A 2 Die Cramersche Regel

A2.1 Matrixschreibweise eines linearen Gleichungssystems

Wir gehen von der allgemein Gestalt eines linearen Gleichungssystems aus :
Gegeben seien $m \cdot n$ (reelle oder komplexe) Zahlen a_{ik} ($i = 1, 2,..., m$; $k = 1, 2 ,..., n$) sowie m Zahlen b_i ($i = 1, 2 ,..., m$).

Gesucht sind n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so dass gilt
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Die Zahlen a_{ik} sind die Koeffizienten des Gleichungssystems, die gesuchten Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ werden auch als Unbekannte bezeichnet. Die Lösung des Gleichungssystems besteht in der Bestimmung der x_k.
Zur Illustration wollen wir das Gleichungssystem von Beispiel 2.4 betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U_1 - U_2 \\ & & -R_2 I_2 & + & R_3 I_3 & = & U_2 - U_3 \end{array} .$$

Hier sind R_1, R_2, R_3 die Koeffizienten a_{ik} und I_1, I_2, I_3 stellen die Unbekannten x_k dar.

Definition : Ein rechteckiges Schema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ von $m \cdot n$ Zahlen a_{ij}, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind , heißt $(m \times n)$- *Matrix* . Die a_{ij} sind die Elemente der Matrix. Matrizen werden meist mit Großbuchstaben ***A, B, C***,... bezeichnet.

Eine $(1 \times n)$ - Matrix hat die Gestalt $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$, man sprich von einem *Zeilenvektor*, eine $(m \times 1)$- Matrix hat die Gestalt $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, man nennt diese auch *Spaltenvektor.*

Wir können Spalten- bzw. Zeilenvektoren in einer Matrix durch zusätzliche Klammern hervorheben. Für eine (2×2)-Matrix erhalten wir $\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right)$ bzw. $\begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12}) \\ (a_{21} & a_{22}) \end{pmatrix}$.

Definition: Sei $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \le i \le m)$ ein System linearer Gleichungen. Die $(m \times n)$ - Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ heißt *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems.

Unser oben angegebenes Netzwerk hat z.B. die (3×3) - Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}$.

Für die Verknüpfung von Matrizen gibt es bestimmte Regeln. Uns interessiert das Produkt von Matrizen.

Sei $\boldsymbol{A}$ eine $(m \times n)$ - Matrix (m Zeilen, n Spalten) mit den Elementen a_{ij} und $\boldsymbol{B}$ eine $(n \times r)$ - Matrix mit den Elementen b_{kl}. Die Produktmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ist eine $(m \times r)$ - Matrix mit den Elementen $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ $(1 \le i \le m; 1 \le k \le r)$. Schreiben wir die einzelnen Elemente von $\boldsymbol{C}$ auf, erhalten wir

$$\mathbf{C} = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jr} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{jr} \end{pmatrix}$$

Hieraus können wir eine Faustregel für die Matrizenmultiplikation erkennen: <u>Zeile mal Spalte</u>. Beachtet werden muss, dass i.a. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, d. h. das Matrixprodukt ist <u>nicht</u> kommutativ .

Betrachten wir zur Übung einige Beispiele:

Seien $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir versuchen jetzt, alle möglichen Produkte zu bilden. $\boldsymbol{A}$ ist eine (4×2) - Matrix, $\boldsymbol{B}$ eine (3×4)- und $\boldsymbol{C}$ eine (4×1) - Matrix. Also sind nach der Regel zur Multiplikation von Matrizen (<u>Spaltenzahl von $\boldsymbol{A}$ = Zeilenzahl von $\boldsymbol{B}$</u>) nur die Kombinationen $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ erlaubt:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Matrizenmultiplikation erlaubt uns jetzt eine rationelle Schreibweise für lineare Gleichungssysteme:
Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ die Koeffizientenmatrix und $\boldsymbol{X} = (x_k)$ ein Spaltenvektor mit den Unbekannten als Matrixelemente. $\boldsymbol{B}$ sei ein Spaltenvektor, dessen Elemente b_k den 'rechten Teil' (die Konstanten) der Gleichungen enthalten. Dann gilt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. Somit haben wir das Gleichungssystem durch eine einzige Gleichung ausgedrückt. In unserem Beispiel hat diese die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}.$$

