

### 3.4. Das Induktionsgesetz (1831 FARADAY)

Faraday war bekannt, dass bewegte Ladungen magnetische Wirkungen hervorrufen (Magnetfeld um stromdurchflossene Leiter, Spulen) und suchte zielstrebig nach einem analogen Rückschluss: Werden bewegte (zeitlich veränderliche) Magnetfelder von elektrischen Wirkungen begleitet? Als Antwort hierauf fand er das Induktionsgesetz.

Zunächst betrachten wir ein homogenes und zeitlich konstantes Feld  $\vec{B}$ , welches eine U-förmige ruhende Leiterschleife durchsetzt (Fall 1). Diese enthält ein Voltmeter, weiterhin ist ein Leiterstück der Länge  $l$  mittels zweier Schleifkontakte verschiebbar angeordnet, das mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  parallel verschoben wird (s. Abb. 3.9).

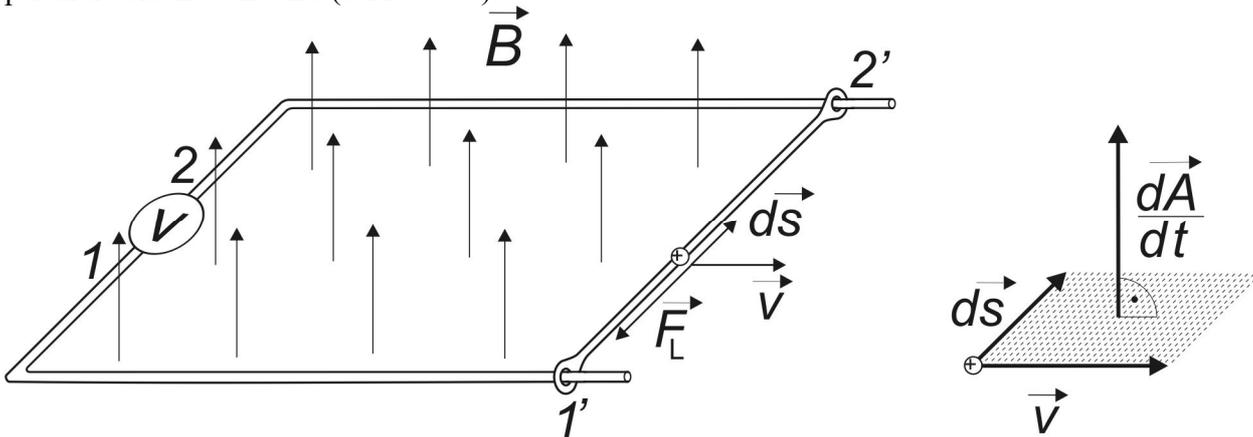


Abb. 3.9: Leiterschleife

Der die Leiterschleife durchsetzende magnetische Fluss (s.u.) ist durch Veränderung der Schleifenabmessung einer zeitlichen Veränderung unterworfen. Offensichtlich wirkt auf die im Schleifer enthaltenen Ladungsträger die Lorentzkraft.

Bewegt man den Schleifer in Abb.3.9, registriert man im Experiment einen Ausschlag des Voltmeters, dessen Betrag von der Stärke des  $B$ -Feldes, der Länge des bewegten Schleifers und dessen Geschwindigkeit abhängt. Ändert man die Richtung einer dieser Größen, ändert sich die Polarität der gemessenen Spannung.

Ursache dieser Spannung ist die Lorentzkraft, die auf die Leitungselektronen im bewegten Leiterstück wirkt. Da diese senkrecht zur Bewegungsrichtung  $v$  wirkt, also in Längsrichtung des Schleifers, sammeln sich an dessen einem Ende Elektronen im Überschuss, während ein Elektronenmangel am anderen Ende zu verzeichnen ist. Dieser Vorgang erzeugt einen Ladungsunterschied, folglich ein elektrisches Feld und eine Potentialdifferenz beider Schleifkontakte. Im Gleichgewicht halten sich elektrische Feldkraft und Lorentzkraft die Waage, sind also in der Summe gleich Null. Für die Beträge gilt somit

$e \cdot v \cdot B = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{l}$ . Stellt man nach der Spannung um, erhält man

$$\boxed{\text{Induzierte Spannung im bewegten Leiter : } U = B \cdot l \cdot v} \quad (3.22)$$

Diese Beziehung gilt nur für den Fall zueinander senkrechter Orientierungen von Schleifer, Feld und Bewegungsrichtung! Sie sagt weiterhin nichts aus bezüglich der Polarität der induzierten Spannung. Solche Spannungen treten auch auf, wenn man die Stärke oder Richtung der magnetischen Induktion ändert, welche die Leiterschleife durchsetzt.

Die Erscheinung, dass zwischen den Enden eines Leiters bei dessen Bewegung in einem Magnetfeld oder bei einer Änderung des Magnetfeldes eine Spannung entsteht, nennt man *elektromagnetische Induktion*, die Spannung wird *Induktionsspannung* genannt, der dadurch im Stromkreis hervorgerufenen Strom *Induktionsstrom*.

Im Folgenden wird in einer detaillierteren Betrachtung das Induktionsgesetz hergeleitet. Falls dem geneigten Leser die Zeit oder Lust abgeht, die einschlägigen Umformungen nachzuverfolgen – ein Sprung ans Ende des Abschnittes zu Glg. 3.30 sei hier erlaubt. Das Induktionsgesetz kann man auch anwenden, ohne über die Ableitung Bescheid zu wissen!

Zunächst soll die Verschiebungsarbeit berechnet werden, die vom System aufgewendet werden muss, um eine positive Probeladung  $q$  um die Schleife zu transportieren, also von  $1 \rightarrow 1' \rightarrow 2' \rightarrow 2$ . Auf bewegte Ladungen im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ .

Da die Lorentzkraft senkrecht zur Verschiebung gerichtet ist, liefert die Verschiebung der Probeladung innerhalb der Leiterschleife keinen Beitrag zur Verschiebungsarbeit (infolge der Lorentzkraft ist lediglich die Konzentration der Ladungsträger über dem Leiterquerschnitt etwas ungleichmäßig - *Hall-Effekt*). Anders bei der Verschiebung von  $1' \rightarrow 2'$ , da in diesem Abschnitt die Ladungsträgergeschwindigkeit durch den bewegten Leiterabschnitt bestimmt wird. Hier hat die Lorentzkraft eine Komponente in Verschiebungsrichtung (entlang des Leiters) und leistet die Verschiebungsarbeit

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{1' \rightarrow 2'} = \int_1^2 \vec{F}_L d\vec{s} = q \int_1^2 [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{s} \quad (3.23)$$

Dabei ist berücksichtigt, dass bei den Verschiebungen  $1 \rightarrow 1'$  und  $2' \rightarrow 2$  keine Arbeiten geleistet werden. Wendet man auf (3.23) die Vertauschungsrelation  $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]$  an (das sogenannte Spatprodukt ist gleich dem Volumen eines Parallelepipeds, welches von den drei Vektoren aufgespannt wird), erhält man nach einer weiteren Vertauschung der Faktoren des Vektorproduktes

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \int_1^2 \vec{B} \cdot [\vec{v} \times d\vec{s}] . \quad (3.24)$$

Das Vektorprodukt in (3.24) ist gerade gleich dem Flächenstück  $d\vec{A}$ , welches vom Verschiebungsvektor  $d\vec{s}$  je Zeiteinheit  $dt$  überstrichen wird (s. rechter Teil der Abbildung 3.9). Hiermit erhält man

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \int_1^2 \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} . \quad (3.25)$$

*Definition:* Das Produkt aus Flussdichte und Fläche, welche davon durchsetzt wird, ist eine wichtige physikalische Größe, der *magnetische Fluss*  $\Phi$

$$\boxed{\text{Magnetischer Fluß} \quad \Phi = \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad [\Phi] = \text{Vs, Wb, WEBER}^{34}} \quad (3.26a)$$

Wenn die Flussdichte im Bereich der durchsetzten Fläche konstant ist, gilt der vereinfachte Ausdruck

$$\Phi = B \cdot A_n , \quad (3.26b)$$

Wobei  $A_n$  die vom Fluss durchsetzte auf  $B$  senkrechte Flächenprojektion darstellt ( $A_n = \vec{A} \cdot \vec{B} / B$ ).

Die Verschiebungsarbeit ergibt sich somit zu

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (3.27)$$

Eine solche Verschiebungsarbeit je Ladung ist aber einer Potentialdifferenz gleichzusetzen. Man bezeichnet diese als *induzierte Spannung*  $U_{\text{ind}}$  oder *elektromotorische Kraft* EMK.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt} = \varphi_2 - \varphi_1 . \quad (3.28)$$

<sup>34</sup> Wilhelm Eduard WEBER (1804-1891), baute zusammen mit Carl Friedrich GAUSS 1833 den ersten elektrischen Telegraf.

Da wie im auf Abb. 3.9 dargestellten Beispiel  $\vec{B} \parallel d\vec{A}/dt$ , ist offensichtlich das Potential an 1 höher als an 2 und  $U_{ind} = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$ . Die Lorentzkraft wirkt hier als *EMK* und treibt innerhalb dieser wie eine Spannungsquelle zu betrachtenden Anordnung die positiven Ladungsträger nach 1 und die negativen Ladungsträger nach 2. Die Potentialdifferenz ist als eingeprägte Spannung (Urspannung) direkt am Voltmeter ablesbar und bewirkt einen Stromfluss, wenn parallel zum Voltmeter noch ein Widerstand angeschlossen wird.

