4. Zeitabhängige Spannungen und Ströme in Netzwerken

Im vorigen Abschnitt wurde dargelegt, wie durch zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Spannungen in Leitern induziert werden und welche großen praktischen Möglichkeiten sich prinzipiell daraus ergeben. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die Berechnung von Netzwerken bei zeitlich veränderlichen Spannungen und Strömen durchführt. Es wird kurz auf die Prozesse beim Ein- bzw. Ausschalten von Spannungen an Netzwerken eingegangen. Von größter Bedeutung ist die Behandlung harmonischer Wechselgrößen wegen ihrer überragenden Bedeutung bei allen Prozessen der elektrischen Energie- und Informationsübertragung, angefangen von der Frequenz des Stromnetzes bis zum Gigahertzbereich der Kommunikation über Satelliten.

4.1. Ein- und Ausschaltvorgänge

Bei der Berechnung von Spannungen und Strömen in Netzwerken wurde bisher vom stationären Fall ausgegangen. Wir wollen jetzt solche Vorgänge untersuchen, die kurz nach dem Ein- bzw. Ausschalten von Spannungsquellen in Netzwerken mit Induktivitäten und Kapazitäten ablaufen. Die hierbei auftretenden Ströme und Spannungen weisen ein charakteristisches Zeitverhalten auf, das durch die Geschwindigkeit des Auf- bzw. Abbaues von magnetischen und elektrischen Feldern in Spulen und Kondensatoren geprägt wird. Wir wollen dies an zwei einfachen Beispielen untersuchen.

4.1.1. Kondensator und Ohmscher Widerstand

Das einfachste Beispiel für den Einschaltvorgang mit Widerstand und Kondensator ist auf Abb.4.1 skizziert.

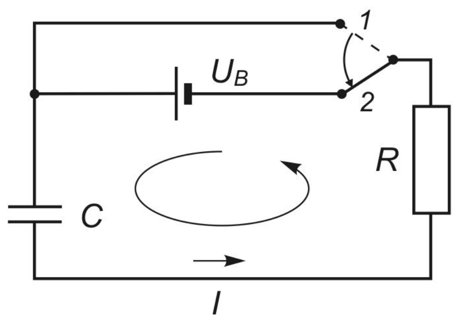


Abb. 4.1 RC-Glied

In Schalterstellung 1 hat sich der Kondensator über den Widerstand entladen. Es fließt kein Strom mehr, die Spannungen an Widerstand und am Kondensator sind Null. Beim Umlegen des Schalters auf die Position 2 lädt sich der Kondensator auf, es fließt der Ladestrom, bis sich der Kondensator auf die Betriebsspannung aufgeladen hat.

Zur Berechnung des Einschaltvorganges wenden wir die Maschenregel an. Bezeichnen wir die an Widerstand und Kondensator auftretenden Teilspannungen mit U_R bzw. U_C, erhalten wir

$$U_C + U_R = U_B, \tag{4.1}$$

$$\frac{Q(t)}{C} + RI(t) = U_B,$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t' + RI(t) = U_B. \tag{4.2}$$

Die Unbekannte in dieser Gleichung ist die Funktion $I(t)$. Da die Gleichung 4.2 auch das Integral über $I(t)$ enthält, lässt sie sich nicht einfach nach $I(t)$ umstellen. Außer diesen beiden Ausdrücken sind keine anderen Zeitabhängigkeiten in der Gleichung enthalten, deshalb vermuten wir eine Lösung in Form einer Exponentialfunktion und machen einen Lösungsversuch mit einem sogenannten Lösungs*ansatz,* bei dem der Strom exponentiell von der Zeit abhängt.

Ansatz: $\underline{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Hierbei lassen wir uns von der Überlegung leiten, dass die e-Funktion aus Dimensionsgründen mit einem Strom I_0 zu multiplizieren ist und der Exponent stets dimensionslos sein muss, also t durch eine Zeit τ zu dividieren ist. Sowohl τ als auch I_0 sind zunächst unbekannt. Diesen Ansatz verwenden wir und hoffen darauf, dass beim Einsetzen kein Unsinn entsteht.

$$\frac{1}{C}\int_0^t I_0\, e^{-\frac{t'}{\tau}}\, dt' + R\, I_0\, e^{-\frac{t'}{\tau}} = U_B \ ,$$

$$\frac{1}{C} I_0(-\tau)\, e^{-\frac{t'}{\tau}}\Bigg|_0^t + R\, I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = U_B \ ,$$

$$\frac{-\tau}{C} I_0\, (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + R\, I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = U_B \ .$$

Da die Gleichung für beliebige Zeiten t erfüllt ist, muss bei $t = 0$ der Einschaltstrom den Wert $I_0 = U_B/R$ annehmen. Weiterhin ergibt sich die *Zeitkonstante* $\tau = RC$.

Somit lautet die Lösung $I(t) = \frac{U_B}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Durch Verwendung des Ohmschen Gesetzes (2.9) und der Kirchhoffschen Maschenregel (2.14) lässt sich leicht der Zeitverlauf der Teilspannungen U_C und U_R bestimmen. Wir erhalten $U_R(t) = U_B\, e^{-\frac{t}{RC}}$ sowie $U_C(t) = U_B\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. In Abb.4.2 sind die Zeitabhängigkeiten dieser Funktionen grafisch dargestellt.

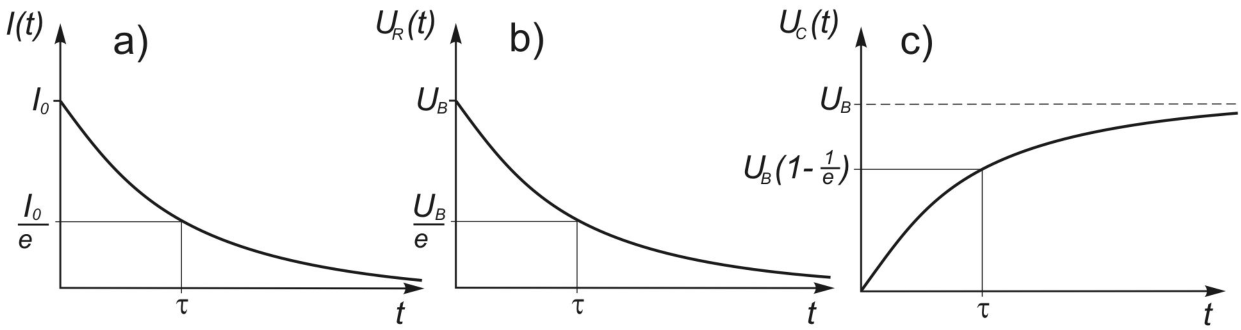


Abb. 4.2 Zeitlicher Verlauf des Stromes $I(t)$ und der Spannungen am Ohmschen Widerstand $U_R(t)$ sowie am Kondensator $U_C(t)$ nach dem Einschalten der Spannungsquelle

