2. Der Gleichstromkreis

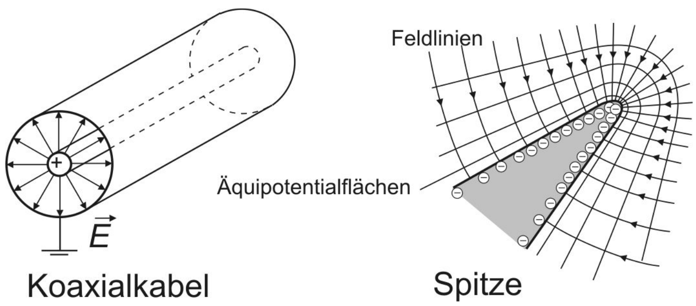
2.1. Das elektrische Feld im Leiter

Von einem *Leiter* spricht man bei Vorhandensein von frei beweglichen Ladungsträgern. Da dies für einen Teil der Elektronen in einem Metall zutrifft (sogenannte *Leitungselektronen*), betrachten wir im Folgenden metallische Leiter.
Infolge ihrer elektrostatischen Abstoßung verteilen sich (überschüssige) Leitungselektronen stets auf der Oberfläche des geladenen Leiters und zwar so lange, bis die auf jedes Elektron wirkenden Kräfte verschwinden (sich vektoriell zu Null addieren). In diesem stationären Fall ist das Potential im Innern des Leiters und auf seiner Oberfläche konstant. Eine Potentialdifferenz innerhalb des Leiters hat wegen der Beweglichkeit der Elektronen sofort einen Stromfluss zur Folge, der bestrebt ist, einen Potentialausgleich herbei zu führen.

Im stromlosen Leiter ist das elektrostatische Potential konstant, die Leiteroberfläche bildet eine Äquipotentialfläche mit dazu senkrechten elektrischen Feldlinien. Das elektrostatische Feld im Leiter ist Null.

Das elektrische Feld verschwindet auch innerhalb eines von Leitern umschlossenen Raumes, z.B. einer metallische Hohlkugel oder eines Drahtkäfigs. Dies nennt man einen FARADAY*schen Käfig*. Die Karosse eines Autos stellt einen solchen Käfig dar und schützt demzufolge zuverlässig die Insassen bei einem etwaigen Blitzschlag.
Eine weitere praktische Anwendung dieses Prinzips ist das Koaxialkabel. Ein meist auf Massepotential liegender *Außenleiter* in Form eines zylindrischen Metallmantels (Drahtgeflecht oder Kunststoff mit metallisierter Oberfläche) umgibt einen Innenleiter. Zwischen beiden sorgt meist ein Schaumstoff (Schaumpolyethylen) mit kleinem ε_r für äußere Stabilität und die mechanische Halterung des Innenleiters.

Abb. 2.1: Das elektrische Feld an Leiteroberflächen
Im links dargestellten Koaxialkabel verlaufen die Feldlinien vom Innenleiter radial zum Außenleiter. Außerhalb des Kabels ist kein Feld vorhanden. Fremdfelder werden durch den geschlossenen Mantel wirksam abgeschirmt (Faradayscher Käfig). Die hohe Dichte der Feldlinien an einer negativ geladenen Metallspitze (rechts im Bild) zeugt von einer hohen Feldstärke. Aus dünnen Spitzen und Drähten können deshalb leicht Elektronen austreten.



2.2. Die klassische Elektronentheorie

Die gute Leitfähigkeit von Metallen beruht darauf, dass einige Elektronen nicht fest an ihre Wirtsatome gebunden sind, sondern als frei bewegliche *Leitungselektronen* negative Ladungen transportieren können. Bei guten Leitern wie Silber und Kupfer steht je Atom ein Leitungselektron zur Verfügung, bei anderen Metallen mitunter wesentlich weniger. So gibt bei Wismut nur etwa jedes 1000te Atom im Mittel ein Elektron frei. Da alle Leitungselektronen die benachbarten positiven Ionen gleichermaßen anziehen, bewirken sie die *metallische Bindung*.
Dass es wirklich solche frei beweglichen Elektronen gibt, wurde durch einen Versuch von TOLMAN[12] gezeigt: Eine Kupferdrahtspule wurde in schnelle Rotation versetzt und daraufhin schlagartig abgebremst. Die Massenträgheit der Elektronen bewirkte eine kurzzeitige Ladungsverschiebung, die durch ein Galvanometer nachgewiesen werden konnte.

[12] Richard TOLMAn (1881-1948), amer. Physiker; Trägheit von Elektronen; Relativitäts- und Quantentheorie

Von DRUDE[13] wurde 1902 an der Universität Leipzig eine auf den Prinzipien der klassischen Mechanik beruhende Theorie zur Elektronenbewegung im stromdurchflossenen Leiter aufgestellt. Wird an die Enden eines Leiters eine Spannung angelegt, ist das E-Feld im Leiter nicht mehr gleich Null. Somit wirkt auf die Leitungselektronen eine Feldkraft $\vec{F} = -e\vec{E}$, die nach dem 2. Newtonschen Axiom $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ eine beschleunigte Bewegung bewirkt. Die Geschwindigkeit nimmt solange zu, bis durch Wechselwirkung des Elektrons mit einem Atom des Wirtsgitters die aufgenommene Energie abgegeben wird. Man kann dann von einem stationären Zustand ausgehen, bei dem sich die Elektronen mit einer mittleren *Driftgeschwindigkeit* bewegen und Stöße nach einer mittleren *Stoßzeit* τ ausführen.

