

3. Das Magnetfeld

3.1. Das statische Feld eines Permanentmagneten

Magnetische Kraftwirkungen sind seit langem bekannt, so die Anziehungskräfte zwischen Eisen und bestimmten Steinen, wie Magnetit (31,03% FeO, 68,97% Fe₂O₃) und Magnetkies (Fe_{1-x}S mit x = 0 bis 0,17). Eine erste praktische Nutzung der Eigenart, dass sich drehbar gelagerten Magneten selbstständig in die Nord-Süd-Richtung der Erde ausrichten, ist aus China im 4. Jh. bekannt (Orientierungshilfe bei Landreisen). In Europa wurde der Kompass im 13. Jhdt. eingeführt. PEREGRINUS²⁴ erkannte, dass magnetische Körper stets zwei Pole besitzen. Bei geeigneter Lagerung dreht sich der eine Pol nach Norden, der andere nach Süden. Der Magnet erfährt im Magnetfeld der Erde ein Drehmoment, welches von der gegenseitigen Orientierung abhängt. Genauer untersucht wurden Kompass und Magnetfeld für die Belange der englischen Seefahrt im 16. Jh. von GILBERT. Als viel später OERSTEDT²⁵ entdeckte, dass Magnetfelder auch durch elektrische Ströme verursacht werden können, wurde die Untersuchung des Magnetismus zu einem Hauptgegenstand von Naturforschern, Physikern und Technikern.

Bringt man zwei magnetische Körper in unmittelbare Nachbarschaft, bemerkt man Wechselwirkungen, die Analogien zu elektrischen Dipolladungen aufweisen.

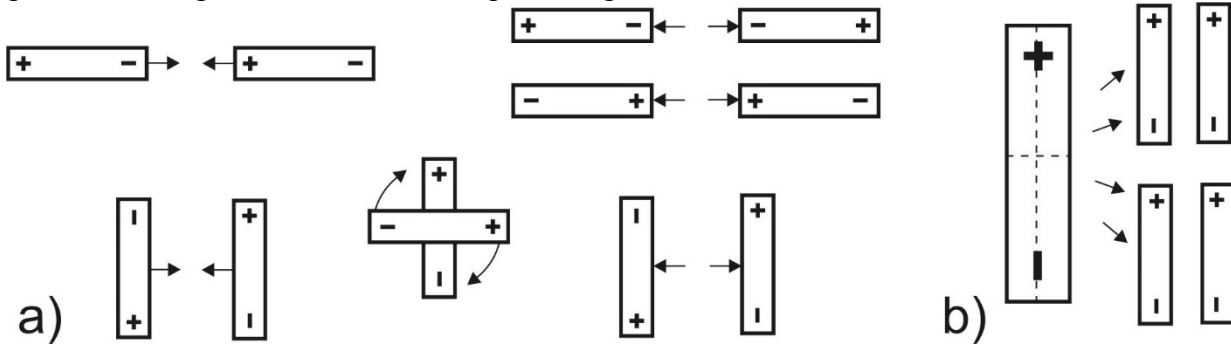


Abb. 3.1a) Wechselwirkung zwischen Dipolen b) Teilung von magnetischen Dipolen

Ähnlich wie elektrische Dipole üben benachbarte Magnete je nach ihrer Orientierung anziehende und abstoßende Kräfte sowie Drehmomente aufeinander aus. Da diese Eigenschaft gerichtet ist und den Raum um einen Magneten erfüllt, handelt es sich um ein Vektorfeld. Im Unterschied zu elektrischen Dipolen bewahren magnetische Dipole nach einer mechanischen Teilung stets ihren Dipolcharakter!

Ebenso wie bei elektrischen Ladungen addieren sich die Felder mehrerer Magneten. Wenn man einen Magneten teilt, reproduziert sich jedoch der Dipolcharakter, es entstehen zwei weitere Dipole. Letztendlich musste man erkennen, dass selbst Elementarteilchen wie Elektron, Proton und Neutron Miniaturmagnete darstellen, magnetische "Monopole" konnten trotz intensiver Suche bisher nicht beobachtet werden.

Das Drehmoment, welches ein Magnet im Feld eines anderen Magneten erfährt, erklärt das Prinzip eines Magnetkompasses. Die Erde ist nämlich von einem Magnetfeld umgeben, so, als enthielte sie im Innern einen gewaltigen Stabmagneten in Richtung ihrer Rotationsachse. Ein drehbar gelagerter Magnet zeigt deshalb auf der Erdoberfläche stets in die gleiche Richtung. Dasjenige Ende eines solchen Stabmagneten, der in Richtung geografischer Nordpol der Erde zeigt, wird deshalb als sein magnetischer Nordpol bezeichnet, das andere Ende als magnetischer Südpol. Da dieses in Richtung Südpol der Erde zeigt, befindet sich dort der magnetische Nordpol der Erde. Aus diesem Grund bezeichnet man beide Pole des Magneten mit "N" bzw. "S" und nicht mit "+" und "-" wie bei den elektrischen Ladungen. Erwähnt werden muss hier, dass die Ausrichtung der Magnetpole der Erde nicht genau mit der Erdachse übereinstimmt und darüber hinaus zeitlichen Schwankungen unterliegt. So praktisch die Einführung der Vorzeichen bei elektrischen Ladungen ist, so wenig stört der Verzicht hierauf beim Magneten. Die Bezeichnung mit Nord- und Südpol gibt nur eine Qualität an. Da man

²⁴ Petrus PEREGRINUS, frz. Gelehrter um 1269

²⁵ Hans Christian OERSTEDT (1777-1851), dän. Physiker und Chemiker; Elektromagnetismus; Kompression von Wasser

die Magnetpole nicht voneinander isolieren kann, gibt es auch keine Quantität von magnetischen Ladungen, wohl aber die des magnetischen Dipols.