Während des Einschaltvorganges wird das elektrische Feld im Kondensator aufgebaut. Die hierzu notwendige Energie wird von der Spannungsquelle geliefert. Wenn nach dem Einschalten lange genug gewartet wird, hat sich der Kondensator auf die Betriebsspannung aufgeladen. Wie groß ist dann die in ihm gespeicherte elektrische Energie?

$$\frac{dW}{dt} = P(t) = U_C(t)\, I(t) \, ,$$

$$W(t) = \int_0^t U_C(t')\, I(t')\, dt' = \int_0^t U_B(1 - e^{-\frac{t'}{RC}}) \frac{U_B}{R} e^{-\frac{t'}{RC}}\, dt' = \frac{U_B^{\,2}}{R}\int_0^t (e^{-\frac{t'}{RC}} - e^{-\frac{2t'}{RC}})\, dt' \, ,$$

$$W(t) = \frac{U_B^{\,2}}{R}\left[-RC\, e^{-\frac{t'}{RC}} + \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t'}{RC}}\right]\Bigg|_0^t = C\, U_B^{\,2}\left[-e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} + \frac{1}{2}\right],$$

$$W(t \to \infty) = \lim_{t \to \infty} W(t) = \frac{C}{2} U_B^{\,2} \ .$$

Dieses Ergebnis haben wir bereits früher bei der Behandlung des Kondensators abgeleitet. Die obige Betrachtung ist aber aussagekräftiger, da der Energieinhalt des Kondensators in seiner zeitlichen Entwicklung dargestellt ist.

4.1.2. Spule und Ohmscher Widerstand

Ein einfaches Beispiel für das Abschalten einer Induktivität ist auf Abb. 4.3 skizziert.

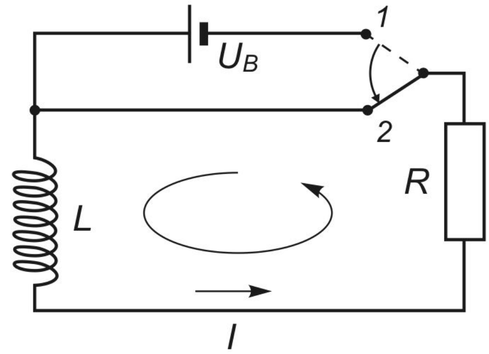


Abb. 4.3 RL-Glied

In Schalterstellung 1 hat sich das Magnetfeld in der Spule aufgebaut, der Strom ist konstant, die Spannung an der Spule ist Null. Beim Umlegen des Schalters auf die Position 2 wird das Magnetfeld abgebaut und die Selbstinduktionsspannung führt zu einem Stromfluss über den Widerstand, bis sich die Energie des Magnetfeldes erschöpft hat.

Wir wenden wieder die Kirchhoffsche Maschenregel an:

$$R\,I(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} U_B & \text{(Schalterstellung 1)} \\ 0 & \text{(Schalterstellung 2)} \end{cases} \tag{4.3}$$

Wir wollen zunächst den Ausschaltvorgang untersuchen. Da die diesem Fall entsprechende Differentialgleichung linear und homogen ist, würde auch hier ein Exponentialansatz zum Erfolg führen. Da wir das oben schon einmal probiert haben, wollen wir jetzt eine andere Methode wählen. Hierbei führen wir eine sogenannte *Trennung der Variablen* durch

$$R\,I(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{R}{L}dt$$

und integrieren

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI'(t)}{I'(t)} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t\,.$$

Diesen Ausdruck heben wir in den Exponenten und erhalten die Lösung

$$\underline{I = I_0\,e^{-\frac{R}{L}t}}, \quad \text{wobei} \quad I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Die Selbstinduktion der Spule führt somit zu einem zeitlich exponentiell abklingenden Strom analog $I(t)$ in Abb.4.2a), bei dem die Zeitkonstante durch das Verhältnis von Induktivität und Widerstand gegeben ist: $\tau = L/R$. Bei kleinem Ohmschen Widerstand dauert das Abklingen dieses Stromes somit sehr lange, bei einem Supraleiter ewig.

Zur Abb. 4.3 sollte noch eine Bemerkung gemacht werden. Bei Betätigung des Schalters muss vermieden werden, dass der Spulenkreis zeitweise unterbrochen wird, da sofort eine hohe Selbstinduktionsspannung entstünde, die u.a. den Schalter bald gänzlich unbrauchbar machen würde. Da ein Schalter eigentlich nichts anderes darstellt, als ein von der Schalterstellung abhängiger Widerstand (0 oder ∞), kann man dafür auch gleich einen Regelwiderstand einsetzen, der sich nur extrem rasch betätigen lassen muss und über einen ausreichend weiten Regelbereich verfügt, s. Abb. 4.4.

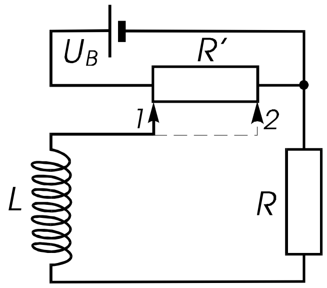


Abb. 4.4 RL-Glied mit "entpreIltem Schalter"

Die Schalterfunktion wird hier durch ein Potentiometer realisiert. Hierbei muss eine rasche Betätigung gewährleistet sein (im Vergleich zu τ) und sich der Regelbereich von R'<< 0 bis R'>>R erstrecken. Später werden wir sehen, dass diese Forderungen vortrefflich durch Verwendung von Transistoren erfüllt werden können.

Übungen

4.1. Um beim Abschalten von Spulen Funkenbildung zwischen den Schalterkontakten zu vermeiden, werden oft parallel zum Schalter Kondensatoren geschaltet, die die beim Abschalten der Spule freiwerdende magnetische Feldenergie als elektrische Feldenergie zwischenspeichern. Wie groß ist die an einem Kondensator der Kapazität 4 µF auftretende Maximalspannung nach dem Abschalten des Spulenstroms von 2 A, wenn die Spule eine Induktivität von L = 1 H aufweist?

4.2.* Ein Kondensator der Kapazität C soll mit einer Stromquelle auf U_0 aufgeladen werden und durch Umlegen eines Schalters S über einen Widerstand R entladen. Kondensatorspannung und Entladestrom werden mit Volt- und Amperemeter gemessen. Der Ladestrom wird mit einem Widerstand R_i begrenzt.
a) Geben Sie hierzu eine Schaltung an.
b) Der aufgeladene Kondensator wird über einen Widerstand von R = 2,2 kΩ entladen. 3 Millisekunden nach Beginn des Entladungsvorganges beträgt die Spannung noch $U(t_1)$ = 3V, eine weitere Millisekunde später nur noch $U(t_2)$ = 2V. Welchen Wert hatte U_0 und wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

4.3. Berechnen Sie $I(t)$, $U_R(t)$ und $U_C(t)$ analog 4.1.1. nach dem Abschalten der Spannungsquelle und die während dieses Prozesses in R umgesetzte Energie!