A2.2 Determinanten

Jeder quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ (Zeilenzahl = Spaltenzahl) kann eine für die Lösung linearer Gleichungssysteme wichtige Größe zugeordnet werden, die Determinante $\det \boldsymbol{A}$. Ohne Angabe der allgemeinen Definition der Determinante (das behandeln Sie in der Linearen Algebra) wollen wir zeigen, wie man diese berechnen kann. Der Wert einer zweireihigen Determinanten ergibt sich einfach aus der Differenz der Produkte der *Haupt-* und *Nebendiagonalelemente*. Eine dreireihige Determinante zu berechnen ist komplizierter. Es ergibt sich eine Summe aus 6 Produkten. Achtet man auf die Struktur der einzelnen Summanden (zyklische Vertauschung der Indizes), kann man sich auch noch diese Lösung merken (vergl. SARRUS*sche Regel*):

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \,, \qquad D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} u_1 \cdot (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \\ +u_2 \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) \\ +u_3 \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{matrix}$$

Noch größere Determinanten sollte man vor der expliziten Berechnung vereinfachen. Hierzu sind die für Determinanten charakteristischen Eigenschaften auszunutzen:

1. Die Determinante ist linear in jeder Zeile
a) man kann einen Faktor, der in allen Elementen einer Zeile auftritt, "herausziehen", d.h. als Faktor vor die Determinante schreiben;
b) lassen sich die Elemente einer Zeile als Summen darstellen, so lässt sich auch die Determinante als Summe darstellen, wobei alle anderen Zeilen ungeändert bleiben;

Beispiel: a)
$$\begin{vmatrix} a \cdot u_1 & a \cdot u_2 & a \cdot u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + p_1 & v_2 + p_2 & v_3 + p_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2. Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen;
3. Durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten ändert sich die Determinante nicht;
4. Die Determinante ist gleich Null bei linearer Abhängigkeit ihrer Zeilen, d.h. speziell, wenn zwei Zeilen gleich sind (oder aus Nullen bestehen);
5. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem konstanten Faktor multiplizierten Elemente einer anderen Zeile addiert.
6. Eine Determinante lässt sich nach den Elementen einer Zeile oder Spalte *entwickeln*, $D=a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$. Die A_{ij} sind die sog. *Adjunkte* der Elemente a_{ij}, sie sind die mit einem Vorzeichen versehenen *Unterdeterminanten* der Ordnung (n-1), die durch Streichen der Zeile i und der Spalte j aus der ursprünglichen entstehen. Diese wichtige Eigenschaft der Determinanten ermöglicht die sukzessive Rückführung auf einfachere Determinanten (<u>niederer</u> Ordnung)!

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots & a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Für die Determinante 3. Ordnung erhalten wir nach dieser Regel bei Entwicklung nach der ersten Zeile:
$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},$$
was mit dem oben angegebenen Ausdruck für die Determinante übereinstimmt, wenn man die 3 Unterdeterminanten explizit ausrechnet.

Beispiel : Die Determinante der Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
ist zu berechnen. Um es uns so einfach wie möglich zu machen, wählen wir diejenige Zeile oder Spalte aus, die die meisten Nullen enthält und entwickeln nach dieser. Im betrachteten Fall ist es die zweite Zeile:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Beachten Sie, dass der erste Faktor (-1) vor der Unterdeterminante des ersten Summanden von der Vorzeichenregel $(-1)^{i+j}$ herrührt, der zweite Faktor (-1) ist der Koeffizient a_{21} der Matrix **A**. Die Unterdeterminanten dritter Ordnung lassen sich weiter aufspalten. Die erste dieser Determinanten berechnen wir durch Entwicklung nach der dritten Spalte und die zweite durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot\left(4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\right) + 1\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) = -56+11-14+15 = \underline{-44}.$$

Jetzt wollen wir die Berechnung dieser Determinante noch einmal durchführen, wobei wir die ursprüngliche Struktur durch Umformen zunächst vereinfachen.

