorzeichen, solche für negative v analog negative Vorzeichen. Die Integration über das gesamte Intervall liefert eine Flächendifferenz. Im Beispiel hat diese natürlich die Dimension einer Länge, da $[v][t]$ = m.
Vertauscht man die Integrationsgrenzen, ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals.

Beispiel A1.2: Wurfhöhe beim senkrechten Wurf

Aufgabe: Eine Masse m wird aus der Höhe h_0 = 15 m mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 15 m/s senkrecht nach oben geworfen und bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft. Welche Position hat die Masse zu einem späteren Zeitpunkt t' =3,5 s?
Lösung:
Für die Geschwindigkeit beim senkrechten Wurf gilt die Beziehung $v(t) = v_0 - gt$ mit der Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s^2. Um hieraus die Ortsfunktion $h(t)$ zu berechnen, muss $v(t)$ über die Zeit integriert werden:

$$h(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int v_0 - gt\,\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + C\,.$$

Die Integrationskonstante C kann bestimmt werden, wenn man die *Randbedingung* $h(t{=}0){=}\, h_0$ anwendet. Hieraus folgt sofort $C = h_0$ und somit ergibt sich als Lösungsfunktion $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + h_0$. Mit den angegebenen Werten bestimmt man $h(t')$ = 7,4 m.
Führt man eine bestimmte Integration durch, muß man die Integrationsgrenzen $t_a = 0$; $t_e = t'$ festlegen. Der innerhalb dieses Zeitintervalls zurückgelegte Weg beträgt

$h(t') - h(0) = \int_0^{t'} v_0 - gt\,\mathrm{d}t = v_0 t' - \frac{g}{2} t'^2 = -7{,}6$ m . Addiert man die Anfangshöhe h_0, erhält man ein gleiches Ergebnis wie bei der unbestimmten Integration.

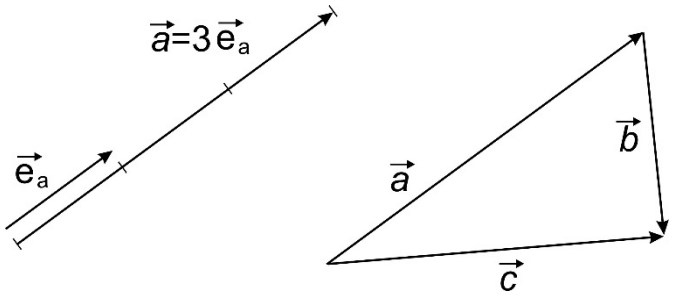
A1.4. Vektorielle Größen

Neben solchen *skalaren* Größen wie Masse, Zeit, Dichte, Volumen, Druck, Temperatur,... welche durch Maßzahl und Maßeinheit vollständig angegeben werden, unterscheidet man in der Physik *gerichtete* Größen. Solche sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Feldstärke,... die durch *Vektoren* dargestellt werden können. Gut veranschaulichen kann man sich einen Vektor als Pfeil, dessen Länge (sein *Betrag*) gleich dem Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit ist, und dessen Richtung durch die Orientierung des Pfeiles vom *Ausgangs*- oder *Startpunkt* zum *Endpunkt* oder *Spitze* im Raum angegeben wird. Eine einfachste Methode, einen Vektor $\vec{a}$ zu charakterisieren besteht somit in der Angabe seines Betrages $|\vec{a}| = a$ und seiner Richtung durch einen sogenannten *Einheitsvektor* $\vec{e}_a$. Dieser hat den Betrag "1" und ist dimensionslos. Man schreibt $\vec{a} = a\,\vec{e}_a$, der Vektor $\vec{a}$ ist somit der um den Betrag *a* vergrößerte Einheitsvektor $\vec{e}_a$. Vektoren lassen sich addieren ($\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a\,\vec{e}_a + b\,\vec{e}_b$) und mit anderen Skalaren multiplizieren ($\vec{d} = C\,\vec{a} = C\,a\,\vec{e}_a$). Die skalare Multiplikation ändert nur den Betrag, nicht die Richtung des Vektors. Ist der Skalar negativ, so ändert sich jedoch der *Richtungssinn* des Vektors (zeigt jetzt in die genau entgegengesetzte Richtung).