Die Stärke und Ausrichtung eines Magneten wird durch sein Dipolmoment²⁶ $\vec{m}_C$ dargestellt, das Magnetfeld selbst durch die magnetische Feldstärke $\vec{H}$. Eine Kompassnadel ist als Probemagnet geeignet, Betrag und Richtung der Feldstärke zu messen. Für das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld gilt nämlich (vergl. 1.2b)

$$\vec{M} = \vec{m}_C \times \vec{H}, \quad [\vec{m}_C] = \text{Vs m}, \quad [\vec{H}] = \text{A m}^{-1} \quad (3.1)$$

und für dessen Betrag $M = m_C H \sin\alpha$, wobei α der Winkel zwischen $\vec{m}_C$ und $\vec{H}$ ist. Wenn die Kompassnadel ausgependelt ist, zeigt sie folglich die Richtung von $\vec{H}$ an, verdreht man sie darauf senkrecht, ist das rückdrehende Moment maximal und kann mit einer Torsionsfeder gemessen werden. Jedem Punkt im Raum, welcher von einem Magnetfeld durchsetzt wird, kann somit der Wert von $\vec{H}$ in Betrag und Richtung zugeordnet werden.

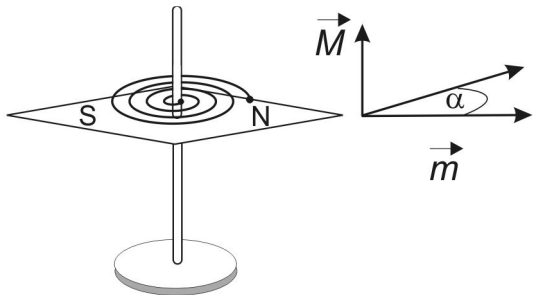


Abb. 3.2 Kompassnadel im Magnetfeld

Ein Körper mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}_C$ erfährt im Magnetfeld $\vec{H}$ ein Drehmoment $\vec{M}$. In Ruhelage zeigt der Nordpol des Permanentmagneten in Richtung des Magnetfeldes. Bei senkrechter Ausrichtung ist das Drehmoment maximal. Mit einer solchen Anordnung eines Probemagneten lässt sich somit das Magnetfeld in Betrag und Richtung messen.

Verschiebt man eine eingestellte Kompassnadel in Richtung N, folgt man damit einer magnetischen Feldlinie. Die Feldlinien quellen aus dem magnetischen Nordpol und enden im Südpol. Ganz analog zum elektrostatischen Feld ist das Magnetfeld eines Permanentmagneten ein Quellenfeld.

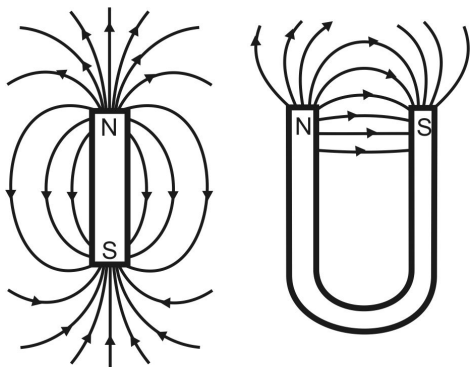


Abb. 3.3 Feldlinien von Permanentmagneten

Die magnetischen Feldlinien verlaufen vom Nord- zum Südpol des Magneten. Das magnetische Feld eines Permanentmagneten ist analog zum elektrostatischen Feld ein wirbelfreies Quellenfeld.

Ähnlich wie das elektrostatische Feld ist auch das Magnetfeld um einen Permanentmagneten ein konservatives Feld, es gilt die Beziehung

$$\oint \vec{H}(\vec{s}) d\vec{s} = \oint H(s) \cos \alpha(s) ds = 0. \quad (3.2)$$

Hier stellt $d\vec{s}$ einen infinitesimalen Verschiebungsvektor dar, welcher skalar mit dem Magnetfeldvektor $\vec{H}$ zu multiplizieren ist; α ist der Winkel zwischen beiden Vektoren. Wählt man den Integrationsweg so, dass er durch beide Magnetpole verläuft, wobei ein Teilweg außerhalb, der andere durch den Magneten führt, fordert (3.2), dass auch innerhalb des Magneten ein H -Feld vorhanden ist. Da bei einem Stabmagneten der äußere Weg länger ist als der innere, sollte das innere Feld stärker sein als das äußere.

²⁶ Wegen seiner Analogie zum elektrischen Dipolmoment bezeichnet man m_C auch als Coulombsches magnetisches Moment.

3.2. Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter

Fließt elektrischer Strom durch einen Leiter, kann man ähnliche Beobachtungen machen wie bei einem Permanentmagneten. Der Stromfluss erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien mit einem Probepol untersucht werden können. Im Fall eines langen geraden Leiters umgeben die Magnetfeldlinien als konzentrische Kreise den Leiter, s. Abb. 3.4. Da die Feldlinien geschlossen sind, handelt es sich hierbei aber um ein *Wirbelfeld*. Die Richtung der Feldlinien lässt sich leicht nach der *Rechte Hand Regel* ermitteln. Wenn man die rechte Hand so ausrichtet, dass der Daumen in Stromrichtung zeigt, umschließen die Finger den Leiter in Richtung der Feldlinien.

Es soll jetzt geprüft werden, ob die Anwendung der Gleichung 3.2 bei einem durch Stromfluss hervorgerufenen Magnetfeld ein sinnvolles Ergebnis liefert. Hierbei wird zur Integration ein Weg gewählt, der aus zwei konzentrischen Kreisbögen mit den Radien R_i und R_a sowie dem gleichen Öffnungswinkel α besteht. Es ist zweckmäßig, die Integration um einen solchen Kreisringsektor in 4 Abschnitte aufzuteilen