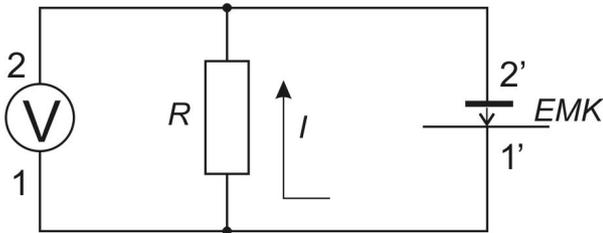


Abb. 3.10 Bewegte Leiterschleife als Spannungsquelle  
Die Bezeichnung der Anschlüsse wie in Abb.3.9. Durch die Lorentzkraft werden die positiven Ladungsträger innerhalb der Schleife nach 1' getrieben und fließen von dort außen über den Widerstand nach 2'.

Beim Übergang von Glg.3.25 nach Glg.3.27 wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die Leiterschleife in einem homogenen und auch zeitlich konstanten Feld bewegt (nur dann darf man den Differentialoperator vor das Produkt ziehen). Das ist natürlich nicht immer der Fall, aber diese Voraussetzung ist auch gar nicht nötig! Es lässt sich an einem ähnlichen Experiment, wenn die Fläche der Leiterschleife konstant ist, aber das Magnetfeld veränderlich (in Betrag sowie Richtung) zeigen, dass auch hier die Beziehung 3.27 gültig ist.

Die Punkte 1 und 2 in Abb.3.9 sind Anfang und Ende einer geschlossenen Verschiebungstrajektorie. Da entlang dieser Verschiebung Arbeit geleistet wird, gilt

$$U_{ind} = -\oint \vec{E} \, d\vec{s} \neq 0. \tag{3.29}$$

Damit erhalten wir eine schöne Formulierung für das Induktionsgesetz:

$$\text{Induktionsgesetz} \quad U_{ind} = -\oint \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \, d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3.30a}$$

Bezeichnet man mit  $A_n$  die zum  $B$ -Feld senkrechte Flächenprojektion, ergibt sich für die induzierte Spannung bei einer Spule mit  $N$  Windungen in einem homogenen Feld folgender Ausdruck:

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \left( \frac{dB}{dt} A_n + B \frac{dA_n}{dt} \right). \tag{3.30b}$$

Verbal lässt sich dieses Gesetz wie folgt ausdrücken:

Unterliegt der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife einer zeitlichen Änderung, wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert. Dabei ist es unerheblich, ob dies durch eine Änderung des Betrages der Flussdichte, der relativen Orientierung von Flussdichte und der vom Leiter umschlossenen Fläche zueinander, oder einer Änderung des Betrages dieser Fläche geschieht.

Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen geschlossene (!!) Feldlinien des elektrischen Feldes (Wirbelfeld). Dieses Wirbelfeld existiert auch ohne Leiter. An einer in dieses Feld gebrachten Leiterschleife kann jedoch als *Antenne* diese Umlaufspannung abgegriffenen und dem Feld Energie entnommen werden.

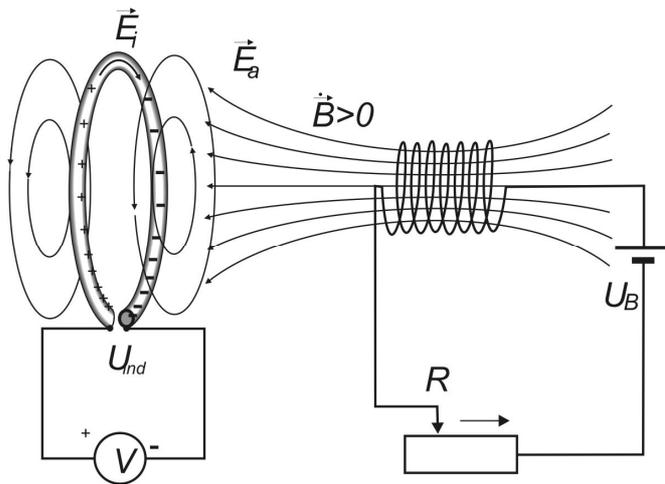


Abb. 3.11 Elektrisches Wirbelfeld um ein zeitlich veränderliches Magnetfeld  
Ein Anwachsen des Stromflusses durch die Spule erzeugt ein veränderliches Magnetfeld und damit ein elektrisches Wirbelfeld  $\vec{E}_a$ . Befindet sich in dessen Bereich ein Leiter, erfahren die in ihm enthaltenen Ladungen eine Feldkraft und verschieben sich entsprechend. Durch diese Influenz entsteht im Leiter ein zusätzliches Gegenfeld  $\vec{E}_i$ , welches das äußere kompensiert. Dadurch liegt an den Leiterenden die volle Umlaufspannung  $U_{ind}$  an.

Wie in Abb. 3.11 ersichtlich, bewirkt ein im elektrischen Wirbelfeld befindlicher Leiter durch *Influenz*, dass das ihn durchsetzende Feld verschwindet. Da sich laut Glg.3.30 die Umlaufspannung über eine *geschlossene* Verschiebung ergibt, muss die Integration über das offene Kurvenstück (zwischen den Leiterenden) die gesamte Spannung ergeben. Hier ist durch die influenzierten Ladungen das resultierende elektrische Feld stark.

Ein ganz analoges Bild ergibt sich, wenn man den Magnetstrom konstant lässt, aber den Abstand zwischen Leiterschleife und Spule verringert.

Wenn die Leiterschleife geschlossen wird, fließt in ihr ein Strom, der durch die Umlaufspannung und den Widerstand der Schleife bestimmt wird. Hierbei ist allerdings die Rückwirkung des Stromes durch die Schleife auf das ihn verursachende veränderliche Magnetfeld zu beachten (s. unten im Abschnitt Selbstinduktion). Das induzierte Magnetfeld ist nämlich dem verursachenden Magnetfeld entgegengerichtet. Folglich sind diese *Wirbelströme* selbst in sehr guten Leitern von begrenzter Stärke. Die durch die Wechselwirkung beider Felder entstehenden (abstoßenden) Kräfte können erheblich sein. Hierauf beruht das Prinzip des *Magnetkissens*, welches nicht nur bei der Magnet-schwebbahn, sondern z.B. auch in Magnetlagern angewendet wird. Sehr praktisch ist die LENZ<sup>35</sup>sche Regel:

**LENZsche Regel:** Induzierte Spannungen, Ströme, Felder, Kräfte,... sind stets ihrer Ursache entgegengesetzt gerichtet.

Man könnte die Lenzsche Regel auch so formulieren: Das System versucht unter Ausschöpfung aller Möglichkeiten den Anfangszustand beizubehalten, der durch den magnetischen Fluss gesetzt wurde.

Ändert sich z.B. das Magnetfeld, welches eine Leiterschleife durchsetzt, so wird in dieser eine Spannung induziert. Die induzierte Spannung treibt einen Strom durch die Leiterschleife, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt. Dieses durchsetzt zusätzlich zum äußeren Feld die Leiterschleife und kompensiert so gerade die primäre *Änderung des Flusses* durch die Leiterschleife. Würden keine ohmschen Verluste auftreten, bliebe der magnetische Fluss konstant. Aus diesem Grunde ist in Supraleitern der magnetische Fluss stets gleich Null.

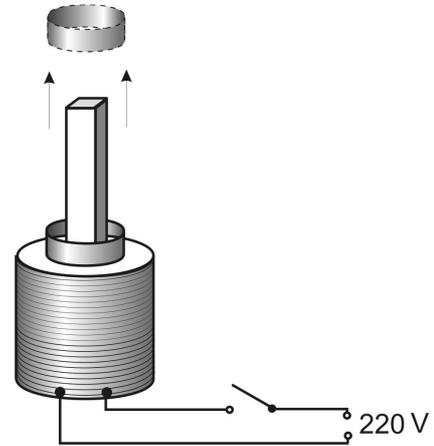
**Experiment:** Eine Reihe von Materialien besitzen die Eigenschaft, bei ausreichend tiefen Temperaturen ihren elektrischen Widerstand vollständig zu verlieren. Auf diese *Supraleiter* werden wir später noch genauer eingehen. An dieser Stelle soll der *Meißner-Ochsenfeld-Effekt* erwähnt werden. Bringt man nämlich einen solchen Supraleiter in die Nähe eines Magnetfeldes, wird sofort innerhalb des Supraleiters ein Wirbelstrom induziert, der ein Gegenfeld erzeugt, so dass das Innere des Supraleiters stets völlig feldfrei bleibt. Die Feldlinien der magnetischen Induktion werden aus dem Supraleiter herausgedrängt. Die Abstoßung kann leicht so groß werden, dass supraleitendes Material in einem Magnetfeld dauerhaft schwebt.

<sup>35</sup> Emil Heinrich Friedrich LENZ (1804-1865), dt. Physiker, ab 34 Petersburg; Elektromagnetismus; Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

**Experiment:** Ein eindrucksvolles Beispiel für die Lenzsche Regel ist der THOMSON-Ring. Eine Spule wird mit einem langen Eisenkern versehen. Über den Eisenkern wird ein Ring aus gut leitfähigem Material (Aluminium) gestülpt (s. Abb.3.12). Wird daraufhin das Magnetfeld eingeschaltet, durchsetzt das sich rasch aufbauende Magnetfeld den Ring, wodurch in diesem ein starker Wirbelstrom induziert wird, welcher seinerseits ein dem primären Feld entgegen gesetztes Magnetfeld erzeugt. Beide stoßen einander ab, so dass bei geeigneter Dimensionierung der Ring nach oben geschleudert wird.

Abb. 3.12 Thomson-Ring

Bei Einschalten des Magnetstromes erzeugt der induzierte Ringstrom ein entgegen gerichtetes Magnetfeld, welches den Ring fortschleudert. Dieser Effekt funktioniert besonders gut mit Wechselstrom. Durch den nach Einschalten der Spannung permanenten Wechsel des Magnetfeldes ist die Abstoßung nicht nur auf einen kurzen Impuls begrenzt sondern zeitlich konstant. Der Ring kann so leicht zum Schweben gebracht werden. Der Wirbelstrom innerhalb des Ringes bewirkt eine rasche Erwärmung desselben. Auf diesem Effekt beruht die *Induktionsheizung*. Wird ein aufgeschlitzter Ring verwendet, kann kein Wirbelstrom fließen, der Ring bleibt unbeeindruckt vom Brummen des eingeschalteten Magneten auf ihm liegen.