Wir addieren die letzte Spalte zur ersten: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ und subtrahieren die

zweite und dritte Spalte von der ersten: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-4)(8+3) = \underline{-44}$

A2.3 Die Cramersche Regel

Satz: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, wobei die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ quadratisch ist und es gilt $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Dann hat das Gleichungssystem die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ mit } x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}} \text{ für } i = 1,2,\ldots,n$$

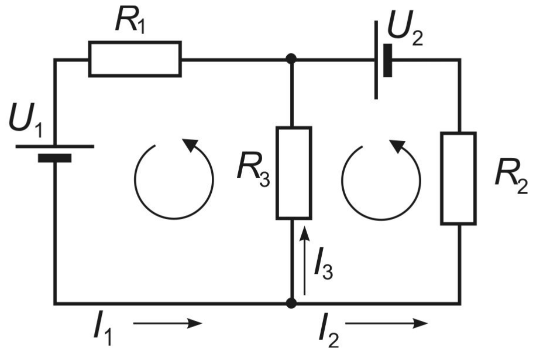
Dabei ist $\boldsymbol{A}_i$ diejenige Matrix, die man erhält wenn man die i-te Spalte von $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{B}$ ersetzt .

Wir ersehen aus der Cramerschen Regel, dass sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems auf die Berechnung von Determinanten reduzieren lässt. Dies soll an einfachen Beispielen geübt werden.

Beispiele:
Sie sollten zunächst versuchen, den Lösungsweg für das oben angegebene Beispiel ***2.6.*** nachzuvollziehen. Haben Sie dabei Schwierigkeiten, hilft Ihnen ein weiteres einfaches Beispiel.
Wir wollen hierbei wieder die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen, das aus der Anwendung der Kirchhoffschen Regeln auf ein Netzwerk entstanden ist:

2.14.* In der folgenden Schaltung sind die Werte von I_1, I_2 und I_3 gesucht.

$$U_1 = 110V \qquad R_1 = 100\,\Omega$$
$$U_2 = 220V \qquad R_2 = 100\,\Omega$$
$$R_3 = 500\,\Omega$$



Die Anwendung der Kirchhoffschen Regeln liefert

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & & & + & R_3 I_3 & = & -U_1\,; \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & U_2 \end{array}$$

Das Gleichungssystem wird in Matrixschreibweise aufgeschrieben: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die Determinante der Koeffizientenmatrix:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & R_3 \\ R_2 & -R_3 \end{vmatrix} - R_1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot (R_3 + R_2) = -R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2$$

Nun bestimmen wir die drei Matrizen $\boldsymbol{A}_i$, indem wir die i-te Spalte der Koeffizientenmatrix durch den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ ersetzen und berechnen dann deren Determinanten. Wir entwickeln die drei Determinanten jeweils nach der ersten Zeile

$$\det \boldsymbol{A}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -U_1 & 0 & R_3 \\ U_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -U_1 & R_3 \\ U_2 & -R_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -U_1 & 0 \\ U_2 & R_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 + U_1 \cdot R_2$$

$$\det \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -U_1 & R_3 \\ 0 & U_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -U_1 & R_3 \\ U_2 & -R_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_1 & -U_1 \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_1$$

$$\det \boldsymbol{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & -U_1 \\ 0 & R_2 & U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -U_1 \\ R_2 & U_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 & -U_1 \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_2 + U_2 \cdot R_1$$

und können jetzt nach der Cramerschen Regel die Lösungen des Gleichungssystems angeben:

$$I_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 + U_1 \cdot R_2}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110V \cdot 500\Omega - 220V \cdot 500\Omega + 110V \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{0.4A}}$$

$$I_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_1}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110V \cdot 500\Omega - 220V \cdot 500\Omega - 220V \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{0.7A}}$$

$$I_3 = \frac{\det \boldsymbol{A}_3}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{U_1 \cdot R_2 + U_2 \cdot R_1}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110V \cdot 100\Omega + 220V \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{-0.3A}}.$$

Das Minuszeichen von I_3 zeigt, dass die Richtung des Stromes I_3 entgegengesetzt zur willkürlich gewählten Stromrichtung verläuft.