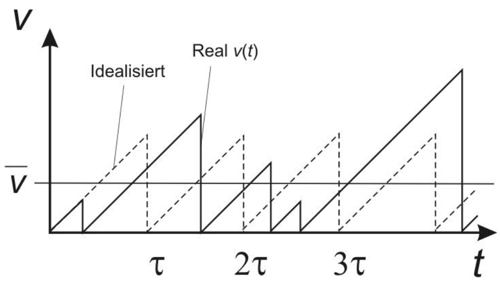


Abb. 2.2: Ladungsträgergeschwindigkeit

Dargestellt ist die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit freier Ladungsträger unter dem Einfluss einer Feldkraft. In unregelmäßigen Zeitabständen erfolgen unelastische Stöße mit Gitteratomen (reale Kurve). Im zeitlichen Mittel erfolgen Stöße nach einer Stoßzeit τ (idealisierte Kurve), die zeitliche Mittelung der Geschwindigkeit ergibt die Driftgeschwindigkeit $\bar{v}$.

Dies ergibt für den stationären Zustand für den Betrag der Driftgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{e\,\tau}{m} E \tag{2.1}$$

Die Proportionalität von Driftgeschwindigkeit und Feldstärke (bzw. Feldkraft) hat eine starke Analogie zur mechanischen Reibung (Strömungswiderstand eines Körpers in einem Fluid). Die Proportionalitätskonstante ist die *Beweglichkeit* μ:

$$\mu = \frac{e}{m}\tau \tag{2.2}$$

Weitere wichtige elektrische Größen sind die Ladungsträgerdichte n (Zahl der Ladungsträger je Volumen) und der Stromdichtevektor $\vec{j}$:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{Ladungsträgerzahl}{Volumen} \tag{2.3}$$

$$\vec{j} = n \cdot (-e) \cdot \vec{\bar{v}} \tag{2.4}$$

Der Stromdichtevektor gibt die in der Richtung von $\bar{v}$ je Flächeneinheit pro Zeit durchströmende Ladung an. Integriert man den Stromdichtevektor über eine Fläche A, erhält man den Strom I durch diese Fläche:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} = I \tag{2.5}$$

Handelt es sich bei dieser Fläche um einen Draht, gilt $I = j \cdot A$.
Fasst man 2.1 und 2.4 zusammen, erhält man eine Proportionalität zwischen Stromdichte und Elektrischer Feldstärke. Die Proportionalitätskonstante σ bezeichnet man als *Leitfähigkeit*:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\sigma = n \cdot e \cdot \mu \quad \text{Leitfähigkeit, in SIEMENS}^{14} \quad 1\text{S} = 1\Omega^{-1}\text{m}^{-1}} \tag{2.7}$$

[13] Paul Karl Ludwig DRUDE (1863-1906) dt. Physiker, Universität Leipzig; klassische Elektronentheorie, Ellipsometrie, Wärmeleitfähigkeit
[14] Werner von SIEMENS (1816-1892), dt. Ing. Physiker und Unternehmer; dynamoelektrisches Prinzip; Telegraphenbau; Stifter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

Die reziproke Leitfähigkeit, der *spezifische Widerstand* ρ (in Ωm) , ist eine ebenfalls in der Elektrotechnik häufig verwendete stoffspezifische Größe. Aus Glg. 2.6 lässt sich leicht eine wichtige und Ihnen wohlbekannte Beziehung ableiten, das OHM[15]*sche Gesetz*. Man betrachtet hierzu ein Leiterstück der Länge l mit dem über die Länge konstanten Querschnitt A. Die Stromdichte sei über den Querschnitt konstant, ebenso das Elektrische Feld. Die Integration über den Leiterquerschnitt laut Glg. 2.5 entspricht dann einer Multiplikation $j{\cdot}A=I$. Man erhält

$$I = \sigma \cdot E \cdot A = \frac{E \cdot A}{\rho} = \frac{E \cdot l}{\rho \frac{l}{A}} = \frac{U}{\rho \frac{l}{A}} \; . \tag{2.8}$$

Die Erweiterung mit l entspricht einer Integration über die Drahtlänge entsprechend Glg. 1.10 Spannung und Stromstärke über einen Leiter sind also zueinander proportional.

$$\boxed{I = \frac{U}{R} \text{ mit } R = \rho \frac{l}{A} \text{ in Ohm; } 1\Omega = 1\text{V/A}, \text{ Ohmsches Gesetz}} \tag{2.9}$$