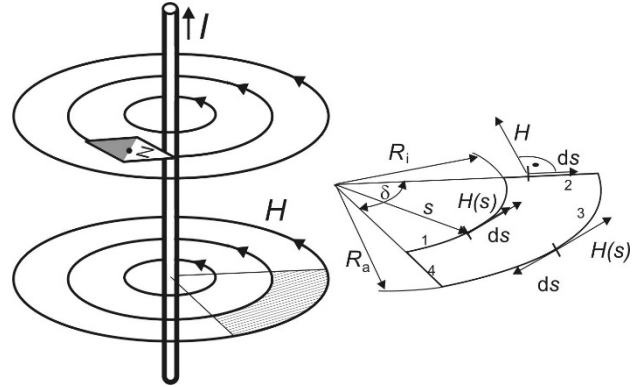
$$\oint H \cos \alpha \, ds = \int_1 H \cos \alpha_1 \, ds + \int_2 H \cos \alpha_2 \, ds + \int_3 H \cos \alpha_3 \, ds + \int_4 H \cos \alpha_4 \, ds. \quad (3.3)$$

Sofort wird ersichtlich, dass das Skalarprodukt auf den Teilstrecken 2 und 4 keinen Beitrag liefert, da Verschiebung und Magnetfeld senkrecht zueinander orientiert sind. Auf den Teilstrecken 1 und 3 beträgt der Winkel zwischen Verschiebung und Magnetfeld 0° sowie 180° , es folgt

$$\oint H(s) \cos \alpha \, ds = \int_1 H(R_i) \, ds - \int_3 H(R_a) \, ds. \quad (3.4)$$

Abb. 3.4 Magnetfeld um einen geraden stromdurchflossenen Leiter.

Die Feldlinien sind konzentrische Kreise um den Leiter. Mit einer Kompassnadel lässt sich die Richtung der Feldlinien bestimmen. Die schraffiert dargestellte Fläche eines Kreisringsektors mit einem Öffnungswinkel δ , deren Begrenzung den Integrationsweg bildet, ist daneben vergrößert dargestellt. Der Integrationsweg besteht aus Teilstücken mit $\vec{H}(\vec{s}) \perp \vec{s}$ sowie $\vec{H}(\vec{s}) \parallel \vec{s}$.



Hier ist zu bemerken, dass der Betrag des Magnetfeldes aus Gründen der Zylindersymmetrie der Anordnung nur vom Abstand zum Draht abhängt, nicht jedoch von der Integrationsvariablen s . Somit ist das Feld bezüglich s konstant und kann vor das Integral geschrieben werden. Die verbleibenden Integrale entsprechen den Längen der beiden Kreisbögen

$$\oint H \cos \alpha \, ds = H(R_i) R_i \delta - H(R_a) R_a \delta = 0. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung kann nur für eine Abhängigkeit $H(R) \propto \frac{1}{R}$ erfüllt werden. Weiterhin muss gelten

$H \propto I$. Als Proportionalitätskonstante wählt man den Vollkreiswinkel 2π , so dass für den Betrag des Magnetfeldes um einen vom Strom I durchflossenen unendlich langen Leiter gilt

Magnetfeld um einen langen geraden Leiter $H = \frac{I}{2\pi R}, \quad [H] = \frac{A}{m}$

(3.6)

Im Folgenden soll der Integrationsweg den Leiter umschließen. Aus Symmetriegründen wird ein zum Draht senkrechter Kreis gewählt. Durchstößt der Draht dessen Mittelpunkt, folgt bei einem rechten Umlauf der Integrationsweg einer Feldlinie. Eine differentielle Verschiebung $d\vec{s}$ hat dann stets die gleiche Richtung wie der Feldvektor $\vec{H}(\vec{s})$. Somit ist das Skalarprodukt beider Vektoren gleich dem

Produkt ihrer Beträge. Beachtet man, dass aus Symmetriegründen der Betrag des Magnetfeldes nur vom Radius R des Kreises abhängt, nicht aber von der Integrationsvariablen s , folgt

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \oint H \cos \alpha ds = H(R) \oint ds = 2\pi R H(R). \quad (3.7)$$

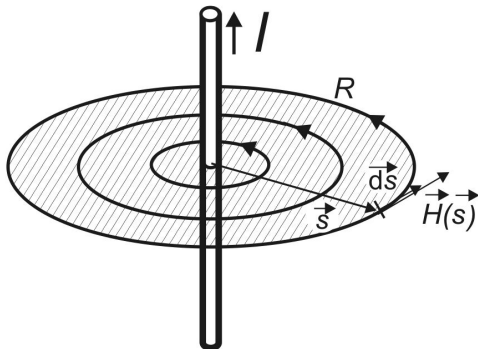


Abb. 3.5 Magnetfeld um einen geraden stromdurchflossenen Leiter

Der Integrationsweg ist ein Kreis vom Radius R , dessen Fläche hier schraffiert ist. Bei rechtem Umlauf haben infinitesimaler Verschiebungsvektor $d\vec{s}$ und Feldvektor $\vec{H}(\vec{s})$ die gleiche Richtung. Der Strom I fließt senkrecht zur Kreisfläche durch deren Mittelpunkt.

Benutzt man die Beziehung 3.6, erhält man die verblüffend einfache Gleichung

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \oint H ds \cos \alpha = \oint H_{\parallel} ds = I. \quad (3.8)$$

Die hier aufgezeigte Betrachtung lässt sich noch allgemeiner durchführen. Möge der Stromfluss nicht durch einen dünnen Draht erfolgen, sondern ein Raum von bewegten Ladungsträger durchsetzt sein, die sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen. Die Ladung je Raumvolumen bezeichnet man als *Ladungsdichte* ρ . Der *Stromdichtevektor* $\vec{j}$ ergibt sich damit zu

$$\boxed{\text{Stromdichtevektor } \vec{j} = \rho \vec{v}.} \quad (3.9)$$

Das Skalarprodukt eines Flächenelementes $d\vec{A}$ mit dem Stromdichtevektor gibt an, welche Ladung pro Zeiteinheit durch diese Fläche fließt (vergl. 2.5)

$$dI = \vec{j} d\vec{A}. \quad (3.10)$$

Integriert man (3.10) über eine Fläche, erhält man den Strom durch diese. Wenn die Integrationsfläche durch den Querschnitt eines Drahtes gebildet wird, handelt es sich um den Strom I durch den Draht. Mit Hilfe des Stromdichtevektors lassen sich auch räumlich ausgedehnte Bewegungen von Ladungsträgern beschreiben. Insbesondere gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Amperesches Gesetz oder Durchflutungsgesetz} \quad \oint \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A} = I \\ \text{in skalarer Form} \quad \oint H_{\parallel} ds = \iint_A j_{\parallel} dA = I \end{array}} \quad (3.11a)$$

Das Durchflutungsgesetz ist ein weiteres *Grundgesetz* der Elektrodynamik und gilt ganz allgemein:

Das Integral des Magnetfeldes über einen geschlossenen Weg ist gleich dem Gesamtstrom durch die vom Weg umschlossene Fläche.