### Übungen

**3.12.** In einer Spule mit 1250 Windungen befindet sich ein Stabmagnet (s. Abb.). Sobald dieser aus der Spule herausgezogen wird, fließt für die Dauer von 0,5s ein (annähernd konstanter) Strom von 10mA. Wie stark ist der magnetische Fluss des Stabmagneten?

*Lösung:*

Die induzierte Spannung  $U_{ind}$  bewirkt einen Strom  $I$  über den Widerstand  $R$ . Nach Glg.3.34 gilt somit für eine Induktionsspule mit  $N$  Windungen

$$U_{ind} = R I = N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Da die Zeitabhängigkeit des Stromes bekannt ist, kann man über den gesamten Zeitraum, in dem der Strom von 0 verschieden ist, integrieren:

$$\int_0^t R I(t') dt' = N \int_0^{\Phi} d\Phi' = R \int_0^t I(t') dt' = N\Phi.$$

Damit ergibt sich für den Fluss des Stabmagneten ein Wert von  $\Phi = 5 \frac{V}{A} \cdot 0,01A \cdot 0,5s / 1250 = \underline{2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}}$ .

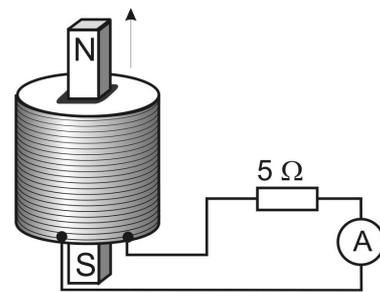
**3.13.** Wie groß ist die Induktionsspannung zwischen den Enden einer Spule mit 750 Windungen, die sich in einem Magnetfeld mit einer Flussdichte von 30mT befindet? Die Spule hat eine Länge von 15cm und einen Durchmesser von 4cm. Das Magnetfeld wird innerhalb von 0,1 s gleichmäßig auf null verringert. Die Längsachse der Spule schließt mit den Feldlinien einen Winkel von  $30^\circ$  ein.

**3.14.** Ein Stabmagnet wird in eine Spule hineingeführt. Bestimmen Sie (für alle Möglichkeiten) die Richtung des Induktionsstromes a) nach der Lenzschen Regel und b) mit Hilfe der Lorentzkraft.

**3.15.** Eine Spule wird in axialer Richtung auf eine stromdurchflossene Spule gleicher Bauart zu bewegt. Fließt der in ihr induzierte Strom in gleicher oder in entgegen gesetzter Richtung wie der Strom in der ersten Spule?

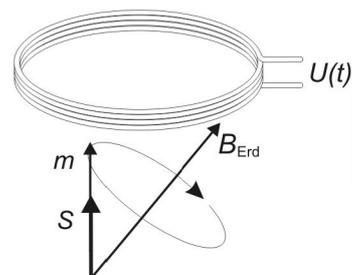
**3.16.** Ein Flugzeug mit einer Spannweite von 45 m fliegt mit einer Geschwindigkeit von 900km/h über einen Ort, an welchem die senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes  $44 \mu\text{T}$  beträgt. Wie groß ist die zwischen beiden Flügelspitzen induzierte Spannung?

**3.17.\*** Die 6 m langen Rotorblätter eines Hubschraubers drehen sich im Magnetfeld der Erde über einen Ort, an welchem die senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes  $44 \mu\text{T}$  beträgt. Wie groß ist die zwischen Drehachse und Flügelspitzen induzierte Spannung?



### Exotisch: Kerninduktion

Die magnetischen Momente der Elementarteilchen sind nicht nur für die Physiker interessante Untersuchungsobjekte, sondern auch Grundlage für höchst praktische Anwendungen. Protonen, Elektronen und Neutronen besitzen neben den magnetischen Momenten auch einen Eigendrehimpuls (Spin). Der Spin verleiht ihnen Eigenschaften eines Kreisels, das magnetische Moment gibt die Möglichkeit, durch äußere Magnetfelder Drehmomente auszuüben. Eine Erfindung von Physikern aus Novosibirsk gestattet es, unter einer dicken Permafrostschicht Bodenschichten mit flüssigem Wassers aufzuspüren. Das *Hydroskop* funktioniert wie folgt: Eine Leiterschleife von gut 100m Durchmesser wird wie eine riesige flache Spule auf den Boden ausgelegt. Ein starker Stromstoß von einigen Sekunden Dauer sorgt dafür, dass bis in eine Tiefe von ca. 70m das künstliche Magnetfeld viel stärker ist als das natürliche Erdfeld, worauf sich die magnetischen Momente  $m$  der Protonenspins  $S$  der im Erdreich enthaltenen Wassermoleküle nach kurzer Zeit senkrecht zur Erdoberfläche ausrichten. Nach Abschalten des Spulenstroms wirkt nur noch das Erdfeld und erzeugt ein Drehmoment auf die jetzt quer zu ihm gestellten Protonenspins. Ähnlich wie ein schief stehender Brummkreisler unter dem Einfluss der Gewichtskraft beginnen die Protonenspins um die Richtung des Erdmagnetfeldes mit der sog. LARMOR<sup>36</sup>frequenz zu präzedieren. Da alle Protonenspins mit der gleichen Frequenz und dazu in der gleichen Phase präzedieren, addieren sich die einzelnen magnetischen Momente zu einem magnetischen Wechselfeld, welches in der jetzt als Detektor geschalteten Spule eine Induktionsspannung  $U(t)$  hervorruft. Die Unterscheidung zwischen gefrorenem und flüssigem Wasser wird dadurch ermöglicht, dass die Protonenspins von Eis schon nach sehr kurzer Zeit (einige  $\mu\text{s}$ ) wieder in die Erdfeldrichtung zeigen, während die magnetischen Momente der Protonen von flüssigem Wasser eine vergleichsweise sehr lange *Relaxationszeit* aufweisen.



Eine ähnlichen Methode, bei dem man aber zusätzlich zu einem starken konstanten Magnetfeld noch hochfrequente Wechselfelder eingestrahlt, mit denen die Kernspins beeinflusst werden, heißt *NMR (nuclear magnetic resonance)*. Die *Kernspintomografie*, das modernste und sicher aussagekräftigste Verfahren der Bildgebung in der Medizin, beruht darauf, dass die Relaxationszeit der Protonenspins so stark von ihrer chemischen Umgebung abhängt, dass man hierdurch zwischen unterschiedlichen Gewebearten sehr fein differenzieren kann. Der zu untersuchende menschliche Körper wird in einen sehr starken Magneten (*supraleitende* Luftspule mit einer Induktion von mehreren Tesla) geschoben. Spezielle Impulsmethoden gestatten es, jedem Volumenelement u.a. eine spezielle Relaxationszeit zuzuordnen. Auf einem Schnittbild in unterschiedlichen Grauwerten dargestellt, ergeben sich verblüffend scharfe Abbildungen der Organe und deren pathologische Veränderungen. Wichtig ist hierbei, dass ohne jede Belastung durch ionisierende Strahlung sehr wohl Weichteile differenziert werden, ein erheblicher Vorteil gegenüber der RÖNTGEN<sup>37</sup>-Tomografie.

Abb. 3.13 NMR-Tomografische Aufnahme eines Schädels

Die Auswertung der NMR-Daten und die Bilderzeugung sind nicht nur eine Herausforderung an die Computertechnik, sondern stellen auch einen intensiv bearbeiteten Forschungsgegenstand dar<sup>38</sup>



<sup>36</sup> Sir Joseph LARMOR (1857-1942), engl. Physiker; Elektrodynamik; Thermodynamik; Atomphysik; Relativitätstheorie

<sup>37</sup> Wilhelm Conrad RÖNTGEN (1845-1923), dt. Physiker; Entdeckung der X-Strahlen (Bremsstrahlung aus Kathodenstrahlröhren) 1. Nobelpreis für Physik

<sup>38</sup> Bildquelle: <http://www.mpibpc.gwdg.de/abteilungen/NMR/images/nmr.gif>

### 3.5. Selbstinduktion

Wenn eine Spule von einem zeitlich veränderlichen Strom durchflossen wird, ist damit auch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld verbunden, das sie durchsetzt. Hierdurch wird eine Spannung induziert, die *Selbstinduktionsspannung*.

Bei einer Spule mit  $N$  Windungen gilt für die induzierte Spannung laut (3.28)

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} .$$

Ändert sich der Fluss durch die Spule infolge einer Änderung des Spulenstromes, wird in dieser eine Selbstinduktionsspannung erzeugt, die zur zeitlichen Änderung des Stromes proportional ist:

$$\text{Selbstinduktionsspannung } U_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \quad L - \text{Induktivität [L]} = \text{Vs/A} = \text{H} \quad (\text{HENRY}^{39}) \quad (3.31)$$

Vergleicht man beide Gleichungen, erhält man für die Induktivität einer Spule

$$L = \frac{N\Phi}{I} . \quad (3.32)$$



Die Selbstinduktionsspannung ist einer Ursprungspannung vergleichbar und somit wie eine zusätzliche Spannungsquelle im Stromkreis zu behandeln.

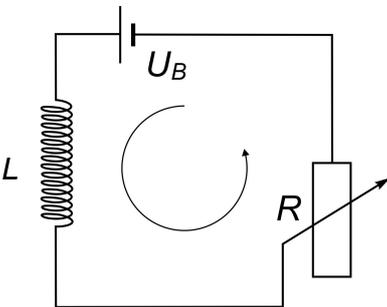


Abb. 3.14 Stromkreis mit Potentiometer und Induktivität

Bei Veränderung der Stellung des Potentiometers ändert sich der Strom durch die Spule. In einem solchen Fall muss die Selbstinduktionsspannung berücksichtigt werden. Im Übrigen gelten auch hier die Kirchhoffschen Regeln.