Tabelle 2.1 Spezifischer Widerstand bei Raumtemperatur in Ωm

Bernstein	10^{16}-10^{17}	Fe_3O_4	10^{-4}
Polystyrol, PTFE	10^{16}	Graphit	$1{,}1\cdot10^{-5}$
Polyethylen, Glimmer	10^{15}	Chromdioxid	10^{-6}
Epoxydharz, hart-PVC	10^{14}	Wismut	$1{,}2\cdot10^{-6}$
Isolierpapier, Sinterkorund	10^{13}	Quecksilber	$9{,}6\cdot10^{-7}$
Silikongummi	10^{11}-10^{14}	Konstantan	$5{,}0\cdot10^{-7}$
Diamant	10^{11}	Manganin	$4{,}2\cdot10^{-7}$
Porzellan	10^{10}	Blei	$2{,}1\cdot10^{-7}$
Glas (kein Leitglas)	10^{6}-10^{16}	Zinn, Platin	$1{,}1\cdot10^{-7}$
Galliumarsenid (undot.)	$2\cdot10^{7}$	Eisen	$1{,}0\cdot10^{-7}$
Silizium (undot.)	$2{,}3\cdot10^{5}$	Wolfram	$5{,}5\cdot10^{-8}$
Silizium (dotiert)	bis $3\cdot10^{-5}$	Aluminium	$2{,}8\cdot10^{-8}$
Germanium	0,46		
Gefüllte Kunststoffe	10^{10}-10^{-4}	Gold	$2{,}2\cdot10^{-8}$
Selbstleitende Kunststoffe	10^{10}-10^{-6}	Kupfer	$1{,}7\cdot10^{-8}$
Kalk, Granit	10^{4}	Silber	$1{,}6\cdot10^{-8}$
Humus	10^{2}		

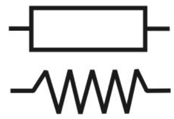
Definition der Stromstärke
Die Stromstärke ist eine der 7 Basiseinheiten im Internationalen Maßsystem (SI). Ursprünglich wurde sie durch Anwendung der FARADAYschen Gesetze definiert, indem die bei der Elektrolyse abgeschiedene Stoffmenge gewogen wurde. Die derzeit gültige Festlegung nutzt Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern aus. Hiernach fließt durch zwei lange parallele Drähte im Abstand von 1m dann je ein Strom von 1 Ampere, wenn die Kraft je Meter Leitungslänge $2*10^{-7}$ Newton beträgt. Bei gleichgerichteten Strömen tritt Anziehung, bei antiparalleler Stromrichtung Abstoßung auf.

[15] Georg Simon OHM (1787-1854), dt. Physiker; Ohmsches Gesetz mit Thermoelement als Spannungsquelle; Molekularphysik; Kristalloptik; musikalische Akustik

Tabelle 2.2 Elektronenbeweglichkeit bei Raumtemperatur in 10^{-3} m^2/Vs

Silber	5,6
Kupfer	3,1
Indium-Arsenid	2700
Wismut	400
Germanium	390
Silizium	190

In elektrischen Schaltbildern wird ein Widerstand durch ein Rechteck dargestellt, in englischer Literatur oft auch durch eine stilisierte Drahtwendel.



Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Schaltet man 2 Widerstände R_1, R_2 in *Reihe* hat diese Anordnung die gleiche Wirkung wie ein einzelner Widerstand R. Welche Größe hat dieser Ersatz- oder Gesamtwiderstand? Man denke sich jeden Widerstand aus je einem Streifen gleichen Querschnittes A und aus dem gleichartigen Leitermaterial mit dem spezifischen Widerstand ρ gefertigt. Lediglich die Längen l_1, l_2 sind unterschiedlich. Offensichtlich kann man beide Streifen durch einen einzigen mit der Länge $l = l_1 + l_2$ ersetzen, aus 2.9 folgt sofort $R = R_1 + R_2$.

Eine ähnliche Überlegung liefert den Ersatzwiderstand für eine *Parallel*schaltung von R_1 und R_2 . Hierzu kann man sich beide Widerstände aus jeweils gleich langen Streifen identischen Leitermaterials realisiert vorstellen, die aber unterschiedliche Querschnitte A_1, A_2 aufweisen. Diese Anordnung kann ersetzt werden durch einen analogen Leiter mit dem Querschnitt $A = A_1 + A_2$. Es addieren sich laut 2.9 somit bei Parallelschaltung die reziproken Widerstände $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$. Führt man diese Betrachtungen für mehr als zwei Widerstände durch, ergeben sich folgende Beziehungen für den Gesamtwiderstand von Widerständen in Reihen- sowie Parallelschaltung

$$\boxed{\text{Reihenschaltung: } R_{ges} = \sum R_i \text{ ; } \quad \text{Parallelschaltung: } R_{ges}^{-1} = \sum R_i^{-1}} \tag{2.10}$$

2.3. Elektrische Netzwerke - die KIRCHHOFF[16]schen Regeln

Als Netzwerk (Schaltung) bezeichnet man eine Zusammenstellung miteinander wechselwirkender elektronischer Bauelemente, die elektrische Energie erzeugen, leiten, speichern oder dissipieren (verbrauchen) können. Punkte, an denen mindestens drei Bauelemente miteinander verbunden sind, nennt man Netzwerk*knoten.* Vom Netzwerkknoten ausgehende Leiter heißen *Zweige.* Ein Weg, der nach Durchlaufen von mindestens zwei Zweigen an den Ausgangspunkt zurückführt, bildet eine geschlossene Schleife und wird als Netzwerk*masche* bezeichnet.