Dabei gibt es keinerlei Einschränkungen bezüglich Strukturen des Feldes sowie der Fläche und ihrer Begrenzung! Für den Spezialfall konstanter Stromdichte für den Bereich der stromdurchflossenen Fläche gilt die skalare Form des Durchflutungsgesetzes:

$$\oint H \cos \alpha ds = \oint H_{\parallel} ds = j \cdot A_n = I. \quad (3.11b)$$

Hierbei beschreibt A_n die senkrechte Flächenprojektion auf die Stromrichtung.

Übungen

3.1. Durch einen unendlich langen geraden Leiter fließt ein Strom von 6 A. Wie groß ist das Magnetfeld in einem Punkt, der 2,5 cm von ihm entfernt ist?

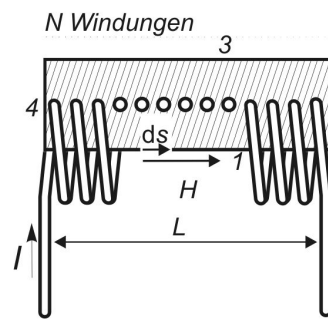
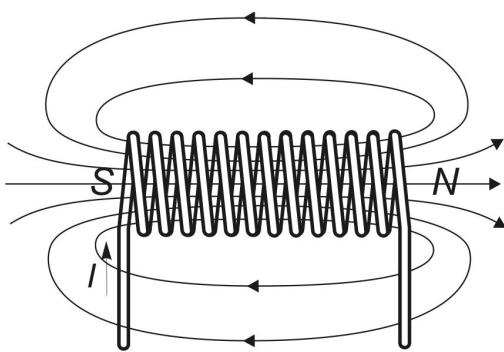
3.2. Durch zwei parallele unendlich lange gerade Leiter im Abstand von 10 cm fließen in entgegengesetzten Richtungen Ströme von $I_1 = 15 \text{ A}$ und $I_2 = 25 \text{ A}$. Wie groß ist das Magnetfeld in einem Punkt in der von beiden Leitern aufgespannten Ebene, der a) von beiden Leitern gleich weit entfernt ist, b) 2 cm von Leiter 1 und 8 cm von Leiter 2 entfernt ist, c) In welchen Punkten ist die magnetische Feldstärke gleich Null?

3.3.* Berechnen Sie unter Anwendung des Durchflutungsgesetzes das Magnetfeld im Innern einer aus Draht mit N Windungen gewickelten langen und dünnen Spule.

Lösung: Auf der Abbildung 3.6 ist links der Verlauf der Feldlinien skizziert. Da diese bei der gewählten Stromrichtung sowie dem Wickelsinn der Spule nach rechts aus der Spule austreten, wirkt diese nach außen wie ein Stabmagnet mit dem Nordpol rechts und dem Südpol links. Auf der rechten Abbildung umschreibt der Integrationsweg die schraffierte Rechteckfläche, bei der eine Seite durch die Mitte der gleich langen Spule verläuft, wobei alle Drahtwindungen jeweils einmal die Fläche durchdringen.

Abb. 3.6
um eine
strom-

sene Spule
Der
weg bei der
des Durch-
setzes



Magnetfeld
lange

durchflos-

Integrations-
Anwendung

flutungsge-
verläuft

zweckmäßig

innerhalb der Spule entlang einer Feldlinie. Außerhalb der Spule ist er willkürlich, im aktuellen Beispiel bildet er ein Rechteck. Das Umlaufintegral liefert unterschiedliche Beiträge je differentieller Verschiebung ds . Innerhalb der Spule (Wegabschnitt 1) ist das Feld sehr stark und in guter Näherung homogen. Außerdem sind Verschiebungsvektor und Feldstärke parallel zueinander. Auf den Abschnitten 2 und 4 erfolgt die Verschiebung annähernd senkrecht zu den Feldlinien, so dass das Skalarprodukt sehr kleine Beiträge liefert. Auf dem äußeren Abschnitt 3 ist das Feld sehr gering. Bei einer Spule, deren Länge L groß ist gegen den Durchmesser d ("lange" Spule), kann man in vertretbarer Näherung die Beiträge des Integrationsweges außerhalb der Spule vernachlässigen.

$$\oint H \cos \alpha \, ds = \int_1 H_1 \cos \alpha_1 \, ds + \int_2 H_2 \cos \alpha_2 \, ds + \int_3 H_3 \cos \alpha_3 \, ds + \int_4 H_4 \cos \alpha_4 \, ds \cong \int_1 H \, ds = H \cdot L. \quad (3.12)$$

Hierbei ist bereits die weitgehende Parallelität der Feldlinien innerhalb der Spule und damit Konstanz des Magnetfeldes über den inneren Integrationsweg berücksichtigt. Das Integral des Stromdichtevektors über die vom Integrationsweg umschlossene Fläche liefert Beiträge nur an den Stellen, an denen der Leiter durch die Fläche verläuft, bei N Windungen ist dies der Gesamtstrom $N \cdot I$. Somit folgt aus (3.11) und (3.12)

Feldstärke im Innern einer langen Spule	$H = \frac{NI}{L}$	(3.13a)
---	--------------------	---------

Die Formel (3.13a) ist natürlich nur eine Näherung, die bei kurzen und dicken Spulen versagt. Eine genauere Berechnung unter Berücksichtigung einer beliebigen Leiteranordnung ermöglicht das differentielle Herangehen von BIOT²⁷ und SAVART²⁸. Nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz berechnet sich der Beitrag $d\vec{H}$ eines kleinen Leiterstücks $d\vec{l}$, das vom Strom I durchflossen wird, nach