4.4. Berechnen Sie $I(t)$, $U_R(t)$ und $U_L(t)$ analog 4.1.2. nach dem Einschalten der Spannungsquelle und die Zeitabhängigkeit der Energie des magnetischen Feldes der Spule!

4.2. Komplexe Wechselstromrechnung

4.2.1. Der Wechselstromkreis

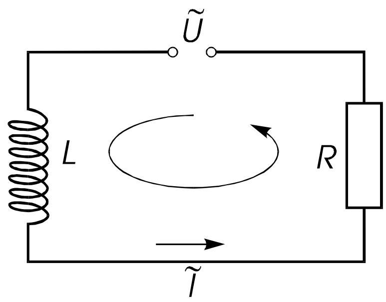
Wird ein elektrisches Netzwerk aus linearen Bauelementen mit Wechselspannung betrieben, sind alle auftretenden Teilströme und Teilspannungen ebenfalls Wechselgrößen. Im folgenden werden wir solche Wechselgrößen betrachten, deren Zeitabhängigkeiten durch Sinusfunktionen gegeben sind. Dieser Fall tritt in der Praxis besonders häufig auf. Andere periodische Vorgänge (z.B. Taktimpulse) oder nichtperiodische Zeitabhängigkeiten sind schwieriger zu behandeln. Prinzipiell ist es jedoch möglich, über die Untersuchung des Verhaltens von Netzwerken bei harmonischen Wechselgrößen konkrete Aussagen über deren Eigenschaften bei Eingangsspannungen mit beliebigen Zeitabhängigkeiten zu machen.

Widerstände, Spulen und Kondensatoren bezeichnet man als *lineare* Bauelemente, da bei diesen lineare Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen auftreten (in der Praxis stimmt das nur näherungsweise, z.B. ist der Widerstand des Glühfadens einer Glühlampe im üblichen Betriebsregime stark nichtlinear, er steigt bei zunehmender Stromstärke an). Eine ganz wichtige Folgerung aus der Linearität der verwendeten Bauelemente besteht darin, dass im Stromkreis ausschließlich die eingespeisten Frequenzen auftreten. Wird ein lineares Netzwerk mit einer Wechselspannung der Frequenz f betrieben, erscheint in allen Wechselgrößen im Stromkreis nur diese Frequenz.

Es soll jetzt ein ganz einfaches Beispiel betrachtet werden, an dem wir die Besonderheiten bei der Berechnung von Wechselgrößen diskutieren wollen.

Abb. 4.5 Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Da die Kirchhoffschen Regeln auch bei zeitabhängigen Strömen und Spannungen gelten, ist die Vorgabe von Stromrichtungen und Umlaufsinn notwendig. Die zum aktuellen Zeitpunkt jeweils berechneten Ströme und Spannungen beziehen sich in ihren Vorzeichen auf diese Vorgaben.



Wenn die Betriebsspannung eine harmonische Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin\omega t$ ist ($\omega = 2\pi f$; auf eine Anfangsphase kann bei der Betriebsspannung verzichtet werden), erhalten wir aus der Kirchhoffschen Maschenregel die Gleichung

$$U_0 \sin\omega t = R\,I(t) + L\dot{I}(t) \tag{4.4}$$

Wir erwarten, dass auch der Strom eine sinusförmige Zeitabhängigkeit aufweist, merken jedoch schnell, dass ein Ansatz $I(t) = I_0 \sin\omega t$ nicht erfolgreich sein wird, da durch die Zeitableitung eine Kosinusfunktion entsteht, die Gleichung also nicht erfüllt werden kann. Wir modifizieren den Ansatz zu $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ und setzen diese Funktion ein:

$$U_0 \sin\omega t = R\,I_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi)\ ,$$
$$U_0 \sin(\omega t - \varphi) = R\,I_0 \sin\omega t + \omega L I_0 \cos\omega t\ ,$$
$$U_0\big(\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi\big) = R\,I_0 \sin\omega t + \omega L I_0 \cos\omega t\ .$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten

$$\begin{aligned} U_0 \cos\varphi &= R I_0 \\ -U_0 \sin\varphi &= \omega L I_0 \\ I_0 &= \frac{U_0}{R}\cos\varphi \text{ mit } \varphi = \arctan\frac{-\omega L}{R}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Unter Verwendung der Beziehung $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0^{\ 2} &= R^2 I_0^{\ 2} + \omega^2 L^2 I_0^{\ 2}, \\ I_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_0}{R\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_G^{\ 2}}}} \text{ mit } \omega_G = \frac{R}{L}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dieser Rechnung können wir entnehmen, dass unsere Vermutung über den sinusförmigen Verlauf des Stromes $I(t)$ richtig war. Es tritt jedoch eine *Phasenverschiebung* gegenüber der Betriebsspannung $U(t)$ auf, die von der Frequenz abhängt. Eine starke Frequenzabhängigkeit weist die Amplitude I_0 auf. Bei kleinen Frequenzen kann sie nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden (die Induktivität wirkt hier offenbar nicht), bei hohen Frequenzen verringert sich I_0 stark. Bevor wir noch weitere Schlussfolgerungen ziehen, haben wir bemerkt, dass sich selbst bei diesem äußerst einfachen "Netzwerk" die Berechnung von Wechselgrößen zu einer komplizierten Rechenaufgabe auswächst.

Um die Eigenschaften von Schaltungen mit Verzweigungen und vielen Bauelementen berechnen zu können, werden wir uns jetzt eines kleinen Tricks bedienen, der die Lösung solcher Aufgaben ganz entscheidend vereinfacht. Hierzu benötigen wir Grundkenntnisse im Umgang mit komplexen Zahlen. Am Ende dieses Kapitels finden Sie unter Anhang 4 eine kurze Zusammenstellung hierzu, die als Wiederholung oder Gedankenstütze dienen soll.

4.2.1 Komplexe Darstellung von Wechselgrößen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass bei einer eingespeisten Wechselspannung $U_2(t) = U_0 \sin\omega t$ der Strom durch die Funktion $I_2(t) = I_0 \sin(\omega t+\varphi)$ beschrieben wird. Wenn wir die Anfangsphase der Spannung anders wählen, wird sich auch die Phase des Stromes entsprechend ändern, so dass für $U_1(t) = U_0 \cos\omega t$ eine Lösung $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t+\varphi)$ existiert. Da die Glg.4.4 linear ist, gilt diese Betrachtung auch für Linearkombinationen:

$$U(t) = AU_1(t) + BU_2(t) = AU_0 \cos\omega t + BU_0 \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = AI_1(t) + BI_2(t) = AI_0 \cos(\omega t+\varphi) + BI_0 \sin(\omega t+\varphi)\,.$$

Das Bemerkenswerte dabei ist, dass die Koeffizienten A und B willkürlich gewählt werden können, sie können auch <u>komplex</u> sein.