Wenn während der Zeit dt durch den Querschnitt eines Leiters die Ladungsmenge dQ fließt, so bezeichnet man dies als elektrischen Strom mit der Stromstärke

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} . \tag{2.11}$$

Verzweigt sich der Leiter, fließt diese Ladung i.a. zu ungleichen Teilen in die einzelnen Zweige, s. Abb. 2.3

$$I = \frac{\mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = I_1 + I_2 \tag{2.12}$$

[16] Gustav Robert KIRCHHOFF (1824-1887), dt. Physiker, Stromverteilungsregeln; Strahlungsgesetz; Spektralanalyse

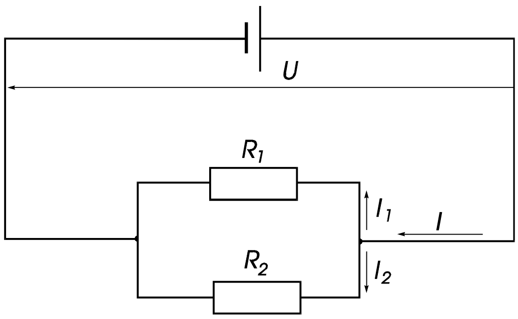


Abb. 2.3: Verzweigter Stromkreis

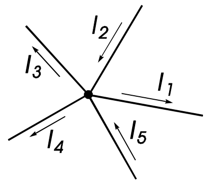


Abb. 2.4: Knoten

Es wird die Stromrichtung als positiv bezeichnet, bei der positive Ladungen zum Knoten hin fließen. Die Stromrichtung wird durch Pfeile verdeutlicht (der elektrische Strom ist aber keine vektorielle Größe!). Analog liegt eine negative Stromrichtung vor, wenn positive Ladungsträger vom Knoten wegfließen. Da keine Ladungen entstehen oder verschwinden, muss die Summe aller Teilströme an einem Knoten gleich Null sein. Diese Feststellung ist die 1. Kirchhoffsche Regel, der **Knotensatz**:

$\sum_k I_k = 0$ **Knotensatz** Die Summe aller elektrischen Stromstärken ist unter Beachtung der Vorzeichen an einem Knotenpunkt gleich Null.	(2.13)

In Abb. 2.5 ist eine Anordnung angegeben, bei der die Klemmen einer Stromquelle durch zwei hintereinandergeschaltete Widerstände verbunden sind. Die Spannung zwischen den Polen der Quelle wird gemessen. Außerdem sind aber auch an beiden Widerstände Voltmeter angeschlossen. Auch diese Voltmeter zeigen Ausschläge: Hierbei stellt man fest, dass für beliebige Werte der Widerstände die Beziehung $U = U_1 + U_2$ gilt. Analoge Experimente in verzweigten Netzwerken haben ein ähnliches Ergebnis zur Folge, das als 2. Kirchhoffsche Regel, auch als **Maschensatz**, bezeichnet wird.

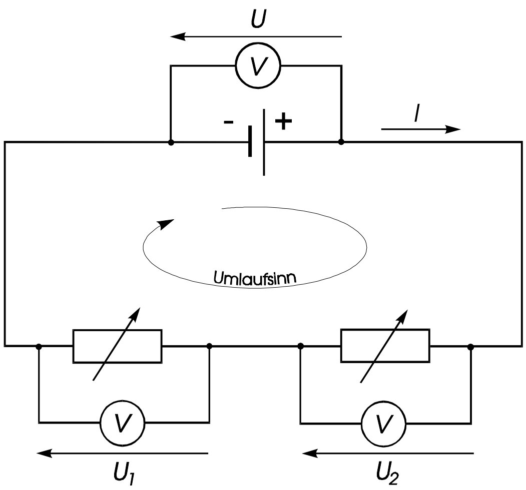


Abb. 2.5: Zur Kirchhoffschen Maschenregel

Richtungsfestlegungen:
1. Der elektrische Strom fließt durch den *äußeren* Stromkreis vom +Pol zum -Pol der Spannungsquelle, dann *innerhalb* der Spannungsquelle in der gleichen Richtung weiter, also vom -Pol zum +Pol.
2. Der Spannungsabfall hat die Richtung des Stromes im *äußeren* Stromkreis, also vom +Pol zum -Pol, *innerhalb* der Spannungsquelle die dem Strom entgegengesetzte Richtung, also ebenfalls vom +Pol zum -Pol.

Die an einer positiven Ladung verrichtete Arbeit ist bei deren Verschiebung innerhalb der Spannungsquelle, also von - nach + positiv, Die EMK (elektromotorische Kraft) "hebt" diese Ladung auf ein höheres Potential. Diese Energie wird während des Passierens der Ladung durch die Widerstände wieder als Wärme abgegeben. Die Vorzeichen dieser Arbeiten sind also negativ.
Legt man innerhalb der Masche einen Richtungssinn fest und bezieht auf diesen die Vorzeichen der Quellenspannungen U_{qi} und der an den Widerständen auftretenden Spannungsabfälle U_j, erhält man somit die folgende Beziehung:

$$\sum_i U_{q\,i} + \sum_j U_j = 0$$

Die Summe aller Quellenspannungen und Spannungsabfälle in einer Masche ist gleich Null. (2.14a)

Wir betrachten vorläufig Schaltungen mit Spannungsquellen und Ohmschen Widerständen. Die an letzteren auftretenden Spannungsabfälle sind nach dem Ohmschen Gesetz dem Strom proportional, von dem sie durchsetzt werden: $U_j = R_j\, I_j$. Da die U_j in Glg. 2.14a negativ sind, ist es bequemer, mit der umgestellten zu arbeiten:

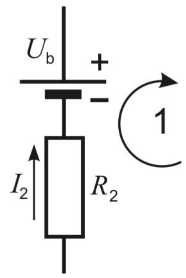
$$\sum_j R_j I_j = \sum_i U_{q\,i}$$ **Maschensatz**

Die Summe aller Quellenspannungen ist gleich der Summe der Spannungsabfälle in einer Masche. (2.14b)

Diese Gleichung hat den Vorteil einfacherer Handhabbarkeit bezüglich der Festlegung der Vorzeichen der Spannungsabfälle an den Widerständen. Diese hängen nämlich von der i.a. vorerst unbekannten Stromrichtung ab. Der Vergleich mit Abb. 2.5 zeigt, dass die $R_j I_j$ in Glg. 2.14b positiv gerade dann sind, wenn Stromrichtung und Umlaufsinn übereinstimmen.
Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln lassen sich für (nahezu beliebig komplizierte) Netzwerke lineare Gleichungssysteme aufstellen und durch deren Lösung unbekannte Größen bestimmen. Sind z.B. Urspannungen und Widerstände bekannt, können die Ströme über die einzelnen Widerstände und somit Spannungsabfälle berechnet werden. Sind ggf. Ströme und Spannungsabfälle bekannt, lassen sich die Urspannungen ermitteln usw. Im Folgenden werden wir einige Beispiele zur Anwendung der Kirchhoffschen Regeln rechnen. Hierbei ist es zweckmäßig, sich einen Algorithmus einzuprägen, der für alle Probleme dieser Art angewendet werden kann:

1. Kennzeichnung der Urspannungen sowie Ströme mit Angabe der Stromrichtung (willkürlich)
2. Bei N Knoten können maximal N-1 linear unabhängige Knotenregeln aufgeschrieben werden
3. Kennzeichnung von Maschen und Angabe des Umlaufssinns (willkürlich)
4. Vervollständigung des linearen Gleichungssystems durch Maschenregeln
5. Lösung des Gleichungssystems nach Standardmethoden der Linearen Algebra

Wenn wir nach dem angegebenen Schema verfahren, gilt es folgendes zu beachten:



1. Die Stromrichtungen an den Knoten sowie der Umlaufsinn in den einzelnen Maschen können willkürlich gewählt werden, hierbei ist es sinnvoll, soweit möglich, die Stromrichtungen in Übereinstimmung mit dem jeweiligen Umlaufsinn zu wählen. Es ist vorteilhaft, die Glg. 2.14b zu verwenden. Bei Stromrichtung in Umlaufsinn werden dann die Spannungsabfälle an den Widerständen positiv gerechnet (s. Skizze).
2. Urspannungen sind positiv, wenn der Umlaufsinn vom Minus- zum Plus- Pol (durch die Stromquelle) verläuft (s. Skizze). Die auf der rechten Seite der Gleichung 2.14b auftretenden Summanden werden dann positiv gerechnet (der sogenannte inhomogene Teil des entstehenden linearen Gleichungssystem erscheint dadurch gleich auf der rechten Seite der Gleichungen).

Übungen

2.1. Obwohl die Driftgeschwindigkeit von Elektronen in einem metallischen Leiter sehr klein ist, leuchtet eine elektrische Lampe fast sofort nach dem Schließen des Schalters auf. Erklären Sie dies.

2.2. Berechnen Sie mit den in den Tabellen 2.1. und 2.2. gegebenen Daten die Dichte der Leitungselektronen in Silber, Wismut und in Silizium.

2.3. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einem Silberdraht der Länge $d = 3{,}5$ m bei einer angelegten Spannung von $U = 1$ V.

2.4. Der **Ohm***sche Spannungsteiler*

Aufgabe: Mit Hilfe eines regelbaren Widerstandes (Potentiometer mit veränderlichem Mittelabgriff) kann ein einfacher Spannungsteiler aufgebaut werden. Man berechne die am Lastwiderstand abfallende Spannung.

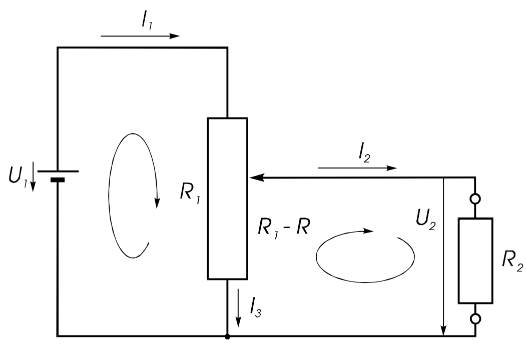


Abb. 2.6: Spannungsteiler mit Lastwiderstand

Lösung: In die Schaltung laut Abb. 2.6 werden Ströme und Spannungen eingetragen und der Umlaufsinn in jeder Masche gekennzeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall des *unbelasteten* Spannungsteilers. Das bedeutet, dass der Strom über den Lastwiderstand R_2 vernachlässigbar klein ist, also $I_2 << I_1$ bzw. $R_2 >> R_1 - R$. Dann gilt in guter Näherung

$$U_1 = I_1\, R_1$$
$$0 = U_2 - I_1\,(R_1 - R)\ ,$$

woraus folgt

$$\boxed{U_2 = U_1\,\frac{(R_1 - R)}{R_1}\quad \textbf{unbelasteter Ohmscher Spannungsteiler}} \qquad (2.15)$$