Abb. A1.3 Multiplikation mit Skalar, Addition

Der (Einheits-)Vektor $\vec{e}_a$ wird mit einem Skalar *a*, seinem Betrag, multipliziert (links).

Bei der Addition zweier Vektoren wird der zweite Summand so parallel verschoben, dass sein Startpunkt auf den Endpunkt des ersten Summanden trifft. Die Summe ergibt sich aus dem Vektor vom Startpunkt des ersten zum End punkt des zweiten Summanden.



Bei dem Produkt zweier Vektoren unterscheidet man zwischen *Skalarprodukt* (auch "Punktprodukt", Ergebnis ist ein Skalar) und *Vektorprodukt* (auch "Kreuzprodukt", Ergebnis ist ein Vektor). Die geometrische Veranschaulichung beider Produkte ist auf Abb. A1.4 gegeben. Das Skalarprodukt sowie der Betrag des Vektorproduktes der Vektoren berechnet sich zu

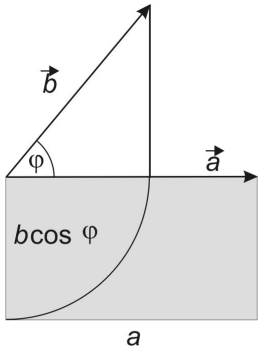
Skalarprodukt	$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$	mit $\varphi = \angle(\vec{a};\vec{b})$
Betrag des Vektorproduktes	$\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert = ab\sin\varphi$	

(A1.7)

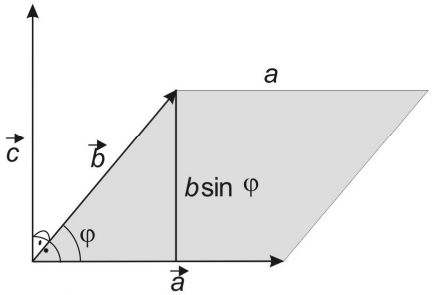
Das Vektorprodukt steht senkrecht auf der durch beide Faktoren aufgespannten Ebene, der Richtungssinn ergibt sich aus der *Rechtsschraube.*

Abb. A1.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ hat den Betrag *a* cos φ. Mit dem Betrag von $\vec{b}$ multipliziert ergibt sich das Skalarprodukt.
Das Vektorprodukt ist vom Betrag gleich der Fläche des durch beide Faktoren aufgespannten Parallelogramms. Dreht man den ersten Faktor des Produkts, also $\vec{a}$, um eine zu beiden Vektoren senkrechte Achse auf $\vec{b}$, so zeigt $\vec{c}$ in die Richtung einer um diese Achse gedrehten Rechtsschraube.



Skalarprodukt



Vektorprodukt

Physikalische Gesetze, die mit Skalar- bzw. Vektorprodukt formuliert werden, haben unterschiedliche Bedeutung. Greift z.B. eine konstante Kraft $\vec{F}$ an einem Punkt an, der um den Vektor $\vec{R}$ verschoben wird, leistet sie an diesem die *Verschiebungsarbeit* $W = \vec{R} \cdot \vec{F}$. Greift dagegen die gleiche Kraft an einem Ortsvektor $\vec{R}$ an, erzeugt sie um eine Achse, die senkrecht zu $\vec{F}$ und $\vec{R}$ verläuft, ein *Drehmoment* $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$. Die Maßeinheit beider Größen ist gleich Nm.

Koordinatenschreibweise

Hat man es mit vielen Vektoren zu tun und sind diese noch variabel, z.B. zeitabhängig, ist es praktisch, diese mit konstanten Vektoren zu vergleichen. Drei zueinander senkrecht orientierten Vektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, jeweils vom Betrag 1 bilden die Basis oder *Einheitsvektoren* eines *kartesischen Koordinatensystems*. Jeder Vektor kann eineindeutig in drei *Komponenten* so zerlegt werden, daß diese jeweils ein Vielfaches der Einheitsvektoren darstellen. Die Komponenten sind somit Vektoren. Die skalare Größe, mit welcher man einen Einheitsvektor multiplizieren muss, um die entsprechende Komponente in dieser Richtung zu erhalten, bezeichnet man als *Koordinate*. Es gilt somit für einen Ortsvektor

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z \,. \qquad \text{(A1.8)}$$

Der große Vorteil dieser Koordinatenschreibweise besteht darin, dass man alle Vektoren mit nur drei Einheitsvektoren beschreiben kann. Dabei ist es unerheblich, welche Dimension diese Vektoren haben. Man kann also z.B. sowohl Geschwindigkeits- oder auch Kraftvektoren zusammen mit Ortsvektoren in einem System darstellen. Ausschließlich die Koordinaten enthalten dabei die Maßeinheiten, z.B. $R_x = \{R_x\}[R_x] = \{R_x\}\mathrm{m}$.