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}), \quad (3.14)$$

wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor vom Leiterstück zu dem Raumpunkt P ist, an welchem das Magnetfeld bestimmt werden soll. Man muss lediglich über die Beiträge $d\vec{H}$ aller Leiterstücke integrieren. In nur wenigen Fällen ist das analytisch möglich. Eine solch ganz einfache Aufgabe ist die Bestimmung des Magnetfeldes im Mittelpunkt einer Kreisschleife. Die Abstände sind nämlich alle gleich dem Kreisradius R und die Winkel zwischen $d\vec{l}$ und $\vec{r}$ sind alle gleich 90° . Somit reduziert sich (3.14) auf $dH = I dl / (4\pi R^2)$. Das Leiterstück dl , integriert über den gesamten Kreis, liefert lediglich den Kreisumfang. Das Magnetfeld ist senkrecht zum Kreis ausgerichtet und vom Betrag

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (3.15)$$

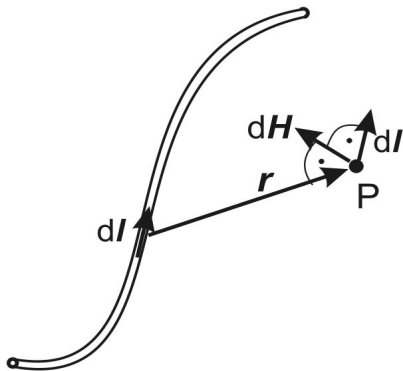


Abb. 3.7 Zum Biot-Savart-Gesetz

Jedes vom Strom I durchflossene Leiterstück $d\vec{l}$ liefert laut (3.14) einen kleinen Beitrag $d\vec{H}$ zum Magnetfeld $\vec{H}$ am Punkt P. Über solche Beiträge aller Leiterstücke (genau genommen die des gesamten Stromkreises) ist zu integrieren.

Wenn man N Windungen zu einer sehr kurzen Spule ($L \ll d$) aufwickelt, erhält man für deren Mitte

$$H = \frac{NI}{2R}. \quad (3.16)$$

Für die lange Spule ist eine genaue analytische Rechnung nach Biot-Savart auch möglich und liefert für deren Mittelpunkt

$$H = \frac{NI}{L\sqrt{1 + d^2/L^2}} \quad (3.13b)$$

und für einen Punkt auf der Spulenachse am Ende der Spule

$$H = \frac{NI}{2L\sqrt{1 + d^2/L^2}} \quad (3.13c)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass für $d \ll L$ der Ausdruck (3.13a) eine gute Näherung an (3.13b) darstellt, während aus (3.13c) hervorgeht, dass in diesem Fall das Magnetfeld am Spulenende nur etwa den halben Wert von (3.13a) erreicht!

Gut zu wissen, dass auch für beliebig komplizierte Leiteranordnungen sehr genaue Rechnungen nach (3.14) leicht mit dem Computer durchführbar sind.

3.3. Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

²⁷Jean-Baptiste BIOT (1774-1862), frz. Physiker; Ballonaufstieg zur Messung des Erdmagnetfeldes; Magnetismus der Ströme; Akustik; Polarisiertes Licht

²⁸Felix SAVART (1791-1841), frz. Physiker und Arzt; Akustik, Optik, Elektromagnetismus

Bewegt man Ladungen in Magnetfeldern, so beobachtet man eine an der Ladung angreifende Kraft, die LORENTZ²⁹ *kraft*, welche stets senkrecht sowohl zur Bewegung als auch zum Feld gerichtet ist. Da Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}$ und Magnetfeld $\vec{H}$ Vektoren sind, liefert ein Vektorprodukt beider Größen just einen solchen senkrechten Vektor, der auch noch zu den Beträgen v und H proportional ist. Weiterhin ist die Lorentzkraft proportional zur bewegten Ladung. Somit gilt

$$\vec{F}_L = Q\mu_r\mu_0[\vec{v} \times \vec{H}], \quad (3.17)$$

mit den Konstanten μ_r und μ_0 . Hierbei heißt der Proportionalitätsfaktor $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ *magnetische Feldkonstante* oder *Induktionskonstante*. Eine weitere dimensionslose Konstante, die *relative Permeabilität* oder *Permeabilitätszahl* μ_r hängt vom Material ab, im Vakuum ist $\mu_r=1$.

<i>magnetische Flußdichte</i> oder <i>Induktion</i> $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$ $[\vec{B}] = \frac{1\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1\text{T (Tesla)}$	(3.18)
---	--------

Die nach dem kroatischen Physiker TESLA³⁰ benannte Maßeinheit Tesla stellt eine recht große Einheit dar. In der Technik werden Felder bis zu einigen T angewendet, auch in Forschungslabors nur wenig mehr. Andererseits werden Gehirnströme über deren Magnetfelder detektiert mit Werten im Bereich von nT. Eine veraltete Einheit der magnetischen Induktion ist das *Gauss* ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$). Mit der Flussdichte lautet die Formel 3.17

<i>Lorentzkraft</i> $\vec{F}_L = Q[\vec{v} \times \vec{B}]$ $F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$	(3.19)
--	--------

Der Vorteil dieser Form liegt darin, dass man ganz analog zur Definition der elektrischen Feldstärke als Quotienten aus elektrostatischer Kraft und Ladung die magnetische Flussdichte als Quotienten aus magnetischer Kraft (Lorentzkraft) und dem Produkt Qv definieren kann.