In einer elektronischen Schaltung wird die Induktivität wie in der Abbildung durch eine stilisierte Leiterschleife dargestellt oder durch ein schwarz gefülltes Rechteck.

Wendet man auf den in Abb.3.14 dargestellten Stromkreis die Maschenregel an, folgt

$$RI = U_B + U_{ind} , \quad (3.33)$$

denn  $U_{ind}$  gehört auf die rechte Seite der Gleichung. Gewöhnlich wird die von der Spule induzierte Spannung jedoch so behandelt, wie ein Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand und dann (natürlich unter Beachtung des Vorzeichens) auf die linke Seite der Maschengleichung geschrieben. Man betrachtet somit die Selbstinduktionsspannung wie eine Spannung, gegen welche die Batteriespannung  $U_B$  antreten muss

$$RI + L \frac{dI}{dt} = U_B . \quad (3.34)$$

Ganz analog ist zu verfahren, wenn mehrere Induktivitäten in einer Masche enthalten sind, allge-

mein gilt

$$\sum_i R_i I_i + \sum_j L_j \frac{dI_j}{dt} = \sum_k U_k . \quad (3.35)$$

<sup>39</sup> Joseph HENRY (1797-1878), am. Physiker, Entdecker der Selbstinduktion und des Elektromagneten mit Eisenkern, Erfinder des Relais als Grundlage der Telegrafie

### Parallel- und Reihenschaltung von Induktivitäten

Zwei Spulen in Reihe geschaltet können betrachtet werden wie eine einzige mit entsprechend höherer Windungszahl. Somit addieren sich die Induktivitäten bei Reihenschaltung. Schaltet man zwei Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  parallel, so gilt nach Glg. 3.31 für die Ersatzinduktivität  $L_g$

$$U = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} = L_g \frac{dI_g}{dt} = L_g \frac{dI_1 + dI_2}{dt}$$

$$\frac{U}{L_g} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2}$$

Woraus folgt:

Induktivität bei Parallelschaltung $L_g^{-1} = \sum L_i^{-1}$ Induktivität bei Reihenschaltung $L_g = \sum L_i$	(3.36)
--	--------

### 3.6. Energie des Magnetfeldes

Beim Einschalten des Stromflusses durch eine Spule werden Ladungsträger gegen die Selbstinduktionsspannung verschoben. Folglich wird hierbei Arbeit verrichtet, die als Energie des durch die Spule erzeugten Magnetfeldes in diesem gespeichert ist. Sei während des Einschaltens die Stromstärke auf den Zwischenwert  $I'$  angestiegen. Im darauf folgenden Zeitintervall  $dt$  steigt die Stromstärke um  $dI'$  und der magnetische Fluss um  $d\Phi$ . Dabei wird eine Spannung  $U_{ind}$  induziert. Die hierzu benötigte Energie  $dW$  wird von der äußeren Spannungsquelle geliefert ( $U_B$  tritt gegen  $U_{ind}$  an) und als Feldenergie gespeichert. Man erhält

$$dW = -I'(t)U_{ind}(t)dt = I' L \frac{dI'}{dt} = L I' dI'$$

und nach Integration

$$W_{mag} = \int_0^I L I' dI' = \frac{1}{2} L I^2 \quad . \quad (3.37)$$

Setzt man in (3.37) die Beziehungen (3.26, 3.32) sowie  $B = \mu_r \mu_0 H$  für eine lange Spule mit  $H = NI/l$  ein, erhält man für den Energieinhalt des Magnetfeldes in der langen Spule

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 l A \quad (3.38)$$

mit  $l$  der Spulenlänge und  $A$  dem Spulenquerschnitt, deren Produkt das Volumen des felderfüllten Raumes darstellt. Dividiert man die Energie  $W_{mag}$  durch diesen Term, erhält man die Energiedichte

Energiedichte des Magnetfeldes $w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} H B \quad [w] = \text{Ws m}^{-3}$	(3.39)
---	--------

Die Analogie dieser Formel zur Energiedichte des elektrischen Feldes ist unverkennbar. Die Beziehung 3.39 wurde hier für das Magnetfeld in einer langen Spule abgeleitet, sie gilt in dieser Form aber auch für jegliches Magnetfeld!

### Übungen

**3.18.** Eine quadratische Spule ( $l = 20\text{cm}$ , Kantenlänge  $a = 5\text{cm}$ ) hat  $N = 1000$  Windungen und eine Eisenkern  $\mu_r = 3000$ . Wie groß ist die Induktivität  $L$  dieser Spule?

*Lösung:* Wir verwenden die Ergebnisse aus Glg. 3.34:  $L I^2 = \mu_r \mu_0 H^2 l A$  und setzen für die „lange“ Spule die Beziehung  $H = NI/l$  für das Magnetfeld ein:  $L = \mu_r \mu_0 N^2 A/l$ . Diese Formel kann zur Berechnung der Induktivität einer jeden langen Spule dienen.

Einsetzen der Werte ergibt

$$L = \frac{3000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs} \cdot 1000^2 \cdot 0,05^2 \text{m}^2}{\text{Am} \cdot 0,2\text{m}} = \underline{\underline{47 \text{ H}}}$$

**3.19.** Um einen ringförmigen Spulenkörper (Radius der Mittellinie des Torus beträgt 50mm, Querschnittsfläche  $1\text{cm}^2$ ) aus einem Ferritwerkstoff mit  $\mu_r = 300$  sind 1000 Windungen angebracht. Der Spulenstrom beträgt 0,1A. Berechnen Sie Flussdichte und Energieinhalt im Spulenkörper.

*Lösung:* Man geht von der Formel für das Magnetfeld einer Ringspule aus und nimmt an, dass sein Betrag innerhalb des Spulenkörpers konstant sei:  $H=NI/2\pi R$ ;  $B=\mu_r \mu_0 H$ . Für die magnetische Induktion im Spulenkörper erhält man

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R} = \frac{300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs} \cdot 1000 \cdot 0,1\text{A}}{\text{Am} \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{m}} = 0,12 \text{ T}$$

und für die gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{B^2 l A}{2\mu_r \mu_0} = \frac{0,12^2 \text{V}^2 \text{s}^2 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot \text{Am}}{\text{m}^4 \cdot 2 \cdot 300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs}} = 0,6 \text{ mWs}$$

**3.20.** Mit einem Supraleitungsmagneten wird bei  $\mu_r=1$  ein Magnetfeld der Flussdichte  $B=2\text{T}$  erzeugt. Welche Energie ist im Spulenvolumen von  $V=1\text{m}^3$  gespeichert? Welches Volumen müsste ein Eisenkern mit  $\mu_r=4000$  und  $B=1\text{T}$  haben, um die gleiche Energie zu speichern?

### 3.7. Magnetfeld in Materie

Wir haben zwei wichtige Gesetzmäßigkeiten kennengelernt, durch die Magnetfelder charakterisiert werden können. Das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol ist eine Eigenschaft, die das  $H$ -Feld auszeichnet, die Lorentzkraft und damit verbundene Effekte wie das Induktionsgesetz und Hall-Effekt sind typisch für das  $B$ -Feld. Beide Felder sind durch die Materialgleichung (3.18) gekoppelt.

Die relative Permeabilität  $\mu_r$  ist eine Materialkonstante, die jedoch außerdem noch stark von Magnetfeldstärke, Frequenz sowie der Temperatur abhängt. Gemessen werden kann diese Größe z.B. mittels einer Kreisspule, durch deren Wicklungen ein bekannter Strom fließt und deren Spulenkörper aus dem zu untersuchenden Werkstoff besteht. Unter Verwendung der Formel für das Magnetfeld einer langen Spule berechnet man  $H$ . Das  $B$ -Feld wird gemessen, indem man z.B. eine Hall-Sonde über einen sehr engen Schlitz in den Spulenkörper einführt. Je nach den Werten von  $\mu_r$  und den verursachenden Wirkmechanismen unterscheidet man:

$\mu_r < 1$	Diamagnetika
$\mu_r > 1$	Paramagnetika
$\mu_r \gg 1$	Ferromagnetika

Der *Diamagnetismus* ist eine Eigenschaft aller Stoffe. Das  $B$ -Feld ist hierbei sehr geringfügig ( $10^{-6}$ ) kleiner als im Vakuum. Diesen Effekt kann man sich erklären indem man eine Beeinflussung der Elektronenbahnen in den Molekülen unter dem Einfluss des Magnetfeldes annimmt. Dies führt zu einem sehr kleinen zusätzlichen Feld, welches dem äußeren entgegengesetzt ist (vergl. Lenzsche Regel). Viel stärker als der Diamagnetismus ist bei bestimmten Stoffen der *Paramagnetismus*. Ursache sind die magnetischen Momente der Elektronen, die sich im äußeren Feld ausrichten und dieses verstärken. Dass dieser Effekt nicht bei allen Stoffen auftritt hat seine Ursache in der Eigenschaft der Elektronen, stets solche Bahnen in Atomen oder Molekülen einzunehmen, bei denen sich die magnetischen Momente paarweise antiparallel ausrichten und somit kompensieren. Moleküle und Atome mit *ungepaarten* Elektronen haben dagegen relativ starke magnetische Momente. Da neben dem aus dem Elektronenspin herrührenden magnetischen Moment auch noch Momente infolge der Bahnbewegung des Elektrons entstehen, sind nicht alle Elemente mit ungerader Ordnungszahl paramagnetisch.