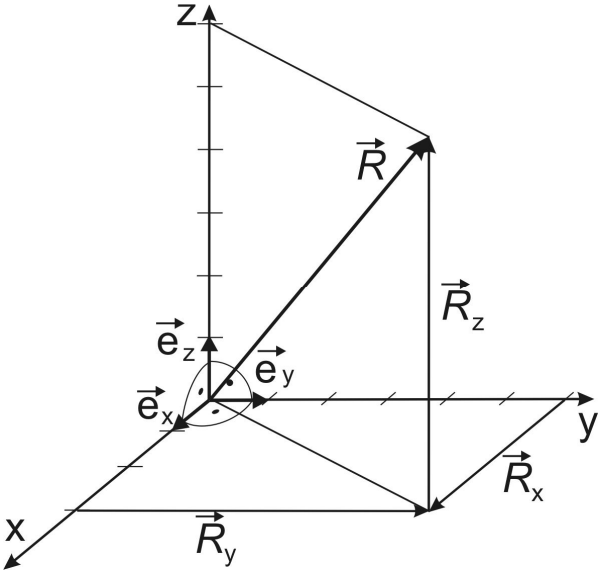


Abb. A1.5 Koordinatendarstellung

Die Projektionen des Vektors $\vec{R}$ auf die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ergeben die Komponenten $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$. Jede Komponente kann als Einheitsvektor, multipliziert mit der dazugehörenden Koordinate, dargestellt werden. Die Koordinate besteht aus dem Produkt von (positiver oder auch negativer) Maßzahl und Maßeinheit.

Beim abgebildeten Koordinatensystem handelt es sich um ein sogenanntes *Rechtssystem*. Alle anders orientierten Systeme, die durch Drehung aus diesem System erhalten werden können, sind ebenfalls Rechtssysteme. Nur mit solchen Systemen werden wir arbeiten. Ein *Linkssystem* erhält man, wenn eine Achse in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Wenn man sich stets auf das gleiche Koordinatensystem bezieht, ist es müßig, bei jedem Vektor die Einheitsvektoren explizit aufzuschreiben, da dieser ja durch die Koordinaten bereits vollständig beschrieben ist. Also gibt man oft nur die drei Koordinaten in x-, y- und z-Richtung an:

$$\textit{Zeilenvektor} \quad \vec{R} = \left(R_x, R_y, R_z\right) \qquad\qquad \textit{Spaltenvektor} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}. \qquad \text{(A1.9)}$$

Ob man die Koordinaten eines Vektors als Zeile oder Spalte anordnet, ist zunächst unerheblich. Wenn wir uns an den Regeln der *Linearen Algebra* orientieren, die allgemeinere Strukturen beschreibt, werden wir Vektorprodukte als *Zeilenvektor mal Spaltenvektor* aufschreiben.

Rechenregeln
Die Koordinatenschreibweise erleichtert vorzüglich das Rechnen mit Vektoren.

Vektoraddition

$$\vec{R}+\vec{S}=R_x\vec{e}_x+R_y\vec{e}_y+R_z\vec{e}_z+S_x\vec{e}_x+S_y\vec{e}_y+S_z\vec{e}_z=(R_x+S_x)\vec{e}_x+(R_y+S_y)\vec{e}_y+(R_z+S_z)\vec{e}_z$$