Die Lorentzkraft lässt sich über eine relativistische Rechnung aus der elektrischen Kraft zwischen ruhenden Ladungen ableiten. Betrachten wir hierzu einen geraden Leiter. Da dieser elektrisch neutral ist, gibt es im stromlosen Leiter neben der Kette von Leitungselektronen mit der linearen Ladungsdichte $-\lambda^-$ eine betragsmäßig gleiche positive Ladungsdichte $+\lambda^+$ von unbeweglichen Ionen. Bei Stromfluss ist die Driftgeschwindigkeit v_d der Elektronen der Stromrichtung I entgegengesetzt gerichtet und beträgt je nach Elektronendichte und Stromstärke einige mm/s. Wird eine positive Ladung Q parallel zum Leiter in Stromrichtung mit der Geschwindigkeit v bewegt, erfährt diese eine zum Leiter hin gerichtete Kraft F , s. Abb.3.8a. Von einem mit der Geschwindigkeit v der Ladung Q mitbewegten Beobachter betrachtet, bewegen sich die Ionen mit der Geschwindigkeit v und die Elektronen mit der etwas größeren Geschwindigkeit v_d' in die negative x' -Richtung. Nun gilt für Längen, die von einem bewegten Beobachter registriert werden, die *Lorentzkontraktion*, eine Folgerung aus der Forderung nach Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit, welche die Grundlage für EINSTEIN³¹s *Spezielle Relativitätstheorie* bildet. Eine Länge l , gemessen im ruhenden Bezugssystem, nimmt im mit v_0 bewegten System den Wert $l' = l / \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}$ an (c -Lichtgeschwindigkeit). Da die Relativgeschwindigkeit der Elektronen im betrachteten Beispiel größer ist als die der positiven

²⁹ Hendrik Anton LORENTZ (1853-1928), holl. Theoret. Physiker; Kin. Gastheorie; Lorentz-Transformation (bewegte Bezugssysteme); Lorentzkraft in der Elektrodynamik

³⁰ Nikola TESLA (1856-1943) serb. Physiker, ab 84 Mitarbeiter von Edison in USA; Drehstromtechnik; Hochfrequenzströme (Tesla-Transformator)

³¹ Albert EINSTEIN (1879-1955) dt. Physiker, sicher der bedeutendste Physiker des 20.Jhds. 1902-9 Ing. Patentamt Bern, danach Prof. in Zürich, Prag, 13 Direktor am Kaiser-Wilhelm Institut Berlin, 33 nach Princeton ausgewandert, Warnung vor dt. Atombombe, polit. Eng.; Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie; Photoeffekt (1921 Nobelpreis); Lichtemission (Lasprinzip); Diffusion; Kosmologie

Ionen, ergibt sich für die Elektronen eine größere Lorentzkontraktion als für die Ionen. Das bedeutet, dass der Abstand aufeinanderfolgender Elektronen kleiner ist, als derjenige der Ionen s. Abb.3.8b. Folglich wird vom bewegten Bezugssystem aus $\lambda'^- > \lambda'^+$ gemessen, die Ladung des Leiters ist somit negativ und die Ladung Q wird elektrostatisch angezogen.

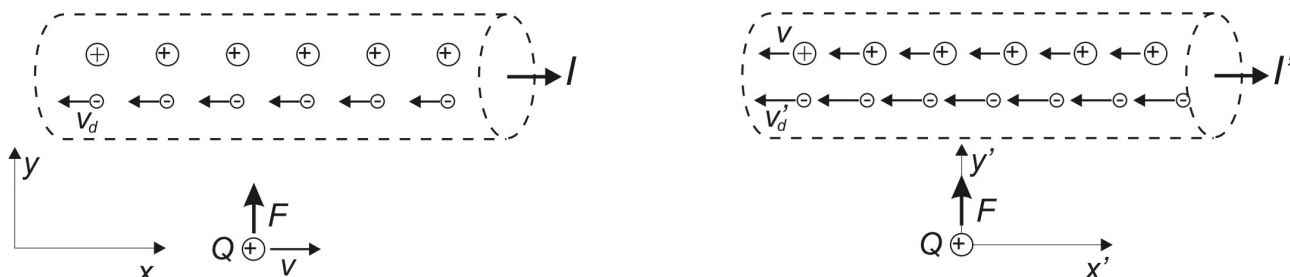


Abb. 3.8 Bewegte Ladung neben einem stromdurchflossenen Leiter

Betrachtet a) vom ruhenden Bezugssystem

b) vom mitbewegten Bezugssystem

Eine quantitative Betrachtung (s. z.B. "Physik" von Jay Orear, Hanser-Verlag 1982) führt zur Beziehung 3.19. Der sich hier offenbarende tiefe innere Zusammenhang von elektrischen und magnetischen Erscheinungen mag zunächst verblüffen, er findet seinen Ausdruck auch in Konstanten, mit denen physikalischen Gesetzen eine gefälligere Form gegeben wird. So gilt für die Lichtgeschwindigkeit im Medium mit μ_r, ϵ_r

$$c'^2 = 1 / \mu_r \eta_0 \epsilon_r \epsilon_0 . \quad (3.20)$$

Für die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist $\mu_r = \epsilon_r = 1$ und folglich $c^2 = 1 / \eta_0 \epsilon_0$, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Wenn sich eine Ladung bewegt, erfährt sie sowohl eine elektrostatische Kraft als auch eine magnetische Kraft. Somit lautet der Ausdruck für die elektrische Gesamtkraft oder elektromagnetische Kraft

$$\boxed{\text{elektromagnetische Kraft} \quad \vec{F} = Q \vec{E} + Q[\vec{v} \times \vec{B}] } \quad (3.21)$$

Übungen

3.4. Bestimmen Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte im Innern der folgenden „langen“ Spulen:

a) $n = 340$, $l = 0,7$ m und $I = 3$ A

b) $n = 8550$, $l = 52$ mm und $I = 120$ mA

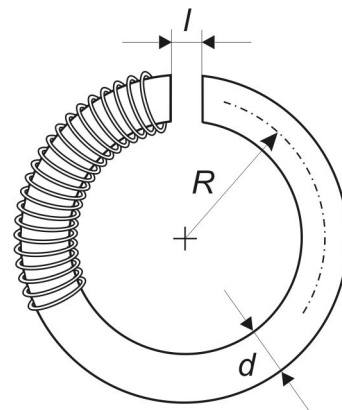
3.5. In einer „langen“ Spule ($n = 300$, $l = 0,7$ m und $I = 1,5$ A) wird eine magnetische Induktion von $B = 8,4 \cdot 10^{-4}$ T gemessen. Berechnen Sie daraus die magnetische Feldkonstante.