Das magnetische Moment der Elektronen kann sich im Magnetfeld ausrichten und hat dann zwei mögliche Einstellungen mit Komponenten  $\pm \frac{h}{4\pi}$  in Feldrichtung ( $h$  ist die PLANCK<sup>40</sup>sche Konstante, s.u.). Allerdings wirkt deren Ausrichtung die thermische Bewegung der Teilchen entgegen, so dass das gesamte magnetische Moment einer paramagnetischen Probe nur ein kleiner Bruchteil der Summe der magnetischen Momente der ungepaarten Elektronen darstellt. Immerhin ist dieser Effekt etwa 1000fach stärker als der Diamagnetismus.

Von besonderer Bedeutung für die praktische Anwendung ist der *Ferromagnetismus*. Die in diesen Stoffsystemen enthaltenen ungepaarten Elektronenspins üben eine starke Wechselwirkung aufeinander aus, infolge der für benachbarte Spins eine parallele Ausrichtung energetisch vorteilhaft ist. Diese sogenannte HEISENBERG<sup>41</sup>sche *Austauschwechselwirkung* wirkt unabhängig vom Vorhandensein eines äußeren Magnetfeldes. Als Folge bilden sich makroskopische Bereiche (*Domänen*) mit paralleler Spinorientierung heraus. Diese auch WEISS<sup>42</sup>sche *Bezirke* genannten Gebiete sind wie kleine Magnete zu betrachten, die ohne äußeres Feld ungeordnet sind. Bei Einschalten eines Magnetfeldes wachsen die Bereiche mit Magnetisierung in Feldrichtung auf Kosten der energetisch ungünstigeren Ausrichtungen. Der Umordnungsprozeß ist dann abgeschlossen, wenn infolge eines sehr starken äußeren Feldes alle magnetischen Momente in Feldrichtung verlaufen, der Ferromagnet hat dann seine *Sättigungsmagnetisierung* erreicht.

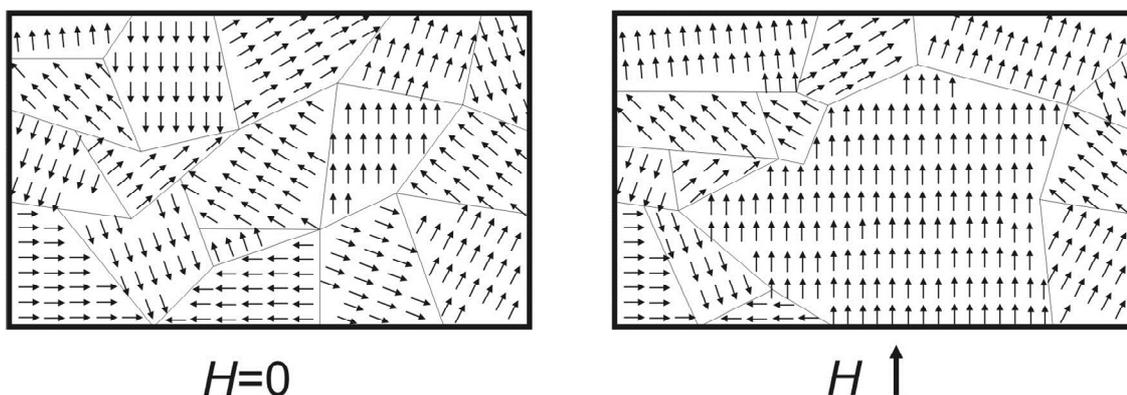


Abb. 3.15 Weiss'sche Bezirke

Bei Ferromagneten ordnen sich unterhalb der Curietemperatur benachbarte ungepaarte Elektronenspins als Folge der Heisenbergschen Austauschwechselwirkung spontan vorzüglich parallel aus, bilden hierbei die Weiss'schen Bezirke. Bei Einschalten eines äußeren Magnetfeldes wachsen die Bereiche mit Dipolorientierung in Feldrichtung auf Kosten solcher mit anderen Orientierungen. Bei Erreichen der Sättigung sind alle Elektronenspins in Feldrichtung orientiert.

Der Ferromagnetismus weist eine charakteristische Temperaturabhängigkeit auf. Wird ein solcher Stoff über eine bestimmte Temperatur  $T_c$  erwärmt (*CURIE*<sup>43</sup>-*Temperatur*), verliert er seinen Ferromagnetismus und wird zum Paramagneten. Wie der Name vermuten lässt, sind Eisen und Eisenverbindungen ferromagnetisch. Das ist in der Tat so, die Permeabilitäten liegen oft weit über  $10^3$ . Ferromagnetismus weisen jedoch noch viele andere Elemente und deren Verbindungen auf, von größter praktischer Bedeutung sind magnetische Keramiken (Ferrite), eher exotisch anmutend sind organische Polymere mit ferromagnetischen Eigenschaften.

<sup>40</sup> Max Karl Ernst Ludwig PLANCK (1858-1947), dt. Physiker; Begründer der Quantenphysik, Nobelpreis 1918; Thermodynamik; Relativitätstheorie

<sup>41</sup> Werner HEISENBERG (1901-1976), dt. Physiker; Turbulente Flüssigkeiten, Unschärfeleration (1932 NP), Matrizenmechanik, Ferromagnetismus, dt. Uranprojekt, setzte sich später gegen atomare Wiederbewaffnung ein – Göttinger Manifest 1957, arbeitete 1927-1931 in Leipzig

<sup>42</sup> Pierre WEISS (1865-1940), frz. Physiker; Ferromagnetismus; Curie-Weiss-Gesetz; Domänen; Molekularfeld

<sup>43</sup> Pierre CURIE (1859-1906), frz. Physiker; Radiochemie mit seiner Frau Marie Nobelpreis 1903; Piezoelektrizität; Kristallphysik; Temperaturverhalten von Dia- und Paramagnetika

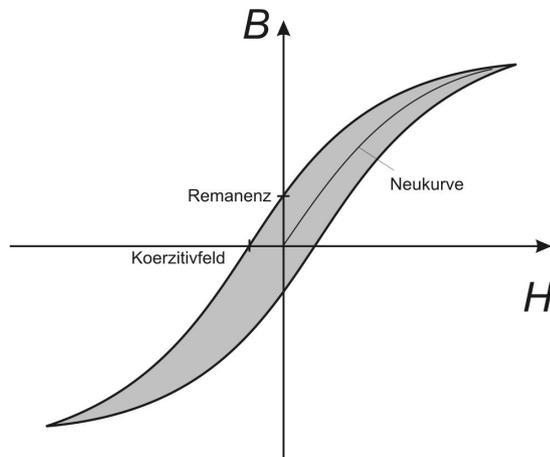
Tabelle 3.1 Curietemperaturen von Ferro- und Ferrimagnetischen Stoffen (ab Raumtemp. in °C)

Fe	770	Cu-Mn-Al-Leg.	60-440	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	585
Co	1130	CrO <sub>2</sub>	119	Nd-Fe-B	310
Ni	360	Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	287	MüMetall	400
Gd	19	CuOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	455	SmCo <sub>5</sub>	720
AlNiCo	720-855				

Man unterscheidet zwischen hartmagnetischen und weichmagnetischen Werkstoffe. Bei Weichmagneten sind *Remanenz* sowie *Koerzitivkraft* gering, die *Hysterese* entsprechend schlank (s. Abb.3.16). Anwendung finden diese Stoffe bei Geräten zur Erzeugung und Umwandlung elektrischer Energie (Transformatoren, Generatoren, Motoren) sowie in der Hochfrequenztechnik (Antennenstäbe, Übertrager, Filter). Hartmagnetische Werkstoffe sind alle Dauermagnete. Für die Informatik von besonderem Interesse ist die Verwendung als Material für Magnetspeicher (Magnetbänder, Disketten, Festplatten).

### Abb. 3.16 Magnetische Hysterese

Abhängigkeit der magnetischen Induktion  $B$  von der Feldstärke  $H$ . Wird das Material erstmals einem Magnetfeld ausgesetzt, folgt  $B(H)$  der *Neukurve*. Bei Verringerung des  $H$ -Feldes verringert sich zwar die Induktion, es verbleibt aber infolge einer nicht vollständig verschwindenden Restmagnetisierung die *Remanenz*. Erst bei Anlegen eines Gegenfeldes (*Koerzitivfeld* oder *-kraft*) verschwindet das  $B$ -Feld, um sich bei noch anwachsendem  $H$ -Feld dann in der Richtung umzukehren. Die während eines vollständigen Zyklus umschriebene Fläche entspricht der Arbeit je Volumeneinheit, die bei der Ummagnetisierung letztlich in Wärme umgewandelt wird.



### 3.8. Magnetische Datenspeicher

Hier finden magnetische Werkstoffe Anwendung, deren Hysterese einen nahezu rechteckigen Verlauf hat, mit entsprechend hoher Remanenz sowie Koerzitivkraft. Als *Ferritkernspeicher* wurden früher filigrane Gebilde aus mit Drähten verbundenen winzigen Ferritringen verwendet. Heute von Festkörperschaltkreisen längst verdrängt, bildeten sie früher als RAM mit Kapazitäten von höchstens einigen hundert Kilobytes die Arbeitsspeicher der ersten Rechnergenerationen.

Im Unterschied zu den Ferritkernspeichern finden heute noch magnetische Speichermedien auf Bändern, Disketten oder Festplatten breite Verwendung. Das Funktionsprinzip ist in diesen Fällen identisch. Auf einem nichtmagnetischen Trägermaterial befindet sich eine dünne magnetisierbare Schicht aus Eisenoxid, Chromdioxid oder einer Metalllegierung. Die Magnetisierung erfolgt mittels eines Schreibkopfes, bestehend aus einer Spule um einen geschlitzten weichmagnetischen Ringkern. Der Spulenstrom erzeugt ein je nach Stromrichtung veränderliches Magnetfeld, welches besonders am Luftspalt (in der Regel befindet sich im Spalt unmagnetisches Material, schön blank poliert, um den Datenträger zu schonen) als Streufeld austritt und die magnetisierbare Schicht durchsetzt. Diese enthält folglich Bereiche mit unterschiedlicher Magnetisierung, in deren Richtung jeweils die Information enthalten ist. An einem analog aufgebauten Lesekopf vorbeigeführt, induzieren die magnetisierten Bereiche Spannungen, deren Vorzeichen die ausgelesene Information enthält.