$$\vec{Q}=\vec{R}+\vec{S}=\begin{pmatrix}R_x\\R_y\\R_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_x\\S_y\\S_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_x+S_x\\R_y+S_y\\R_z+S_z\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\textit{Vektoraddition}\quad Q_i=R_i+S_i\quad i=x,y,z} \tag{A1.10}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\vec{P}=A\,\vec{R}=A\,R_x\vec{e}_x+A\,R_y\vec{e}_y+A\,R_y\vec{e}_z=\sum_{i=x,y,z}A\,R_i\,\vec{e}_i=A\begin{pmatrix}R_x\\R_y\\R_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AR_x\\AR_y\\AR_y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\textit{Multiplikation mit Skalar}\quad P_i=A\,R_i\quad i=x,y,z} \tag{A1.11}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\vec{R}\cdot\vec{S}&=(R_x\vec{e}_x+R_y\vec{e}_y+R_z\vec{e}_z)\cdot(S_x\vec{e}_x+S_y\vec{e}_y+S_z\vec{e}_z)\\&=R_xS_x\vec{e}_x^{\,2}+R_xS_y\vec{e}_x\,\vec{e}_y+R_xS_z\vec{e}_x\vec{e}_z+R_yS_x\vec{e}_y\,\vec{e}_x+R_yS_y\,\vec{e}_y^{\,2}+R_yS_z\,\vec{e}_y\vec{e}_z+R_zS_x\vec{e}_z\,\vec{e}_x+R_zS_y\vec{e}_z\vec{e}_y+R_zS_z\vec{e}_z^{\,2}\\&=R_xS_x+R_yS_y+R_zS_z\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Skalarprodukt}\quad \vec{R}\cdot\vec{S}=\sum_{i=x,y,z}R_i\,S_i} \tag{A1.12}$$

Aus dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst $\vec{R}\cdot\vec{R}=R^2$ ergibt sich eine Möglichkeit zur Berechnung seines Betrages:

$$\boxed{\textit{Betrag eines Vektors}\quad R=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{\sum_{i=x,y,z}R_i^{\,2}}} \tag{A1.13}$$

Vektorprodukt

$$\begin{aligned}\vec{Q}&=\vec{R}\times\vec{S}=(R_x\vec{e}_x+R_y\vec{e}_y+R_z\vec{e}_z)\times(S_x\vec{e}_x+S_y\vec{e}_y+S_z\vec{e}_z)\\&=R_xS_x\vec{e}_x\times\vec{e}_x+R_xS_y\vec{e}_x\times\vec{e}_y+R_xS_z\vec{e}_x\times\vec{e}_z+R_yS_x\vec{e}_y\times\vec{e}_x+R_yS_y\,\vec{e}_y\times\vec{e}_y+R_yS_z\,\vec{e}_y\times\vec{e}_z+R_zS_x\vec{e}_z\times\vec{e}_x+R_zS_y\vec{e}_z\times\vec{e}_y+R_zS_z\vec{e}_z\times\vec{e}_z\\&=(R_yS_z-R_zS_y)\vec{e}_x+(R_zS_x-R_xS_z)\vec{e}_y+(R_xS_y-R_yS_x)\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Vektorprodukt}\quad Q_i=R_jS_k-R_kS_j\quad i,j,k=x,y,z\ \ \textit{in zyklischer Vertauschung}} \tag{A1.14}$$

Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe
Ist ein Vektor von einer skalaren Größe abhängig (in vielen Fällen ist das die Zeit *t*), stellt sich die Frage nach seiner Ableitung. Betrachtet man einen Ortsvektor $\vec{R}(t)$, so lautet dessen *Differenzenquotient* $\dfrac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t}$. Offensichtlich handelt es sich um einen Vektor mit der Maßeinheit m/s, also eine Geschwindigkeit. Dessen Grenzwert $\vec{v}(t)$ ist die Zeitableitung des Ortsvektors. Da Zeitableitungen in der Physik sehr häufig auftreten, hat man hierfür eine Abkürzung eingeführt. Ein Punkt über der Zeitfunktion bedeutet, dass man sie einmal ableitet, zwei Punkte sind gleichbedeutend mit

der zweiten Ableitung usw. Also gilt $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R}(t) = \dot{\vec{R}}(t)$. Ansonsten gelten die bekannten Regeln der Differentiation. Da ein Vektor als Summe seiner Komponenten aufgeschrieben werden kann, ist seine Ableitung auch gleich der Summe der Ableitungen der Komponenten. Da jede Komponente Produkt eines (konstanten!) Einheitsvektors mit der zeitabhängigen Koordinate ist, wird nur diese abgeleitet. Das stellt kein Problem dar, denn die Koordinate ist ja nur eine skalare Zeitfunktion. Es ergibt sich somit