Wenn man dagegen den Spannungsteiler belastet, ist der Teilstrom I_2 zu berücksichtigen. Die Anwendung von Knoten- und Maschenregeln liefert folgendes Gleichungssystem:

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$U_1 = R\, I_1 + (R_1 - R)\, I_3$$
$$U_2 = R_2\, I_2 = (R_1 - R)\, I_3\ .$$

Die Kombination der drei Gleichungen ergibt folgenden Zusammenhang für den *belasteten* Ohmschen Spannungsteiler:

$$\underline{U_2 = U_1\,\frac{R_2(R_1 - R)}{R_2\, R_1 + R\,(R_1 - R)}}\ .$$

Es ist leicht zu sehen, dass beim Grenzübergang $R_2 \to \infty$ diese Beziehung in den Ausdruck für den *unbelasteten* Spannungsteiler übergeht.

2.5. Die* WHEATSTONE[17]*sche Brücke*

Man kann einen Widerstand messen, indem man gleichzeitig die an ihm abfallende Spannung U sowie den Strom I misst. Aus beiden Größen lässt sich dann nach dem Ohmschen Gesetz problemlos der Widerstand bestimmen . Diese Art der Widerstandsbestimmung ist aber aus mehreren Gründen recht ungenau. Einerseits verfälscht der Innenwiderstand der Messgeräte entweder Spannung oder Strom, andererseits treten systematische Fehler durch die begrenzte Genauigkeit der Messgeräte auf. Deshalb bedient man sich zur genaueren Widerstandsbestimmung häufig der sog. Wheatstoneschen Brücke. Hierbei wird der unbekannte Widerstand mit geeichten Widerständen verglichen. Da man stromlos misst, wird eine hohe Messgenauigkeit erreicht.

Aufgabe: Geben Sie für die abgeglichene Brücke die Größe des unbekannten Widerstandes R_3 an.

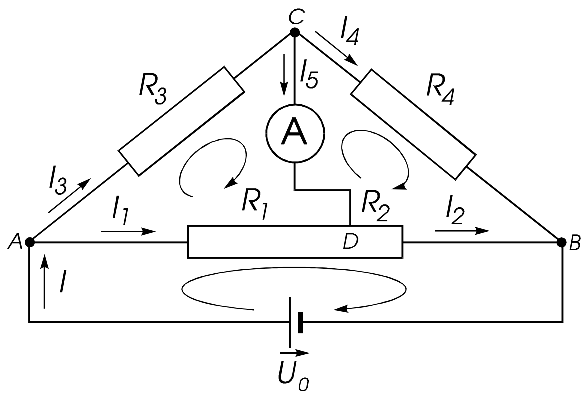


Abb. 2.7: Wheatstonesche Brücke

Der sogenannte Abgleich der Brücke erfolgt durch Variation von R_1 und R_2, bis über das Amperemeter kein Strom mehr fließt. Im unabgeglichenen Betrieb ist der Innenwiderstand R_5 des Strommessgerätes zu berücksichtigen.

Lösung: Den verstellbaren Widerstand verändert man solange, bis durch das Messgerät kein Strom mehr fließt. Dies ist der Fall wenn die Spannung zwischen den Punkten C und D verschwindet, d.h. die Spannungsabfälle an R_3 und R_1 sind gleich, somit auch die Spannungsabfälle an R_4 und R_2. Für diesen Fall der abgeglichenen Brücke lässt sich unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln leicht eine Beziehung für den unbekannten Widerstand R_3 aufschreiben. Wir kennzeichnen hierzu wieder die einzelnen Ströme und legen die Umlaufrichtungen für die einzelnen Maschen fest (s. Abb. 2.7). Aus der Anwendung von Knoten- und Maschenregeln ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} \text{A)} & I - I_1 - I_3 = 0 & \text{D)} & R_1\, I_1 + R_2\, I_2 = U_0 \\ \text{B)} & I_3 - I_4 - I_5 = 0 & \text{E)} & R_3\, I_3 + R_5\, I_5 - R_1\, I_1 = 0 \\ \text{C)} & I_1 + I_5 - I_2 = 0 & \text{F)} & R_4\, I_4 - R_2\, I_2 - R_5\, I_5 = 0 \end{array}$$

Für die abgeglichene Brücke ($I_5 = 0$) gilt dann :

$$\begin{array}{lllll} \text{B)} & I_3 = I_4 & & \text{E)} & R_3\, I_3 = R_1\, I_1 \\ & & \text{und} & & \\ \text{C)} & I_1 = I_2 & & \text{F)} & R_4\, I_4 = R_2\, I_2 . \end{array}$$

Aus der Division der Gleichungen E) und F) folgt dann schließlich $\underline{R_3 = R_4 \dfrac{R_1}{R_2}}.$

Somit hat man R_3 auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Da die Messung über den *Null*abgleich des Strommessers durchgeführt wird, ist die Güteklasse des Messgerätes von untergeordneter Bedeutung. Weiterhin ist die Spannung U der Spannungsquelle unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken. Hieraus folgt, dass die Wheatstone-Brücke gleichermaßen für Wechselstrom geeignet ist. Später werden wir sehen, wie sich mit ähnlichen Schaltungen auch Kapazitäten, Induktivitäten und Frequenzen sehr genau messen lassen.