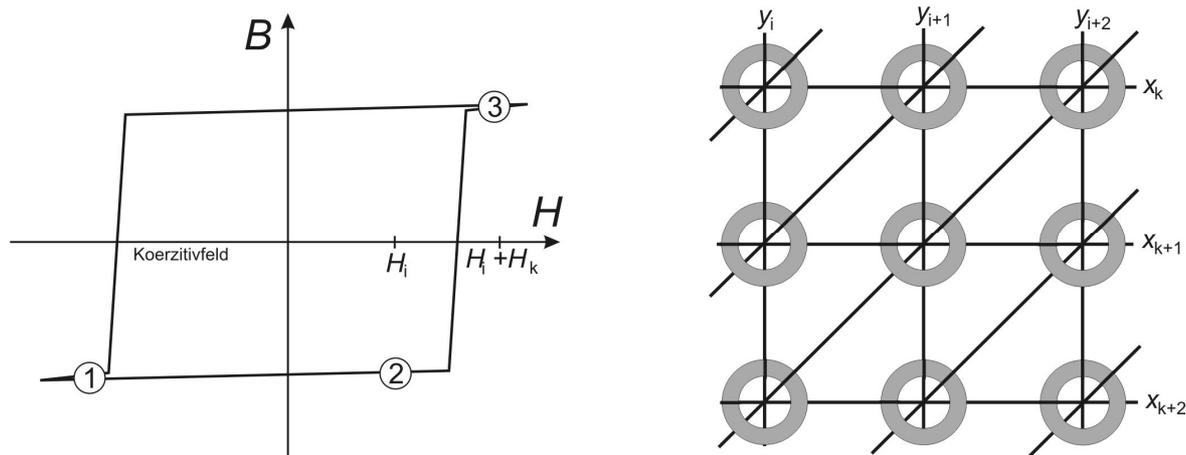


Abb. 3.17 Wirkungsweise eines Ferritkernspeichers

Jeder Ring der Speichermatrix rechts realisiert durch seine Restmagnetisierung ein Bit Information. Durch jeden der Ringe verlaufen je ein horizontaler sowie vertikaler Draht. Die Indizes sind vergleichbar der Indizierung einer Matrix. Eine definierte Magnetisierung wird dadurch erreicht, dass durch alle x- und y- Drähte ein Stromstoß erfolgt, durch den jeder Ring einem ausreichend starken H-Feld ausgesetzt wird, wodurch die Position (1) in der links dargestellten Hysteresis eingenommen wird, welcher wir die Information "L" zuschreiben. Soll jetzt in das Matrixelement  $(x_k; y_i)$  die Information "H" eingeschrieben werden, wird ein Strom durch den Draht  $x_k$  geschickt, der an allen Ferritringen dieser Zeile ein Magnetfeld  $H_k$  erzeugt, welches aber geringer als das Koerzitivfeld ist, demzufolge an Position (2) keine Ummagnetisierung bewirkt. Erst ein gleichzeitiger Stromstoß durch den Draht  $y_i$  bewirkt ein solches Resultat an (3), und zwar nur für den Ferritring mit  $(x_k; y_i)$ .

Das Auslesen erfolgt, indem zeilen- und spaltenweise eine Ummagnetisierung (z.B. in Richtung "H") versucht wird. Ist sie erfolgreich (das wird durch einen Induktionsspannungsstoß am zusätzlich durch jeden Ring gefädelten diagonalen Draht detektiert), muss anschließend wieder rückmagnetisiert werden.

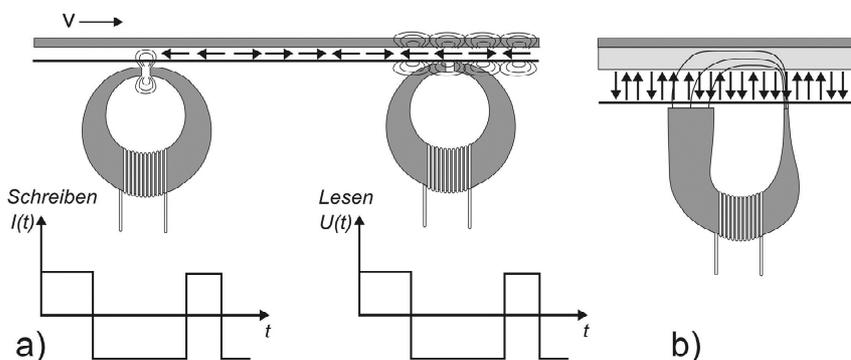


Abb. 3.18 Wirkungsweise eines Magnetbandspeichers

Zwei im Aufbau prinzipiell ähnliche Ringspulen "schreiben" bzw. "lesen" die Information als Richtung von Magnetisierungen kleiner Bereiche der Magnetschicht.

a) *longitudinale* Technik

b) *perpendicular recording*

Die bei Festplatten früher vorherrschende *longitudinale* Aufzeichnungstechnik ermöglichte eine maximale Datendichte von 15 bis 30 Gigabit pro Quadratzentimeter. Hierbei liegt die Magnetisierungsrichtung parallel zur Oberfläche. *Perpendicular recording* ermöglicht dagegen eine etwa 10fach höhere Datendichte. Der schmale Schreibkopf bündelt die Feldlinien auf eine kleine magnetisierbare Fläche. Der zweite Magnetpol ist deutlich breiter, wodurch die Feldstärke dort unterhalb der Koerzitivkraft bleibt. Zum besseren Schluss der Feldlinien ist eine zusätzliche weichmagnetische Zwischenschicht notwendig, die quasi wie das Joch eines Hufeisenmagneten wirkt.

### 3.9. Der Wechselstromgenerator

Die Erzeugung von Wechselstrom erfolgt meist mit einer Anordnung, die im einfachsten Fall durch eine im Magnetfeld rotierende Leiterschleife dargestellt werden kann.

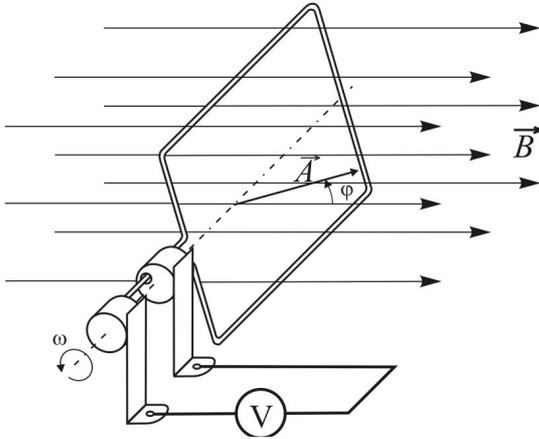


Abb. 3.19 Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld

Die Drehachse ist hier senkrecht zu den Feldlinien der (homogenen) Flussdichte  $\vec{B}$  orientiert. Der Winkel  $\varphi$  zwischen dem Flächenvektor  $\vec{A}$  und der Flussdichte  $\vec{B}$  ist der Rotationswinkel  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ . Die induzierte Spannung wird über die beiden Schleifkontakte abgenommen und mit einem Voltmeter gemessen. Verantwortlich für die Induktion ist die Zeitabhängigkeit der Flächenprojektion  $A_n(t) = A \cos\varphi(t)$

Die Leiterschleife wird durchsetzt von einem Magnetfluss

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos(\varphi) = \Phi_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.40)$$

Wie aus (3.40) ersichtlich, ändert sich der Fluss durch die Leiterschleife in Abhängigkeit vom Rotationswinkel  $\varphi$ , also wie die Projektion der Schleifenfläche  $A$  auf die Normalebene des Magnetfeldes. Dadurch wird in der Leiterschleife eine Spannung und, bei geschlossenem Stromkreis, ein Strom erzeugt. Beide, Strom und Spannung, sind proportional zu  $\frac{d\Phi}{dt}$ . Das Induktionsgesetz erlaubt uns die Berechnung dieser Größen:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \Phi_0 \cdot \sin(\omega t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$U_{ind} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.41)$$

Bei  $N$  Windungen einer Leiterschleife mit gleicher Schleifenfläche addieren sich die Spannungen jeder einzelnen Windung, wir erhalten somit  $U_{ind} = N U_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Wird das Voltmeter in der Anordnung nach Abb. 3.19 durch ein Amperemeter ersetzt, kann der in der Leiterschleife fließende Strom gemessen werden. Da das Strommessgerät nur einen sehr kleinen Innenwiderstand aufweist und die Leiterschleife auch so gebaut werden kann, dass ihr Leitungswiderstand sehr gering ist, könnte man unter diesen Umständen einen sehr hohen Strom erwarten, der im Idealfall gegen unendlich strebt. Dies sollte einher gehen mit unendlich hoher elektrischer Leistung ( $P = UI$ )! Spätestens hier werden wir skeptisch (eine solche Leiterschleife ließe sich ja selbst im Magnetfeld von nur mäßiger Stärke gar nicht drehen, denn die aufzuwendende mechanische Leistung wäre ja mindestens ebenso groß wie die elektrische) und neugierig auf die Ergebnisse einer quantitativen Betrachtung.