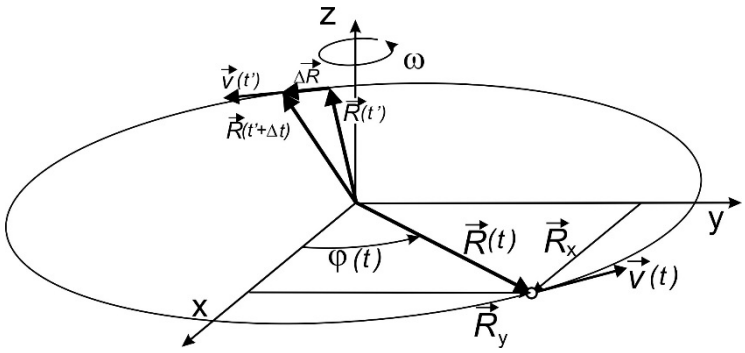
$$\textit{Differentiation eines Vektors } \dot{\vec{R}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=x,y,z} R_i(t)\,\vec{\mathrm{e}}_i = \sum_{i=x,y,z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_i(t)\,\vec{\mathrm{e}}_i = \sum_{i=x,y,z}\dot{R}_i(t)\,\vec{\mathrm{e}}_i \qquad \text{(A1.15)}$$

Beispiel A1.3: Geschwindigkeit bei gleichförmiger Kreisbewegung

Aufgabe: Ein Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn um die z-Achse mit dem Radius *R*. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind seine Koordinaten (*R*, 0, 0). Gesucht ist der Geschwindigkeitsvektor.

Lösung:

Die Position des Massenpunktes ist gegeben durch den Abstand *R* von der Rotationsachse sowie den Winkel $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$. Diese beiden Größen sind die *Polarkoordinaten.* Da der Massenpunkt zu $t = 0$ auf der x-Achse liegt, folgt $\varphi_0 = 0$. Aus der Projektion des Ortsvektors auf die x-, y- und z-Achse ergeben sich die *kartesischen Koordinaten* zu $R_x = R\cos\omega t$, $R_y = R\sin\omega t$, $R_z = 0$.



Durch Differentiation der Ortskoordinaten nach der Zeit erhält man die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors. Dieser hat die Richtung einer Tangente an die Kreisbahn

$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\big(R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0\big) = R\omega\big(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0\big)$. Die Richtung der Bahngeschwindigkeit ergibt sich aus $\Delta\vec{R}$, der Änderung des Ortsvektors $\vec{R}$ im Zeitintervall Δt, $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$. Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant: $v = \omega R$.

Integration eines Vektors über eine skalare Größe

Betrachten wir als Beispiel wieder einen zeitabhängigen Ortsvektor $\vec{R}(t)$. Bekanntlich ergibt die erste Zeitableitung eine Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Bei einer nochmaligen Ableitung nach der Zeit resultiert die Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Die Integration als Umkehrung der Differentiation sollte es demzufolge ermöglichen, aus einer bekannten Beschleunigung die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion als Vektor zu bestimmen. Hier geht man formal vor, indem man die Integration des Vektors als Summe der Integrale der drei Komponenten versteht. Da jede Komponente aus dem Produkt von (konstantem) Einheitsvektor und zeitabhängiger Koordinate besteht, kann der Einheitsvektor vor das Integralzeichen geschrieben werden. Integriert wird dann die Koordinate, die lediglich eine skalare Zeitfunktion darstellt.

$$\textit{Integration eines Vektors } \int\vec{v}(t)\mathrm{d}t = \int\sum_{i=x,y,z} v_i(t)\,\vec{\mathrm{e}}_i\mathrm{d}t = \sum_{i=x,y,z}\int v_i(t)\,\vec{\mathrm{e}}_i\mathrm{d}t = \sum_{i=x,y,z}\vec{\mathrm{e}}_i\int v_i(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(A1.16)}$$

Beispiel A1.4: Der schiefe Wurf

Aufgabe: Eine Punktmasse bewegt sich zu $t = 0$ vom Koordinatenursprung aus mit einer Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α zur x-Achse. Sie unterliegt nur der Erdbeschleunigung. Geben Sie den Ortsvektor als Funktion der Zeit an.