Wir wählen $A = 1, B = \sqrt{-1} = j$ [44]. Damit erhalten wir komplexe Wechselgrößen:

$$\underline{U}(t) = U_0\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{I}(t) = I_0\left(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)\right) = I_0 e^{j(\omega t+\varphi)}. \quad (4.7)$$

$$\underline{U}(t) = \hat{U}\, e^{j\omega t}; \ \underline{I}(t) = \hat{I}\, e^{j\omega t} \quad .$$

Als *komplexe Amplituden* bezeichnet man die Konstanten $\hat{U}(t) = U_0\, e^{j\varphi_U}$; $\hat{I}(t) = I_0\, e^{j\varphi_I}$, wobei die Phase der Eingangsspannung φ_U in (4.7) willkürlich gleich Null gesetzt wurde, φ in (4.7) ist somit die Phasenverschiebung zwischen Strom und Eingangsspannung $\varphi = \varphi_I - \varphi_U$.

Mit komplexen Wechselgrößen erhalten wir anstelle (4.4) den Ausdruck

$$U_0 e^{j\omega t} = RI_0 e^{j(\omega t+\varphi)} + L\frac{d}{dt} I_0 e^{j(\omega t+\varphi)}. \quad (4.8)$$

Nach Durchführung der Differentiation kann der zeitabhängige Faktor $e^{j\omega t}$ gekürzt werden, es folgt

$$U_0 = I_0 e^{j\varphi}(R + j\omega L)\,,$$

Die Wirkung der Induktivität entspricht der Multiplikation des Stromes mit einem komplexen Widerstand $Z_R = j\omega L$. Anstelle einer Differentialgleichung ist somit lediglich eine algebraische Gleichung zu lösen, allerdings mit komplexen Variablen. Das ist ein wesentlicher Vorteil!

$$I_0 = \frac{U_0}{R + j\omega L} e^{-j\varphi} = \left|\frac{U_0}{R + j\omega L}\right| e^{+j\varphi} e^{-j\varphi} = \left|\frac{U_0}{R + j\omega L}\right|. \quad (4.9)$$

In (4.9) wurde dem Umstand Rechnung getragen, dass I_0 eine <u>reelle</u> Größe ist. Die Amplitude I_0 lässt sich durch Betragbildung bestimmen, der Phasenwinkel φ aus dem Quotienten von Imaginär- und Realteil:

$$I_0 = \left|\frac{U_0}{R + j\omega L}\right| = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_0}{R\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_G^2}}};$$

$$\frac{U_0}{(R + j\omega L)} \frac{(R - j\omega L)}{(R - j\omega L)} = \frac{U_0(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \underline{\arctan\frac{-\omega L}{R} = \arctan\frac{\omega}{\omega_G}}. \quad (4.10)$$

[44] Die Mathematiker bezeichnen $\sqrt{-1} = i$. Bei den Elektrotechnikern ist i der Effektivwert des Wechselstromes, deshalb wird von ihnen für die imaginäre Einheit der Buchstabe j verwendet.

Wie wir sehen, stimmen Amplitude und Phasenverschiebung des Stromes mit den oben mittels reeller Rechnung bestimmten Werten überein. Die durch die immer notwendigen Umformungen trigonometrischer Funktionen stets unhandliche reelle Methode lässt sich somit durch Ausweichen auf komplexe Wechselgrößen voll ersetzen. Auf elegante Art und Weise erhält man so die gesuchten Größen Amplitude des Stromes und Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

4.2.2. Leistung im Wechselstromkreis

Wir betrachten eine Serienschaltung mit R, L und C wie auf Abb. 4.6 dargestellt.

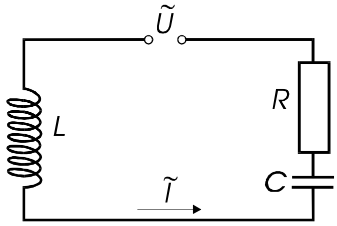


Abb. 4.6 Serienschaltung mit R, L und C

Wie oben bereits festgestellt, muss man bei Wechselgrößen in einer Schaltung, die nicht nur Ohmsche Widerstände enthält, prinzipiell mit dem Auftreten von Phasenverschiebungen rechnen. Für Spannung und Strom gilt somit $\tilde{U} = U_0 \cos\omega t$, $\tilde{I} = I_0 \cos(\omega t + \phi)$. Uns soll jetzt interessieren, wie groß die vom Netzgerät aufzubringende Leistung ist:

$$\tilde{P} = \tilde{U}\,\tilde{I} = U_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi).$$

Durch Anwendung der Beziehung $\cos\alpha\cos\beta = \left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)/2$ lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen:

$$\tilde{P} = \frac{U_0 I_0}{2}\left(\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right).$$

Der zweite Summand in der Klammer beschreibt zeitliche Oszillationen mit der doppelten Frequenz der eingespeisten Wechselspannung. Im zeitlichen Mittel ist dieser Term gleich Null, so dass sich für die mittlere Leistung ergibt

$$\boxed{\overline{P} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi}. \tag{4.11}$$

Betrachten wir jetzt den Anteil der einzelnen Bauelemente an der eingespeisten Leistung:

$$\tilde{P} = \tilde{I}\,\tilde{U} = \tilde{I}\left(\tilde{I}R + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\,dt\right),$$

$$\tilde{P} = \tilde{I}\left(I_0 R\cos(\omega t + \varphi) - \omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi)\right),$$

$$\tilde{P} = I_0^{\,2}\left(R\cos^2(\omega t + \varphi) - (\omega L - \frac{1}{\omega C})\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)\right).$$

Der erste Summand in der Klammer ergibt nach einer zeitlichen Mittelung den Wert 1/2, der zweite Summand mittelt sich weg. Somit erhält man für das Zeitmittel der Leistung

$$\overline{P} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi = I_{eff}^{\ 2} R. \tag{4.12}$$

Das bedeutet, dass im Zeitmittel nur an R Leistung umgesetzt wird. Diese ist um den Faktor $\cos\varphi$ geringer, als wenn keine Phasenverschiebung aufgetreten wäre. Der Ausdruck $\cos\varphi$ trägt in diesem Zusammenhang die Bezeichnung "Leistungsfaktor". Bei $\cos\varphi < 1$ wird ein oft erheblicher Teil der

Leistung zum Aufbau elektrischer und magnetischer Felder in den Kondensatoren und Spulen aufgewendet. Beim Abbau der Felder fließt diese Leistung wieder zurück in die Spannungsquelle. Diese Leistung ist also reversibel, belastet aber durch die starken Ströme (Blindströme) zusätzlich das Netz und erzeugt an den Zuleitungswiderständen zusätzliche Ohmsche Verluste.