[17] Sir Charles WHEATSTONE (1802-1875), engl. Physiker; Musikinstrumentenhersteller; Optik (Stereoskop); Ausbreitung elektrischer Signale auf Leitungen

2.6.* In der Schaltung nach Abb. 2.8 ist der Wert von I_2 gesucht.

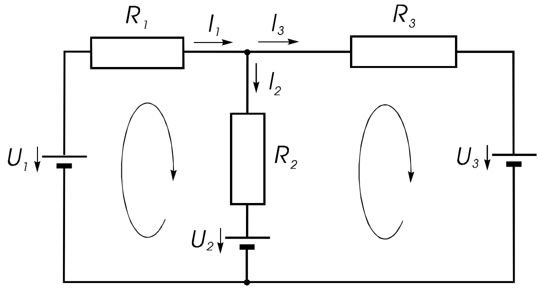


Abb. 2.8: Widerstandsnetzwerk

$$\begin{array}{ll} U_1 = 2V & R_1 = 4\Omega \\ U_2 = 4V & R_2 = 6\Omega \\ U_3 = 6V & R_3 = 8\Omega \end{array}$$

Lösung: Nach der Bezeichnung von Strömen, Spannungen und Angabe des jeweiligen Umlaufsinns ergibt die Anwendung der Knoten- und der Maschenregel folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_2\ R_2 + I_3\ R_3 &= U_2 - U_3 \\ I_1\ R_1 + I_2\ R_2 &= U_1 - U_2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} I_3\ R_3 &= U_2 - U_3 + I_2\ R_2 \\ (I_2 + I_3)\ R_1 + I_2\ R_2 &= U_1 - U_2 \end{aligned}$$

Umstellen nach I_3 und Einsetzen in die letzte Gleichung ermöglicht die Separation von I_2

$$I_3 = (U_2 - U_3 + I_2\ R_2)\ /\ R_3$$

$$\left(I_2 + (U_2 - U_3 + I_2\ R_2)\ /\ R_3\right)\ R_1 + I_2\ R_2 = U_1 - U_2$$

$$I_2 = \frac{U_1 - U_2 + (U_3 - U_2)R_1\ /\ R_3}{R_1 + R_2 + R_1R_2\ /\ R_3} = \frac{(U_1 - U_2)\ R_3 + (U_3 - U_2)R_1}{(R_1 + R_2)\ R_3 + R_1R_2}\ .$$

Erst jetzt (also nachdem ein Ausdruck gefunden wurde, bei dem die gesuchte Größe als Funktion von bekannten Größen dargestellt ist) werden die gegebenen Werte für Widerstände und Urspannungen eingesetzt:

$$I_2 = \frac{(2\text{V} - 4\text{V})\ 8\Omega + (6\text{V} - 4\text{V})\ 4\Omega}{(4\Omega + 6\Omega)\ 8\Omega + 4\Omega\ 6\Omega} = \frac{-16 + 8}{80 + 24} \cdot \frac{\text{V}}{\Omega} = \underline{\underline{-77\ \text{mA}}}.$$

Das im Ergebnis auftretende Minuszeichen bedeutet, dass die wahre Stromrichtung von I_2 der in Abb.2.7 willkürlich gewählten entgegengesetzt ist.

2.7.* Für das in Abb. 2.9 dargestellte Netzwerk sind die Ströme über die einzelnen Widerstände zu berechnen!

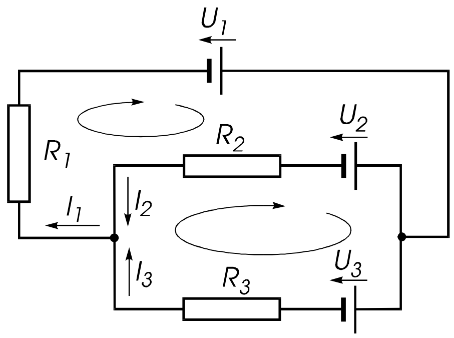


Abb. 2.9: Widerstandsnetzwerk

Lösung: Nach der Bezeichnung von Strömen und Festlegung der Umlaufrichtungen erhalten wir wieder durch Anwendung von Knoten- und Maschenregeln das Gleichungssystem für das Netzwerk:

$$\begin{array}{rcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U_1 - U_2 \\ & - & R_2 I_2 & + & R_3 I_3 & = & U_2 - U_3 \end{array}$$

Die drei Gleichungen wurden diesmal nach den drei Unbekannten I_1, I_2, I_3, so geordnet aufgeschrieben, dass ihre jeweiligen Koeffizienten deutlich werden und die Absolutglieder auf der rechten Seite stehen. Sie sollen jetzt mit einer sehr rationellen Methode zur Lösung dieser Art von Gleichungssystemen bekanntgemacht werden. Hierzu ist es bequem, diese Gleichungen in der sogenannten *Matrixschreibweise* aufzuschreiben. Dabei bilden die Koeffizienten die Elemente einer quadratischen Matrix, der *Koeffizientenmatrix*. Die Variablen und der inhomogene ("rechte") Teil sind in Spaltenvektoren enthalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}$$