Lösung:

Die Erdbeschleunigung wird über die Zeit integriert. Das Ergebnis ist ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{g}\,\mathrm{d}t = \int (0,0,-g)\,\mathrm{d}t = \left(C_x, C_y, \int -g\,\mathrm{d}t\right) = \left(C_x, C_y, -gt + C_z\right) = \vec{g}t + \vec{C}\,.$$

Die Integration der x-und y-Koordinaten liefert nur Konstanten. Offensichtlich gilt für $t = 0$ die Beziehung $\vec{v}(0) = \vec{C}$. Somit ist die Integrationskonstante gleich dem Vektor der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{C} = \vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha,)$. Nochmalige Integration liefert den Ortsvektor:

$$\vec{R}(t) = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t = \int (v_0 \cos\alpha,\ 0, -gt + v_0 \sin\alpha,)\,\mathrm{d}t = \left(\int v_0 \cos\alpha\ \mathrm{d}t, C_y, \int -gt + v_0 \sin\alpha\ \mathrm{d}t\right)$$

$$= \left(v_0 t \cos\alpha + C_x,\ C_y,\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\alpha + C_z\right) = \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}\,.$$

Für die Integrationskonstante gilt $\vec{C} = \vec{R}(0) = 0$, also $\vec{R}(t) = \left(v_0 t \cos\alpha,\ 0, -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\alpha\right)$. Da für beliebige Zeiten $R_y = 0$, verläuft die Wurfbahn nur in der xz-Ebene. Durch welche Funktion $z(x)$ wird die Wurfbahn beschrieben? Hierzu wird $x = v_0\, t \cos\alpha$ nach t umgestellt und in z eingesetzt:

$z = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + \frac{x \sin\alpha}{\cos\alpha}$. Die geworfene Masse beschreibt eine sogenannte *Wurfparabel*. Die nichttriviale Nullstelle entspricht der Wurfweite $s = \frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\alpha$. Bei einem Abwurfwinkel von $\alpha = 45°$ hat sie ihren Maximalwert.

Integration über eine vektorielle Integrationsvariable

Wenn die Integrationsvariable ein Vektor ist, so stellt das Differential einen infinitesimal kleinen Vektor dar. Mit diesem ist der Integrand (in der Regel eine Funktion der Integrationsvariablen) zu multiplizieren. Danach wird innerhalb der Integrationsgrenzen aufsummiert. Sei als einfachstes Beispiel die Integrationsvariable ein Ortsvektor $\vec{R}_a$, der die Lage eines Punktes angibt. Der Punkt wird nun entlang einer gekrümmten Trajektorie verschoben. Die Verschiebung von einem Raumpunkt auf der Trajektorie zum nächsten wird recht gut durch kleine Verschiebungsvektoren $\Delta\vec{R}_i$ beschrieben, s. Abb. A1.8. Schließlich endet die Trajektorie im Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{R}_e$. Offensichtlich gilt

$$\Delta\vec{R}_1 + \Delta\vec{R}_2 + \Delta\vec{R}_3 + \ldots + \Delta\vec{R}_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{R}_i \cong \vec{R}_e - \vec{R}_a = \int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} \mathrm{d}\vec{R}. \qquad \text{(A1.17)}$$

Oft ist der Integrand $\vec{G}(\vec{f})$ eine Vektorfunktion der Integrationsvariablen $\vec{f}$. Der Ausdruck hat dann die Form $\int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} \vec{G}(\vec{f})\,\mathrm{d}\vec{f}$. Das sieht erst ein wenig ungewohnt aus. Wenn wie hier der Integrand mit der Integrationsvariablen durch skalare Multiplikation verknüpft sind, kann man die entsprechenden Regeln anwenden. Nach Glg. A1.7 folgt $\int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} \vec{G}(\vec{f})\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} G(\vec{f}) \cos\alpha(\vec{f})\,\mathrm{d}f$. Der Integrand ist dann eine *skalare* Funktion von $\vec{f}$. Die Integration ist explizit durchführbar, wenn $\alpha(\vec{f})$ bekannt ist.