Wir wollen jetzt die Leistung mit den Methoden der Komplexen Wechselstromrechnung beschreiben. Die komplexe Leistung $\underline{S}$ (Scheinleistung) ergibt sich aus dem Produkt der komplexen Spannung und des komplexen Stromes:

$$\begin{aligned} &\underline{U} = \hat{U}\, e^{j\omega t}; \quad \underline{I} = \hat{I}\, e^{j\omega t} = I_0\, e^{j(\omega t+\varphi)} \\ &\underline{S} = U_0\, I_0\, e^{j(2\omega t+\varphi)} \, . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Als *komplexe Amplituden* von Strom und Spannung bezeichnet man die Produkte aus reellen Amplituden und komplexen Phasenfaktoren, also z.B. $\hat{I} = I_0 e^{j\varphi}$. Da der Phasenfaktor den Betrag 1 hat, sind die Beträge von komplexer und reeller Amplitude einer Wechselgröße identisch.
In (4.13) bemerken wir in der Zeitabhängigkeit der komplexen Leistung $\underline{S}$ eine gegenüber Strom und Spannung verdoppelte Frequenz. In der Gaußschen Ebene rotiert die Scheinleistung mit dieser Frequenz. Anstelle eines Zeigerdiagramms mit umlaufendem Zeiger, wie auf Abb.4.7a dargestellt, wird meist ein mit 2ω rotierendes Bezugssystem gewählt, wodurch man zeitunabhängige Projektionen auf die reelle Achse (P, Wirkleistung) und auf die imaginäre Achse (Q, Blindleistung) erhält, s. Abb. 4.7b.

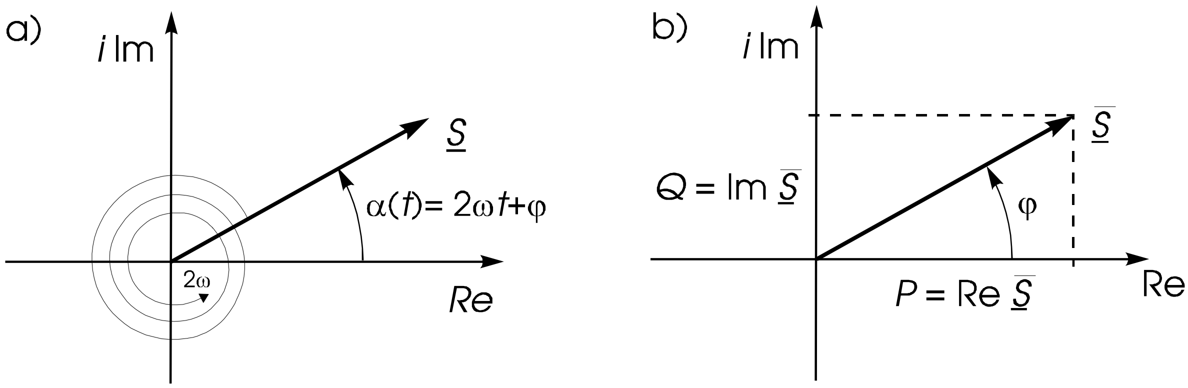


Abb. 4.7 Komplexe Leistung im Zeigerdiagramm
a) Darstellung der Zeitabhängigkeit der Scheinleistung in der ruhenden Gaußschen Ebene
b) Scheinleistung im mit 2ω rotierenden Koordinatensystem, Zerlegung in zeitgemittelte Wirk- und Blindleistung

Die hierdurch ausgefallene zeitliche Mittelung wird dadurch nachgeholt, dass anstelle der Amplituden I_0 und U_0 die Effektivwerte von Strom und Spannung eingesetzt werden, auf die explizite Angabe der Zeitmittelung wird verzichtet:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{S} = P + jQ = U_{eff}\, I_{eff}\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ &|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \end{aligned}} \, . \tag{4.14}$$

Wir erhalten somit Übereinstimmung mit dem Ergebnis der reellen Leistungsberechnung (4.12).

4.2.4. Anwendungen zur komplexen Wechselstromrechnung

Fasst man den Formalismus der komplexen Wechselstromrechnung zusammen, ergibt sich folgendes formale Vorgehen bei der Lösung von Problemstellungen:

- Im Netzwerk werden Stromrichtungen und Umlaufsinn in Maschen eingetragen.
- Die Bauelemente *R*, *L*, *C* ersetzt man formal durch komplexe Z_R, Z_L und Z_C, die Quellenspannung bezeichnet man mit $\hat{U}_q$, Ströme und Teilspannungen mit $\hat{I}_R, \hat{I}_L, \hat{I}_C$ bzw. $\hat{U}_R, \hat{U}_L, \hat{U}_C$.
- Mit den komplexen Widerständen und komplexen Amplituden werden nach den Kirchhoffschen Regeln für den Wechselstromkreis lineare Gleichungen aufgestellt.

Kirchhoffsche Regeln für Wechselgrößen	$\sum \hat{U}_q = \sum Z_k \hat{I}_k$,	$\sum \hat{I}_j = 0$

(4.15)

- Das lineare Gleichungssystem wird mit den üblichen algebraischen Methoden gelöst.
- In deren Lösungen (das sind die $\hat{I}_k$) werden nun die komplexen Widerstände Z_R, Z_L und Z_C durch deren konkrete Ausdrücke *R, jωL* und *1/jωC* ersetzt.
- Durch Betragbildung werden die reellen Amplituden bestimmt $\left|\hat{I}_k\right| = I_{k_0}$.
- Die Phasenverschiebung des Stromes $\hat{I}_k$ gegenüber der Quellenspannung $\hat{U}_q$ ergibt sich nach Trennung von Real- und Imaginärteil zu $\tan\varphi_k = \dfrac{\operatorname{Im}\hat{I}_k}{\operatorname{Re}\hat{I}_k}$. Beim Vergleich der Phasen von Strömen und Spannungen sind der Umlaufsinn sowie die willkürlich angenommene Stromrichtung zu beachten.

Man erkennt leicht, dass man hier vorteilhaft die Erfahrungen bei der Berechnung von Gleichstromnetzwerken ausnutzen kann. Formal sind die Ergebnisse nach der KWSR gleich, man muss lediglich die reellen Widerstände durch die komplexen ersetzen und die Gleichspannungen/-ströme durch die komplexen Amplituden beider Wechselgrößen.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel von Abb.4.5 der Reihenschaltung einer Spule *L*, eines Ohmschen Widerstandes *R* und der eingeprägten Spannung $\widetilde{U}$. Die Maschenregel liefert :

$$\hat{U} = Z_L\hat{I} + Z_R\hat{I} = \left(Z_L + Z_R\right)\hat{I}\,.$$

Das Verhältnis von Spannung und Strom $\dfrac{\hat{U}}{\hat{I}} = \left(Z_L + Z_R\right) = Z$ ist eine komplexe Größe.

$$\frac{U}{I}\cdot e^{j\varphi_Z} = Z = j\omega L + R$$

Z ist also ein komplexer Widerstand mit $Z = \operatorname{Re} Z + \mathrm{j}\cdot\operatorname{Im} Z$. Man definiert nun :

- Re *Z* = Wirkwiderstand
- Im *Z* = Blindwiderstand = Reaktanz
- Betrag *Z* = Scheinwiderstand = Impedanz
- $Y = \dfrac{1}{Z}$ = komplexer Leitwert = Admittanz = $G + \mathrm{j}\cdot B$
  mit *G* = Wirkleitwert = Konduktanz sowie *B* = Suszeptanz .