Bei kurzgeschlossener Leiterschleife und vernachlässigtem Innenwiderstand wird die induzierte Spannung durch die Selbstinduktionsspannung der Schleife kompensiert (die induzierte Spannung tritt gegen die Selbstinduktionsspannung an):

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (3.42)$$

Den Strom durch die Leiterschleife erhalten wir durch Integration und einfache Umformungen:

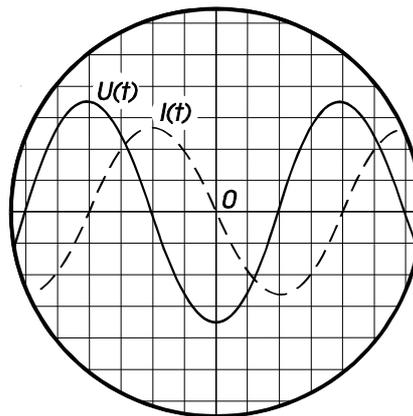
$$\int U dt = L \cdot I$$

$$I = -\frac{\Phi_0}{L} \cos(\omega t + \varphi_0) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) \quad (3.43)$$

Vergleicht man die Ergebnisse in den Gln. 3.41 und 3.43 erkennt man, dass die Zeitabhängigkeiten von Strom und Spannung gleichermaßen durch Sinusfunktionen beschrieben werden. Es tritt aber eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von  $\pi/2$  auf, die Spannung eilt dem Strom um eine viertel Periode voraus, s. Abb. 3.20.

Abb. 3.20 Zeitverlauf von Strom und Spannung an der kurzgeschlossenen Leiterschleife

Abgebildet ist der Bildschirm eines Zweistrahloszilloskops, welches ermöglicht, den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung gleichzeitig zu verfolgen. Die Phasenverschiebung von  $+\pi/2$  der Spannung gegenüber dem Strom ist daran zu erkennen, dass die Spannung  $U(t)$  ihr Maximum um eine viertel Periode eher erreicht, als der Strom  $I(t)$ . Da die Abtastung des Bildschirms durch den Elektronenstrahl beim Oszilloskop von links nach rechts erfolgt, erscheint die  $U(t)$ -Kurve gegenüber dem Verlauf  $I(t)$  nach links versetzt.



Die Amplitude der induzierten Spannung hängt von der Kreisfrequenz ab, die des Stromes dagegen nicht (letztere hat überdies einen endlichen Maximalwert). Hier erinnern wir uns an die *Lenzsche Regel*, die besagt, dass induzierte Spannungen und Ströme ihrer Ursache entgegen wirken. Die Ursache der induzierten Spannungen und Ströme liegt in unserem Fall im sich gegenüber der Leiterschleife *ändernden* Magnetfeld. Also wird der durch die Induktion erzeugte Stromfluss mit einem Magnetfeld verbunden sein, welches den *Flussänderungen* des äußeren Feldes durch die Schleife entgegengesetzt ist. Bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes ist der die Leiterschleife durchsetzende Magnetische Fluss (als Summe des äußeren Feldes sowie des induzierten) also konstant! Dies lässt sich eindrucksvoll an einem Supraleiter zeigen, der in ein Magnetfeld gebracht wird. Während des Einbringens induziert das Anwachsen des den Supraleiter durchsetzenden Magnetischen Flusses ein Gegenfeld, so dass der Fluss im Inneren des Supraleiters konstant Null ist, äußeres und inneres Feld sind einander entgegen gerichtet. Bei ausreichend starkem äußeren Feld sind die hierbei auftretenden abstoßenden Kräfte groß genug, den Supraleiter über einem anderen Magneten schweben zu lassen (s. Vorlesungsversuch zum Meissner-Ochsenfeld-Effekt).

Wie groß ist die Leistung einer im Magnetfeld rotierenden Leiterschleife? Bekanntlich erhält man die Leistung aus dem Produkt von Strom und Spannung. Da beide zeitabhängig sind, ergibt sich auch eine zeitabhängige Leistung  $P(t) = U(t) I(t) = \frac{\omega}{L} \Phi^2 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega}{2L} \Phi^2 \sin 2\omega t$ .

Diese Leistung dient dazu, das zeitabhängige Magnetfeld der Leiterschleife auf-(und ab-)zubauen, tritt also als Feldenergie in Erscheinung. Im Mittel ist diese Leistung aber, ebenso wie die zur Aufrechterhaltung der Rotation benötigte mechanische Leistung, gleich Null. Man bezeichnet sie deshalb als *Blindleistung*  $Q$ . Bei Berücksichtigung eines Ohmschen Widerstandes der Spule („reale“ Spule) gilt für die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom  $I = I_0 \sin \omega t$  und Spannung  $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , die an den Anschlüssen der Spule gemessen wird,  $0 < \varphi < 90^\circ$ .

Eine ganz ähnliche Betrachtung lässt sich übrigens auch für Ströme und Spannungen am Kondensator anstellen. Die Phasenverschiebung ist in diesem Falle negativ  $-90^\circ < \varphi < 0$  und weist beim idealen Kondensator (kein Ohmscher Widerstand) den niedrigsten Wert auf. Zur Berechnung solcher Phasenbeziehungen wird im Kapitel 4 die Methode der *Komplexen Wechselstromrechnung* angewendet.

### 3.10. Der Effektivwert von Strom und Spannung

In einem Ohmschen Widerstand  $R$  wird keine Energie in Form von elektrischen oder magnetischen Feldern gespeichert, sondern elektrische sofort in thermische Energie umgesetzt (dissipiert). Zur Berechnung der elektrischen Leistung an einem Widerstand zum Zeitpunkt  $t$  ist auch hier das Produkt von Spannung und Strom zu bilden:  $P(t) = U_R(t) I(t)$ .  $U_R$  ist die am Widerstand abfallende Spannung. Sie ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz  $U_R(t) = R I(t)$ . Somit tritt am Ohmschen Widerstand keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auf. Offensichtlich ist auch die am Widerstand umgesetzte Leistung zeitabhängig. Wir bestimmen gleich die mittlere Leistung und führen die Mittelung über den Zeitraum einer Periode  $T$  der Wechselspannung durch. Wir erhalten für die *Wirkleistung*

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{1}{T R} \int_0^T U^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T R} \int_0^T U_0^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{2 R} \\ \bar{P} &= \frac{U_0^2}{2 R} = \frac{I_0^2 R}{2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Diese mittlere Leistung vergleicht man mit Bedingungen, bei denen bei einer Gleichspannung eine Ohmsche Last die gleiche Leistung aufnehmen würde und definiert so die *Effektivwerte* von Spannung und Strom:

$$\bar{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 R.$$

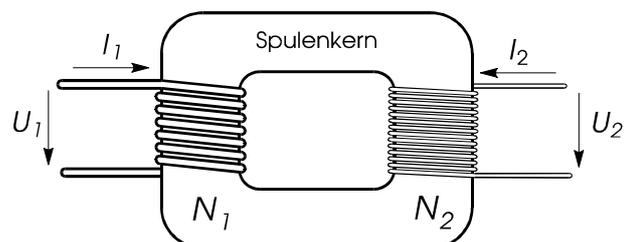
Effektivwerte von Strom und Spannung $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ , $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$	(3.45)
--	--------

### 3.11. Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, Primärspule und Sekundärspule mit i.a. verschiedenen Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ , die von einem gemeinsamen Magnetfluss durchsetzt werden. Dieser Magnetfluss wird meist durch einen hochpermeablen Kern (Ferrit oder Paket aus Trafoblech) gebündelt. Hierdurch wird eine hohe Energiedichte des Magnetfeldes im Spulenkern erreicht. Weiterhin treten bei guter Kopplung nur wenige Feldlinien aus dem Transformator aus, die Störwirkung nach außen wird begrenzt und die Energieübertragung zwischen den gekoppelten Spulen verbessert.

Abb. 3.21 Transformator

Bei niederfrequenten Wechselströmen besteht der Spulenkörper meist aus einem Paket hochpermeabler Trafobleche, deren einzelne Lagen zur Verminderung von Wirbelstromverlusten elektrisch isoliert sind. Bei Hochfrequenzanwendungen werden ausschließlich Ferritkörper verwendet.



Folgende stark vereinfachte(!) Betrachtung soll das Wirkprinzip des Transformators erläutern: Eine Änderung der an der Primärspule anliegenden Spannung ist nach dem Induktionsgesetz mit einer Änderung von  $\dot{\Phi}$  verbunden:

$$U_1(t) = \frac{N_1 \cdot d\Phi}{dt}.$$

Die Primärspule wird als Verbraucher wirksam, aus diesem Grunde das positive Vorzeichen. In der Sekundärspule induziert dieselbe Flussänderung  $\dot{\Phi}$  die Spannung

$$U_2(t) = -\frac{N_2 \cdot d\Phi}{dt}.$$

Daraus ergibt sich die Spannungsübersetzung des Transformators zu

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

Genau genommen gilt diese Gleichung nur für den idealen unbelasteten Trafo, also ohne Ohmschen Widerstand beider Wicklungen sowie mit offenen Klemmen an der Sekundärwicklung, an denen nur die Spannung gemessen wird (*Leerlauf*). Der Primärstrom  $I_1$  ist dann ein reiner Blindstrom und  $U_1$  und  $U_2$  sind gegenphasig.

Beim *belasteten* Transformator treten durch induktive bzw. kapazitive Lasten Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung sowohl auf Primär- als auch auf Sekundärseite auf. Bei Annahme einer vollständigen magnetischen Kopplung zwischen Primär- und Sekundärspule (keine Streuung der Feldlinien) sowie Vernachlässigung von Energieverlusten durch Hysterese (sog. *Eisenverluste*) und Ohmschen Widerstand (sog. *Kupferverluste*) der Wicklungen gilt  $P_1 = P_2$  bzw. (s. hierzu Glg. 4.11)

$$U_1 \cdot I_1 \cos \varphi_1 = U_2 \cdot I_2 \cos \varphi_2.$$

Der andere Grenzfall des Trafos zum Leerlauf ist der *Kurzschluss*. Die in der Sekundärwicklung induzierte *Gegeninduktionsspannung* wird vollständig durch die *Selbstinduktionsspannung* aufgezehrt. Beide Ströme verlaufen gegenphasig. Somit folgt aus der Leistungsbilanz

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}} \quad (3.46)$$

Durch eine geringe Wicklungszahl der Sekundärspule besteht also die Möglichkeit zur Erzeugung sehr starker Ströme, durch eine hohe Wicklungszahl können sekundärseitig sehr hohe Spannungen erzeugt werden. Das negative Vorzeichen in (3.46) findet i.a. keine Beachtung, da durch willkürliche Wahl der Anschlüsse bzw. Wicklungssinn der Sekundärspule stets die gewünschte Strom- bzw. Spannungsrichtung eingestellt werden kann.