Die Lineare Algebra bietet Lösungsalgorithmen für derartige Gleichungssysteme, die es gestatten, auch äußerst komplexe Netzwerke zu berechnen. Bei einfacheren Systemen, wie dem vorliegenden Beispiel, ist es trotzdem vorteilhaft, sich dieser Methoden zu bedienen, da bei Anwendung von festen Lösungsschemata Fehler eher vermieden werden. Außerdem wird die Struktur des Gleichungssystems weitgehend erhalten, so dass die Ergebnisse meist ohne große Umformungen kompakt sind. Zur Bestimmung von I_1, I_2 und I_3 wollen wir die CRAMER[18]sche Regel anwenden (siehe Anhang). Hierzu ist es notwendig, die *Determinante D* der Koeffizientenmatrix zu berechnen. Man erhält:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3$$

Wir bezeichnen mit D_j diejenige Determinante, die entsteht, wenn die *j*-te Spalte von *D* durch die Elemente des Spaltenvektors der Konstanten ("Rechte Seite") ersetzt wird:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ U_1 - U_2 & R_2 & 0 \\ U_2 - U_3 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 (U_1 - U_2) + R_2 (U_2 - U_3) + R_3 (U_1 - U_2)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U_1 - U_2 & 0 \\ 0 & U_2 - U_3 & R_3 \end{vmatrix} = R_3 (U_1 - U_2) + R_1 (U_3 - U_2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & U_1 - U_2 \\ 0 & -R_2 & U_2 - U_3 \end{vmatrix} = R_2 (U_2 - U_3) + R_1 (U_2 - U_3) + R_2 (U_1 - U_2)$$

Damit erhalten wir für die Teilströme folgende Ausdrücke:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{R_2\,(U_1 - U_2) + R_2\,(U_2 - U_3) + R_3\,(U_1 - U_2)}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{R_3\,(U_1 - U_2) + R_1\,(U_3 - U_2)}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}$$

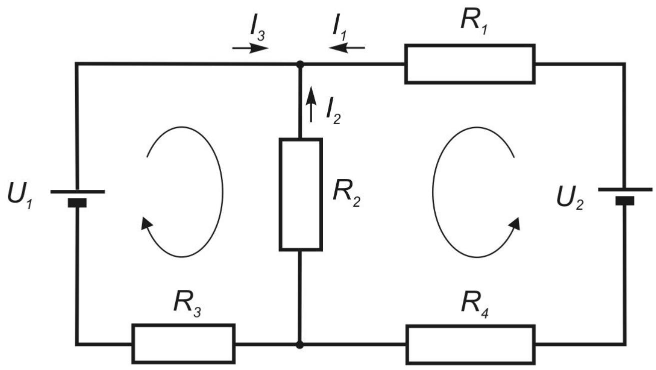
$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{R_2\,(U_2 - U_3) + R_1\,(U_2 - U_3) + R_2\,(U_1 - U_2)}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}$$

[18] Gabriel CRAMER (1704-1752) Schweizer Mathematiker und Philosoph

Die Vorteile der Anwendung der Cramerschen Regel werden offensichtlich, wenn man versucht, analytische Lösungen für noch kompliziertere Netzwerke zu gewinnen. Größere Gleichungssysteme durch Umstellen und Einsetzen aufzulösen, führt zunächst zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken und es eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten für Rechenfehler. Dagegen können Determinanten leicht vereinfacht werden, insbesondere enthalten Quotienten der Art D_j/D oft gemeinsame Teiler, so dass effektiv gekürzt werden kann, was sich in einer kompakten Form der Ergebnisse widerspiegelt.

In der Vorlesung "Lineare Algebra" werden Sie die Grundlagen für diese und ähnliche rationelle Verfahren (Gaußsches Eliminationsverfahren, Gauß-Jordan-Algorithmus) zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen kennenlernen. Sollten Sie schon jetzt Interesse verspüren, können Sie sich im Anhang A2 "Die Cramersche Regel" hierüber etwas ausführlicher informieren.

2.8.* Wie groß muss die Spannung U_1 sein, damit über den Widerstand R_2 ein Strom von 0,5A (in der angegebenen Richtung) fließt?



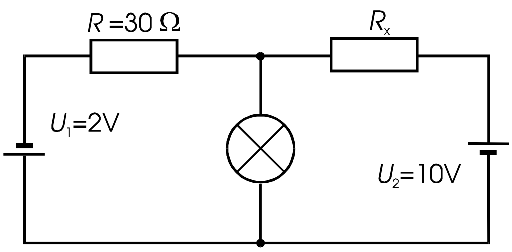
$R_2 = 2\,\Omega$ $\quad U_2 = 2V$

$R_3 = 4\,\Omega$ $\quad I_2 = 0{,}5\,A$

$R_4 = 1\,\Omega$ $\quad R_1 = 1\,\Omega$

Ergebnis: U_1 = -9V, d.h. die Spannungsquelle U_1 muss umgepolt werden!

2.9.*Auf der Abb. ist ein Gleichspannungsnetzwerk dargestellt. Die Glühlampe trägt am Sockel die Inschrift „6V 2,4 W“. Berechnen Sie (unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln!) den Wert des Widerstandes R_x, der notwendig ist, damit das Lämpchen optimal leuchtet.



Richtiges Ergebnis: $R_x = 6\ \Omega$

Wenn Sie zunächst einen Wert R_x = -30 Ω ermittelt haben, hatten Sie die Stromrichtung von I_2 falsch gewählt, Sie müssen dann mit negativem I_2 die Berechnung von R_x wiederholen.