Für dieses einfache Netzwerk heißt das, dass sich die Impedanz aus

$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 \ L^2}$ sowie dem Phasenwinkel $\varphi_Z = \arctan \frac{\omega L}{R}$ ergibt.

In allen elektrischen Systemen muss man mit Wirkwiderständen und Reaktanzen rechnen, außerdem tritt ja ein Phasenwinkel zwischen $\widetilde{U}$ und $\widetilde{I}$ auf. Die in den Reaktanzen aufgenommene Wechselleistung wird mit *Blindleistung* Q bezeichnet. Die Reaktanz speichert elektrische bzw. magnetische Energie und gibt sie voll an die Quelle zurück . Die elektrische Leistung wird hierbei also nicht in Wärme sondern in Feldenergie umgesetzt. Verluste treten theoretisch nur im Generator und in den Zuleitungen auf. Das allerdings in durchaus hohem Maße, sofern der Wert von cos φ laut (4.12) klein gegen 1 ist.
Hingegen wird die im Wirkwiderstand auftretende elektrische Leistung ganz in Wärme umgesetzt . Genauso verwandelt der Motor elektrische in mechanische Energie, Glühlampe und Leuchtstoffröhre setzen z.B. elektrische Energie in Wärme und zum Teil in Strahlungsenergie um.
Die am Widerstand R abfallende komplexe Amplitude der Spannung ergibt sich zu

$$\hat{U}_R = U_{R,0} \ e^{j\varphi} = \hat{I} \cdot R = \frac{U_0}{Z} R = \frac{R}{|Z| e^{j\varphi_Z}} U_0 = \frac{R}{|Z|} U_0 e^{j(-\varphi_Z)}$$

mit dem Betrag $\left|\hat{U}_R\right| = U_{R,0} = \frac{U_0 \cdot R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ und der Phase $\varphi = -\varphi_Z = -\arctan \frac{\omega L}{R}$.

Lautet die reelle Quellenspannung $\widetilde{U} = U_0 \sin \omega t$, wird an R der reelle Spannungsabfall $\widetilde{U}_R = U_{R,0} \sin(\omega t + \varphi)$ gemessen.

Sowohl Betrag als auch Phase der Spannung $\widetilde{U}_R$ hängen von der Frequenz ab. Dies kann man grafisch veranschaulichen. Für niedrige Werte von ω ist $U_{R,0}(\omega) \cong U_0$ und $\varphi(\omega) \cong 0$.
Für sehr hohe Kreisfrequenzen gilt $U_{R,0}(\omega) \approx U_0 \ R/\omega L$ und $\varphi(\omega) \to -\pi/2$. Die Darstellung erfolgt meist in logarithmischer Teilung der Abszisse. Eine *charakteristische Frequenz* $\omega_g = R/L$ ermöglicht eine dimensionslose Darstellung. Somit gilt $U_{R,0} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}}$ und $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g}$.

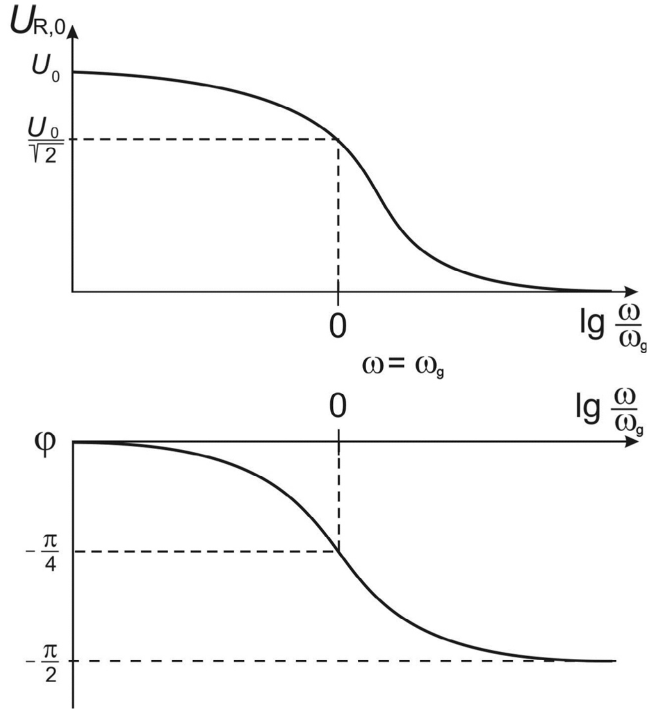


Abb.4.8 Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phase der Spannung am ohmschen Widerstand einer Reihenschaltung von R und L im Wechselstromkreis

Der Frequenzgang zeigt, dass bei niedrigen Frequenzen an R nahezu die volle Eingangsspannung abfällt, bei hohen Frequenzen (im Vergleich mit $\omega_g = R/L$) dagegen nur eine geringe Spannung. Ein solches Verhalten wird als *Tiefpass* bezeichnet.

Die Phase der Spannung an R ist gegenüber der Eingangsspannung verschoben. Bei hoher Frequenz ist diese Verschiebung maximal. Die Spannung an R erreicht ihr Maximum dann um $T/4$ später als die Eingangsspannung.

4.2.5. Der Reihenschwingkreis

Ein schwingungsfähiges System (*Oszillator*), das nach initialem Anstoß sich selbst überlassen bleibt, führt freie Schwingungen aus, deren Ablauf nur durch die Systemeigenschaften und die Anfangsbedingungen bestimmt wird. Ist der Oszillator (den man dann *Resonator* nennt) jedoch ständig einer äußeren (periodisch veränderlichen) Störgröße ausgesetzt, so verläuft seine Schwingung erzwungen und hängt sowohl von den Resonatoreigenschaften als auch von der erregenden Störgröße ab. Im *Resonanzfall* gerät der Resonator in besonders heftige Schwingungen.
Bei manchen schwingungsfähigen Systemen ist man bestrebt den Resonanzfall herbeizuführen und bei anderen wieder daran, ihn zu verhindern. Dazu 2 Beispiele :
- Teile von Maschinen oder Bauwerken sind als elastische Körper mechanische Resonatoren. Sie können durch mechanische Wellen zum Schwingen erregt werden. Um schädliche Resonanzerscheinungen zu vermeiden, dürfen die Erregerfrequenzen nicht in der Nähe der Eigenfrequenzen der Teile liegen.
- Elektrische Resonatoren (*Schwingkreise*) finden in Empfängern für elektromagnetische Wellen (Rundfunk, Fernsehen u. a.) Verwendung. Zum Empfang eines Senders wird die Resonanzfrequenz des Kreises auf dessen Trägerfrequenz abgestimmt.