Transformatoren werden in der Technik vielseitig angewendet:

- Umwandlung der Amplituden von Wechselspannungen und -Strömen je nach Bedarf
- Anpassung an den Wechselstromwiderstand eines Verbrauchers (Impedanzwandler)
- Verlustarme Energieübertragung durch Verwendung von Hochspannungsleitungen
- Leistungsbegrenzung durch Ausnutzung von Sättigungseffekten (Drossel)
- Trennung eines Netzanschlusses vom Erdpotential (Trenntrafo, Arbeitsschutz!)

**Übungen**

**3.22.** Eine 100 W Glühlampe wird an die Netzspannung von 230 V angeschlossen. Berechnen Sie Effektiv- und Scheitelwert der Stromstärke sowie die elektrische Energie, welche die Lampe in der Zeit von 3 h umsetzt.

**3.23.** Ein Hochstromtransformator hat sekundärseitig eine einzige Windung aus sehr dickem Kupferdraht. Wie groß ist der darin fließende Strom, wenn die Primärspule mit 500 Windungen bei Netzanschluss eine Leistung von 60 W aufnimmt?

**3.24.\*** Auf einen Ringkern aus Eisen (Dichte  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ ), der Permeabilität  $\mu_r = 4000$  mit der Länge (der "Seele")  $l = 200 \text{ mm}$  und dem Durchmesser  $d_i = 20 \text{ mm}$  ("lange" Ringspule) befinden sich Primär- und Sekundärwicklungen eines Trafos.

- Schätzen Sie unter Vernachlässigung aller Übertragungsverluste ab, wie groß die maximal übertragbare Leistung bei Netzfrequenz ist, wenn zur Vermeidung von Sättigungseffekten eine maximale Induktion von 0,8 T nicht überschritten werden darf!
- Wie groß ist diese Leistung, wenn der Trafo in einem Schaltnetzteil eingesetzt wird, wobei die Betriebsfrequenz 25 kHz beträgt, die Permeabilität des Ferritwerkstoffes (Dichte  $\rho = 4,1 \text{ g/cm}^3$ ) bei dieser Frequenz  $\mu_r = 1000$  und der maximal zulässige Spitzenwert der Induktion 0,4 T betragen darf?
- Vergleichen Sie das Leistung/Masse - Verhältnis der Kerne beider Trafos.

*Hinweis:* Die bei jeder Ummagnetisierung (also zweimal innerhalb einer Schwingungsperiode des elektrischen Stromes!) des Kernes übertragene Arbeit ist als magnetische Energie im Spulenkern zwischengespeichert.

*Lösung:* Der Ringkern entspricht einer langen Spule der Länge  $l$  und kreisförmigem Kernquerschnitt mit dem Durchmesser  $d_i$ . Zu berechnen ist der Energieinhalt bei auf  $B_{\max}$  magnetisiertem Spulenkern. Diese Energie wird  $2f$  mal ( $f$ -Frequenz) während einer Sekunde auf die Sekundärseite übertragen. Hieraus kann man die Leistung  $P = \Delta W / \Delta t = \Delta W \cdot 2f$  berechnen

$$\Delta W = B \cdot H \cdot V / 2 = \frac{B^2 V}{2\mu_r \mu_0} = \frac{B^2 \cdot l \cdot A}{2\mu_r \mu_0}$$

$$P = 2f \cdot \Delta W = \frac{f \cdot B^2 \cdot l \cdot \pi d_i^2}{\mu_r \mu_0 4}$$

zu a)  $P_a = 0,4 \text{ W}$

zu b)  $P_b = 200 \text{ W}$

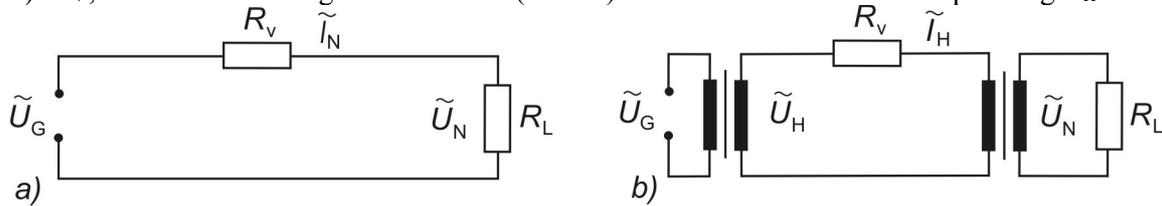
zu c)  $\rho_a = \frac{m_a}{V_a}$ ; hieraus folgt:  $\frac{P_b / m_b}{P_a / m_a} = \frac{m_a \cdot P_b}{m_b \cdot P_a} = \frac{\rho_a \cdot P_b}{\rho_b \cdot P_a} = \underline{\underline{944}}$

Die Verwendung eines Schaltnetzteiles führt also zu einer ganz erheblichen Einsparung von Masse.

### 3.25. Leistungsübertragung mittels Hochspannung

Die Leistung  $P$  soll an einem Ohmschen Widerstand  $R_L$  wirksam werden. Der Widerstand der Zuleitung sei  $R_V$ , es gilt  $R_V \ll R_L$ . Bestimmen Sie die am Leitungswiderstand auftretenden Leistungsverluste

- $P_V$ , wenn die Generatorspannung  $U_G$  direkt über diese Leitung eingespeist wird,
- $P_V'$ , wenn die Zuleitung mittels zweier (idealer) Transformatoren mit Hochspannung  $U_H$  betrieben wird.

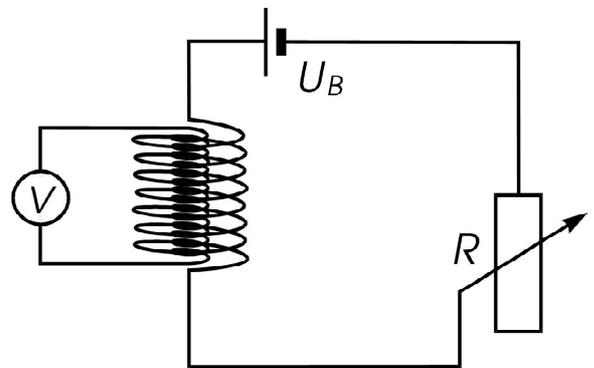


**Lösung:** Die Verlustleistung am Leitungswiderstand berechnet sich nach  $P_V = I_{eff}^2 \cdot R_V$ . Somit folgt aus

$$(3.42) \text{ für das Verhältnis der Verlustleistungen } \frac{P_V}{P_V'} = \left( \frac{I_N}{I_H} \right)^2 = \left( \frac{U_H}{U_N} \right)^2.$$

**3.26.\*** Zwei jeweils 15 cm „lange“ eisenfreie Zylinder­spulen sind konzentrisch und im gleichen Wicklungs­ sinn gewickelt. Die äußere Spule hat 2500 Windungen und einen Durchmesser von 2 cm. Die innere Spule entsprechend 1250 Windungen bei einem Spulendurch­ messer von 10 mm. Der Strom wird durch ein Potentiometer innerhalb von 2 Sekunden von 5 A auf 15 A gere­ gelt (linearer Anstieg). Welche Spannung wird am Messgerät abgelesen und wie sind die Vorzeichen (an den Klemmen angeben, Begründung)?

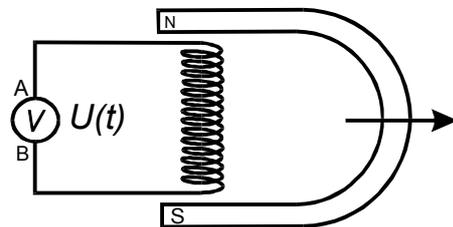
Ersetzt man das Voltmeter durch ein Amperemeter, welche Stromstärke  $I(t)$  wird gemessen?



Ergebnis:  $U_i = 10,3 \text{ mV}$ ;  $I(t) = 10 \text{ As}^{-1} \cdot t$

**3.27.\*** Eine  $l = 15 \text{ cm}$  "lange und dünne" Luftspule (Durchmesser  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $N = 1000$  Windungen Wick­ lungsrichtung: Rechtsschraube) befindet sich zwischen den Polen eines Permanentmagneten. Im Bereich der Spule sei das Feld homogen, die Feldlinien verlaufen parallel zur Längsachse der Spule. Während der Mag­ net langsam von der Spule entfernt wird (bis die Feldstärke in der Spule gegen Null geht) mißt man die dabei induzierte Spannung  $U(t)$ .

- Tragen Sie die Richtung der Flussdichte  $\vec{B}$  des Permanentmagneten ein und an A und B die Polarität der induzierten Spannung während des Wegziehens des Magneten (Begründung mit Lenzscher Regel).



- Das Integral der induzierten Spannung über den Zeitraum  $0 < t < t'$  des Wegziehens ergibt einen

Wert von  $\int_0^{t'} U(t) dt = 0,05 \text{ Vs}$ , wie groß ist demzufolge die maximale Flussdichte?

- Wird anstelle des Voltmeters ein Amperemeter eingesetzt, misst man während des Wegziehens einen ständig anwachsenden Strom. Bestimmen Sie unter Anwendung der Lenzschen Regel dessen Richtung sowie Maximalwert (*Ohmscher Widerstand ist zu vernachlässigen*).

Ergebnis:  $B = 70 \text{ mT}$ ;  $I = 8,4 \text{ A}$