Wenn die Funktion $\vec{G}(\vec{f})$ in kartesischen Koordinaten gegeben ist, kann Glg. A1.12 angewendet werden. Das Differential wird ebenfalls in Koordinaten angegeben. Der resultierende Ausdruck $\vec{G}(\vec{f})\,\mathrm{d}\vec{f} = G_x \mathrm{d}f_x + G_y \mathrm{d}f_y + G_z \mathrm{d}f_z$ enthält nur noch skalare Funktionen, die zu integrieren sind, Somit gilt $\int \vec{G}(\vec{f})\,\mathrm{d}\vec{f} = \int G_x \mathrm{d}f_x + \int G_y \mathrm{d}f_y + \int G_z \mathrm{d}f_z$.

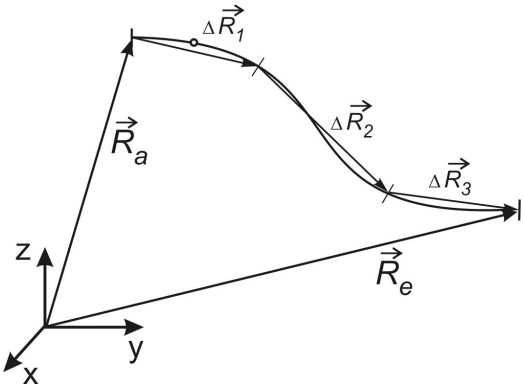


Abb. A1.8 Integration über ein Kurvenstück

Die Integration $\int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} \mathrm{d}\vec{R}$ bedeutet hier die Summation der infinitesimalen Verschiebungs*vektoren* $\mathrm{d}\vec{R}$. Die resultierende Gesamtverschiebung wird allein durch Anfangs- und Endpunkt bestimmt.

Wohl zu unterscheiden gilt es hiervon den ganz ähnlichen Ausdruck $\int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} \mathrm{d}R$. Da $R = \left|\vec{R}\right|$ hat das Integral die Bedeutung der *Streckenlänge* der Verschiebung, ist keine gerichtete Größe und hängt sehr wohl von der Art der Streckenführung ab.

Beispiel A1.5: Verschiebungsarbeit gegen eine Feldkraft

Aufgabe: Eine Punktmasse *m* = 5kg soll gegen die Schwerkraft verschoben werden. Die lineare Verschiebung beginnt im Koordinatenursprung und endet im Punkt mit den Koordinaten (1m, 0, 2m). Man berechne die gegen die Schwerkraft aufzubringende Verschiebungsarbeit.

Lösung, Variante 1:

Die Gewichtskraft, die auf die Masse *m* wirkt beträgt $\vec{G} = m\,\vec{g}$. Die Kraft $\vec{F}$, mit der *gegen* die Schwerkraft Arbeit verrichtet wird, ist dieser entgegengesetzt gleich. Sie hat die Koordinaten $\vec{F} = (0, 0, m\,g)$. Die gesamte Verschiebungsarbeit kann als Summe der Teilarbeiten während differentieller Verschiebungen aufgefasst werden. Solche Teilarbeit hat die Form $\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = 0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y + mg\mathrm{d}z = mg\mathrm{d}z$. Bei Verschiebungen in x- bzw. y-Richtung wird also keine Arbeit geleistet! Somit erhält man

$$\int_{\vec{R}}^{\vec{R}_e} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{R} = \int_0^h mg\,\mathrm{d}z = mgh = 5\mathrm{kg}\,9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,2\mathrm{m} = 98{,}1\mathrm{Nm}\,.$$

Lösung, Variante 2 :

Der Winkel α zwischen $\vec{F}$ und der Verschiebung $\mathrm{d}\vec{R}$ ist bekannt und beträgt stets arccot 2 = 26,56°.

$$\int_{\vec{R}}^{\vec{R}_e} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{R} = \int_0^{\vec{R}_e} mg\cos 26{,}56°\,\mathrm{d}R = mg\cos 26{,}56° \int_0^{\vec{R}_e} \mathrm{d}R = mg\cos 26{,}56° R = 5\mathrm{kg}\,9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,0{,}895\sqrt{(2\mathrm{m})^2 + (1\mathrm{m})^2} = 98{,}1\mathrm{Nm}$$

Beide Ergebnisse sind identisch. Bemerkenswert ist der Umstand, dass für die Verschiebungsarbeit offensichtlich nur Anfangs- und Endpunkt wichtig sind, nicht die konkrete Verschiebungstrajektorie. Dies ist ein Merkmal sogenannter *konservativer Felder*.