3.6. Zwischen den Enden einer 15 cm langen eisenfreien Zylinderspule von 850 Windungen aus 0,3 mm dickem Cu-Draht ($\rho = 0,0175 \Omega \text{ mm}^2 / \text{m}$) mit dem Durchmesser von 2 cm liegt eine Spannung von 20 V an. Welche Induktion herrscht im Innern der Spule?

Ergebnis: 10,7 mT

3.7. * Berechnen Sie für einen Ringmagneten mit N Windungen und einem Eisenkern der Permeabilität μ_{Fe} die Induktion B im kleinen Luftspalt der Breite l !

Hinweis: Wenden Sie das Durchflutungsgesetz an (Integrationsfläche wird durch „Seele“ des Ringkernes begrenzt), wobei der geschlossene Integrationsweg in je einen Anteil über den Luftspalt (nicht vernachlässigbar!) und über den Spulenkern aufgeteilt wird. Nutzen Sie bei der Integration den Umstand, daß die Feldlinien der magnetischen Induktion B geschlossen sind, also gilt im Bereich des Luftspaltes die Näherung $B_{\text{Luft}} = B_{\text{Eisen}}$



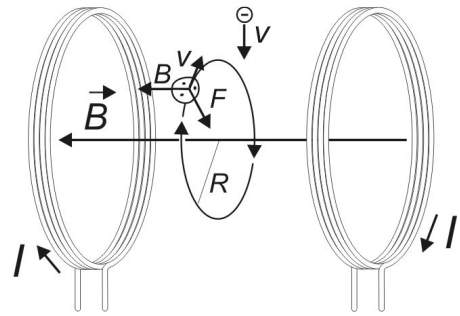
3.8.* Im Vorlesungsversuch *Fadenstrahlrohr* wird ein Elektronenstrahl senkrecht zu den Feldlinien zweier paralleler Spulen (sogen. HELMHOLTZ³²-Spulen) ausgerichtet. Bei Anlegen einer Beschleunigungsspannung von 600 V beträgt der Radius der Kreisbahn 20 mm. Wie groß ist der Wert der magnetischen Flussdichte?

Lösung: Wie aus der Abbildung ersichtlich, erfolgt die Bewegung von Elektronen, die senkrecht zu den Feldlinien in ein magnetisches Feld geschossen werden, wegen der stets zur Bewegungsrichtung senkrechten Kraft auf einer Kreisbahn. Die Lorentzkraft wirkt also als Radialkraft

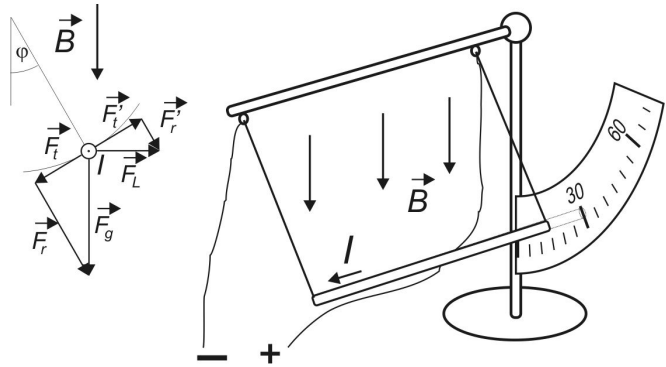
$\vec{F}_R = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_R$ einer Kreisbewegung mit dem Radius R . Die Elektronenquelle verleiht den Elektronen eine kinetische Energie über die Beschleunigungsspannung. Es gilt $\frac{m}{2} v^2 = eU$ und somit $v = \sqrt{2eU/m}$.

Aus der Lorentzkraft folgt $B = mv/eR$ und letztlich $B = \frac{1}{R} \sqrt{2U \frac{m}{e}}$.

Mit den gegebenen Werten berechnet man $B = 4,13 \text{ mT}$.



3.9* Im Vorlesungsversuch LORENTZschaukel wird ein horizontaler Leiter einem senkrecht gerichteten Magnetfeld ausgesetzt. Der Leiter besteht aus einem Stab von 10 cm Länge mit einem Gewicht von 5 g und ist ähnlich einer Schaukel mit dünnen, flexiblen Zuleitungen so aufgehängt, dass er unter dem Einfluss seiner Gewichtskraft als Schwebependel betrachtet werden kann. Sobald man einen Strom fließen lässt, wird der Stab durch die Lorentzkraft aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Ein Auslenkungswinkel von $\varphi = 30^\circ$ wird bei einem Strom von 1 A gemessen. Wie groß ist der Betrag der magnetischen Induktion?



Lösung:

Da die Induktion senkrecht gerichtet ist und der Strom horizontal in Richtung des Leiters fließt, wirkt die Lorentzkraft horizontal und senkrecht zum Leiter. Dieser wird dadurch aus der Ruhelage ausgelenkt, wie aus der Abbildung ersichtlich. Mit der Auslenkung des Pendels um den Winkel φ entsteht eine rücktreibende Kraft $\vec{F}_t$, die Tangentialkomponente der Gewichtskraft $\vec{F}_g$ ($\vec{F}_t$ entspricht vom Wesen her einer Hangabtriebskraft).