Beim Serienschwingkreis wird an die Reihenschaltung einer Spule L, eines Kondensators C und eines Widerstandes R die Spannung $U(t)$ gelegt Abb. 4.9. Der Widerstand R setzt sich aus dem Widerstand des Bauelementes R' und den Widerständen von Spule, Leitungen und Instrumenten zusammen.
Zu beliebiger Zeit t mögen im Kreis ein Strom der Stärke $I(t)$ fließen, der Kondensator die Ladung Q(t) tragen und an R, L und C die Spannungen $U_R(t)$, $U_L(t)$ und $U_C(t)$ liegen.

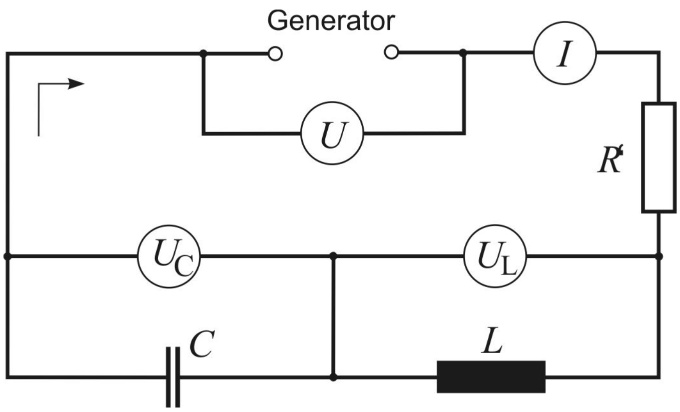


Abb. 4.9 Reihenschwingkreis

Induktivität, Kapazität und Widerstand sind in Reihe geschaltet. Der Ohmsche Gesamtwiderstand ergibt sich aus der Summe der Widerstände der Leitungen, dem Spulenwiderstand sowie einem diskreten Widerstand *R*'.

Zwischen den genannten Größen bestehen die Beziehungen :

$$U_R(t) = R\,I(t) \quad ;\; U_L(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}; \quad U_C(t) = \frac{1}{C}\,Q(t) = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt \quad . \tag{4.16}$$

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt $\quad U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U(t)$ (4.17)

oder mit (4.16)

$$L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = U(t) \quad . \tag{4.18}$$

Die Differentiation von (4.18) ergibt die Schwingungsdifferentialgleichung (4.19) für die Stromstärke $I(t)$ des Schwingkreises

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{1}{L}\frac{dU(t)}{dt} \quad . \tag{4.19}$$

Durch Vergleich mit der Schwingungsgleichung des (STOKES[45]-)gedämpften harmonischen (mechanischen) Oszillators

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = C\cos(\omega t + \alpha)\,. \tag{4.20}$$

erkennt man in $R/L = 2\,\beta$ die Dämpfungskonstante β und in $1/L\,C = \omega_0^2$ die Eigen(kreis)frequenz ω_0 des (ungedämpften) Oszillators (THOMSON[46]sche Schwingungsformel). Durch die Generatorspannung $U = U_0 \cos \omega t$ erfolgt eine harmonische Anregung. Der nach Einschalten des Generators einsetzende Prozess des *Einschwingens* ist durch eine allmähliche Zunahme der Schwingungsamplitude des Stromes gekennzeichnet. Nach einer gewissen Zeitdauer ist dann die Schwingungsamplitude I_0 konstant, der Strom schwingt mit der Erreger(kreis)frequenz ω und ist gegenüber der Eingangsspannung um φ phasenverschoben. Für den eingeschwungenen Fall ist somit die KWSR anwendbar. Anstelle von (4.18) gilt eine analoge Gleichung für die komplexen Amplituden der Teilspannungen

$$\hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C = \hat{U} \tag{4.21 }$$

also explizit

$$R\,\hat{I} + j\omega\,L\,\hat{I} + \frac{1}{j\omega\,C}\hat{I} = \hat{U}\,. \tag{4.22}$$

Die Anfangsphase der Generatorspannung wird gleich Null gesetzt, somit gilt $\hat{U} = U_0; \hat{I} = I_0 e^{j\varphi}$ und man erhält

$$I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0}{R + j\left(\omega\,L - \dfrac{1}{\omega\,C}\right)}\,. \tag{4.23}$$

Der Betrag einer komplexen Größe ergibt sich leicht durch Multiplikation mit seiner konjugiert komplexen, anschließend ist die Wurzel zu ziehen:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \dfrac{1}{\omega\,C}\right)^2}} \tag{4.24}$$

Zur Bestimmung der Phase ist es notwendig, Real- und Imaginärteil in (4.23) zu trennen. Dies erreicht man durch Erweitern des Bruches mit dem konjugiert komplexen Nenner N^*:

$$I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0}{N \cdot N^*}\left[R - j\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)\right].$$

[45] Sir George Gabriel STOKES (1819-1903), brit. Physiker und Mathematiker; Strömungslehre;Floureszenz, Spektralanalyse, Wellenoptik; Akustik; Gravitation; Stokesscher Satz der Integralrechnung
[46] Sir William THOMSON, Lord Kelvin of Largs (1824-1907), schott. Physiker und Unternehmer, mit 22 Jahren Prof. in Glasgow; Elektrodynamik; Thermodynamik; Elastizität; Geophysik; Hydrodynamik

es folgt $$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{I}}{\operatorname{Re}\hat{I}} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}. \tag{4.25}$$

Aus (4.24) folgt, dass die Stromamplitude ein Maximum bei $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ von $I_{res} = \frac{U_0}{R}$ hat.

$$\boxed{\textit{Thomsonsche Schwingungsformel} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{4.26}$$

Die Phasenverschiebung durchläuft mit wachsendem ω Werte zwischen $+\pi/2$ und $-\pi/2$. An der Resonanzstelle $\omega = \omega_0$ schwingen Spannung und Strom genau in gleicher Phase.
Leicht lassen sich jetzt die Amplituden und Phasen der Teilspannungen berechnen:

$$\hat{U}_R = RI_0 e^{j\varphi} = \frac{RU_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0\, e^{j\varphi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

$$\hat{U}_L = j\omega L I_0 e^{j\varphi} = \frac{\omega L U_0\, e^{j\frac{\pi}{2}}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0\, e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}} \tag{4.27}$$

$$\hat{U}_C = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0\, e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega C\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} = \frac{U_0\, e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{(\omega RC)^2 + \left(\omega^2 LC - 1\right)^2}}$$

Die Spannung am Widerstand ist proportional zum Strom und schwingt in gleicher Phase. Die Phase der Spannung an der Induktivität ist um $\pi/2$ höher, die an der Kapazität dagegen um $\pi/2$ geringer. Beide schwingen also *gegenphasig*. An der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ sind die Amplituden gleich.

$$\boxed{\textit{Gütefaktor } Q \qquad \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q} \tag{4.28}$$

Somit sind die Spannungsamplituden an L und C (und analog deren Effektivwerte) bei Resonanz um ein Vielfaches höher als die des Generators.
Zur quantitativen Auswertung ist es günstig, die normierte Frequenz $\eta = \omega / \omega_0$ zu verwenden. Es folgt

$$\frac{I_0}{I_{0res}} = \frac{I_0(\omega)}{I_0(\omega = \omega_0)} = \frac{I_0(\omega)}{\frac{U_0}{R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \tag{4.29}$$

mit $\tan\varphi = \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right) Q$.