Dieser rücktreibenden Komponente entgegen steht die auslenkende Tangentialkomponente $\vec{F}_t'$ der Lorentzkraft $\vec{F}_L$. Im Gleichgewicht heben sich beide Tangentialkomponenten auf:

$$F_t = m g \sin \varphi = F_t' = Q v B \cos \varphi. \text{ Somit gilt für den Betrag der magnetischen Induktion } B = \frac{m g}{Q v} \tan \varphi.$$

Für den Leiter mit dem Querschnitt A und dem Volumen V gilt $j = n e v = \frac{Q}{V} v = \frac{I}{A}$ und somit für das Produkt

der im Stab enthaltenen Ladung und deren Geschwindigkeit $Q v = \frac{I}{A} V = l I$. Hieraus folgt $B = \frac{m g}{l I} \tan \varphi$

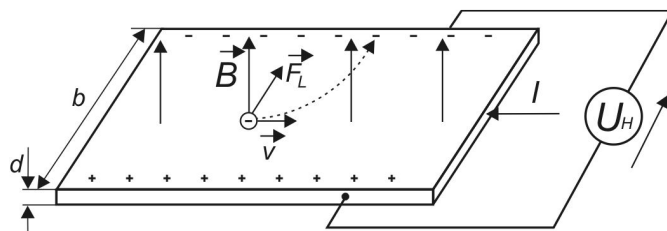
und mit den aktuellen Werten $B = \frac{0,005 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ m} \cdot 1 \text{ A}} 0,577 = 0,283 \text{ T}$.

³² Herrmann von HELMHOLTZ (1821-1894), dt. Arzt und Physiker; Energiesatz; physiologische Optik und Akustik; Wirbelströmungen; Elektrodynamik; Physik der Musikinstrumente

3.10.* Die auf die Leitungselektronen im stromdurchflossenen Leiter unter dem Einfluss eines senkrechten Magnetfeldes wirkende Lorentzkraft drängt diese an eine Seite des Leiters. Dort entsteht ein Überschuss an negativen Ladungen, während die gegenüberliegende Seite positiv geladen wird. Die Ladungstrennung erzeugt ein elektrisches Feld senkrecht zum Stromfluss und zum Magnetfeld, es kann eine sogenannte HALL³³spannung abgegriffen werden. Diese Erscheinung wird als Halleffekt bezeichnet.

Aufgabe: Ein flacher Leiter (0,1mm dick, 10mm breit) wird bei 1A Strom einem Feld der Induktion 0,1 T ausgesetzt. Wie groß ist die Hallspannung bei einer Elektronenkonzentration von

- $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (Kupfer)
- $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$ (n-dotiertes Silizium)



Lösung: Unter Beachtung der negativen Ladung von Elektronen mit Bewegungsrichtung entgegengesetzt zur Stromrichtung und einer senkrechten Orientierung des Leiters im Magnetfeld wie in nebenstehender Abbildung, ergibt sich eine maximale Hallspannung in der dargestellten Richtung. Im Gleichgewicht kompensieren sich Lorentzkraft und elektrische Feldkraft, $e v B = e E$. Aus (2.4) und (2.5) sowie (1.15) folgen

$$I = jA = n e v b d \text{ und } E = U_H / b, \text{ für die Hallspannung ergibt sich } U_H = b E = b B v = \frac{b B I}{n e b d} = \frac{B I}{n e d}.$$

Offensichtlich hängt die Hallspannung gar nicht von der Breite des Leiters ab. In einem schmalen Leiter ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen bei gleichem Stromfluss wegen des geringeren Leiterquerschnitts größer und die Lorentzkraft gleichermaßen. Dadurch ist zwar auch das elektrische Feld größer, wirkt aber nur über die geringere Leiterbreite. Setzt man die gegebenen Werte für Kupfer ein, ist man über den kleinen Wert

$$\text{der Hallspannung erstaunt: } U_H = \frac{0,1 \text{Vs} \cdot 1 \text{A}}{\text{m}^2 8,5 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As} \cdot 10^{-4} \text{m}} = 74 \text{nV}. \text{ Bei Silizium sieht es bes-}$$

ser aus, man erhält $U_H = 62,5 \text{ mV}$, ein Wert, welcher messtechnisch zur Detektion von Magnetfeldern problemlos ausgewertet werden kann. Ein weiterer Vorteil der Hallsensoren besteht in der Möglichkeit, sie in Halbleiterchips zu integrieren.

3.11.* Die Beschleunigungsspannung U_B für den Elektronenstrahl in einer Vakuumröhre beträgt 3 kV. Die Ablenkung des zunächst horizontalen Strahls erfolgt durch ein zusätzliches elektrisches Feld E . Dieses wird durch einen Plattenkondensator mit der Ablenkspannung $U_A = 1,8 \text{ kV}$ und dem Plattenabstand $d = 4 \text{ cm}$ erzeugt. Näherungsweise ist das Feld innerhalb des Kondensators homogen, außerhalb des Raumes zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigbar klein. Außerhalb der Elektronenstrahlröhre sind zusätzlich zwei große Leiterschleifen angebracht (sog. Helmholtzspulen). Hierdurch wird ein näherungsweise konstantes Magnetfeld im Bereich der Ablenkplatten erzeugt.

a) Fertigen Sie die (evtl. perspektivische) Prinzipskizze eines vertikalen Schnittes durch eine Elektronenstrahlröhre an, welche die Elektronenquelle mit Beschleuniger sowie die für die Vertikalablenkung notwendigen Elektroden (analog Plattenkondensator) enthält. Zeichnen Sie die für eine Ablenkung nach oben notwendige Richtung des Elektrischen Feldes ein sowie die hierzu notwendige Polung der Ablenkspannung U_A (Begründung)!

b) Die Richtung des zusätzlich wirkenden Magnetfeldes B ist so zu wählen, dass die dadurch auf das Elektron wirkende Kraft nach unten gerichtet ist. Zeichnen Sie eine der beiden Spulen ein sowie die Stromrichtung bei rechts gewickelter Spule (Begründung)!

c) Berechnen Sie die Elektronengeschwindigkeit infolge der Beschleunigungsspannung!

d) Die zwischen den Ablenkplatten auf das Elektron wirkende elektrostatische Feldkraft und die gleichzeitig durch das Magnetfeld wirkende Lorentzkraft sind zueinander entgegengesetzt gerichtet. Bei welchem Wert der magnetischen Flussdichte B kompensieren sich beide Feldkräfte völlig, so dass die Flugbahn der Elektronen linear verläuft?

Ergebnis: $v = 32500 \text{ km/s}$; $B = 1,38 \text{ mT}$

³³ Edwin Herbert HALL (1855-1938), am. Physiker; metallische Leitfähigkeit