Ganz analog gilt für die Spannungen an *L* und *C:*

$$\frac{U_{L0}(\omega)}{U_0} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \quad \text{sowie} \quad \frac{U_{C0}(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\eta\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \ . \tag{4.30}$$

In Abhängigkeit von η und Q erhält man eine Kurvenschar für den Verlauf von Amplituden und Phasen, s. Abb. 4.10. Der Resonanzfall tritt bei $\eta = 1$, also bei der Kreisfrequenz $\omega_r = \omega_o = 2\pi\, f_o = 1\big/\sqrt{LC}$ ein. Die Resonanzstromstärke ist unabhängig von der Güte und beträgt $I_0 = U_0 / R$. Die Stromstärke ist bei Resonanz mit der Spannung in Phase, eilt ihr bei kapazitiver Last ($\omega < \omega_0$ bzw. $\eta < 1$) voraus und bei induktiver Last ($\omega > \omega_0$ bzw. $\eta > 1$) nach.

Die Breite der Resonanzkurve beim Wert $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$ *bzw.* $\left(\frac{I}{I_o} Q\right)^2 = Q^2/2$ heißt Halbwerts- oder Bandbreite. Zur Bestimmung der Bandgrenzen η_0 und η_u gewinnt man aus (4.29) zunächst die Betragsgleichung

$$\left|\eta - \frac{1}{\eta}\right| Q = 1 \tag{4.31}$$

und nach Betragsauflösung die beiden quadratischen Gleichungen

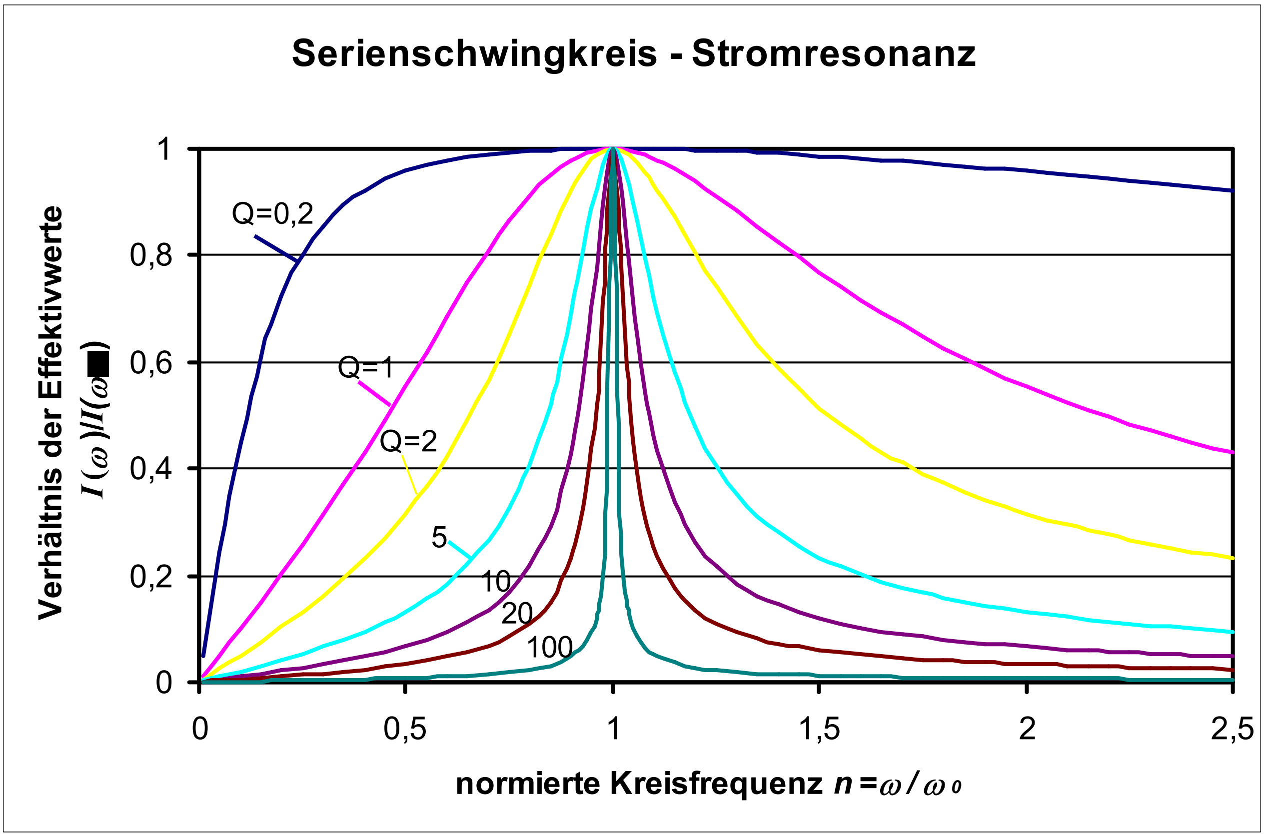
$\pm\left(\eta^2 - 1\right) = \frac{1}{Q}\,\eta$ mit den zwei nichtnegativen Lösungen $\eta_{o,u} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\,Q^2}} \pm \frac{1}{2\,Q}$.

Daraus ergibt sich die (relative) Bandbreite

$$\boxed{\textit{Bandbreite des Schwingkreises} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \eta_o - \eta_u = \frac{1}{Q}} \tag{4.32 }$$

Bemerkenswert ist somit, dass bei einer hohen Güte die Spannungen an den Induktivitäten und Kapazitäten sehr hohe Werte annehmen (bei Mikrowellenresonatoren sind Güten von 10 000 erreichbar). Außerdem tritt dann diese Spannungsüberhöhung nur in einem schmalen Frequenzbereich auf. Schwingkreise können somit sehr frequenzselektiv gebaut werden und haben infolge dieser Eigenschaften eine außerordentliche Bedeutung in der Schaltungstechnik.

Abb. 4.10a Amplitude und Phasenverschiebung φ der Stromstärke im Serienschwingkreis



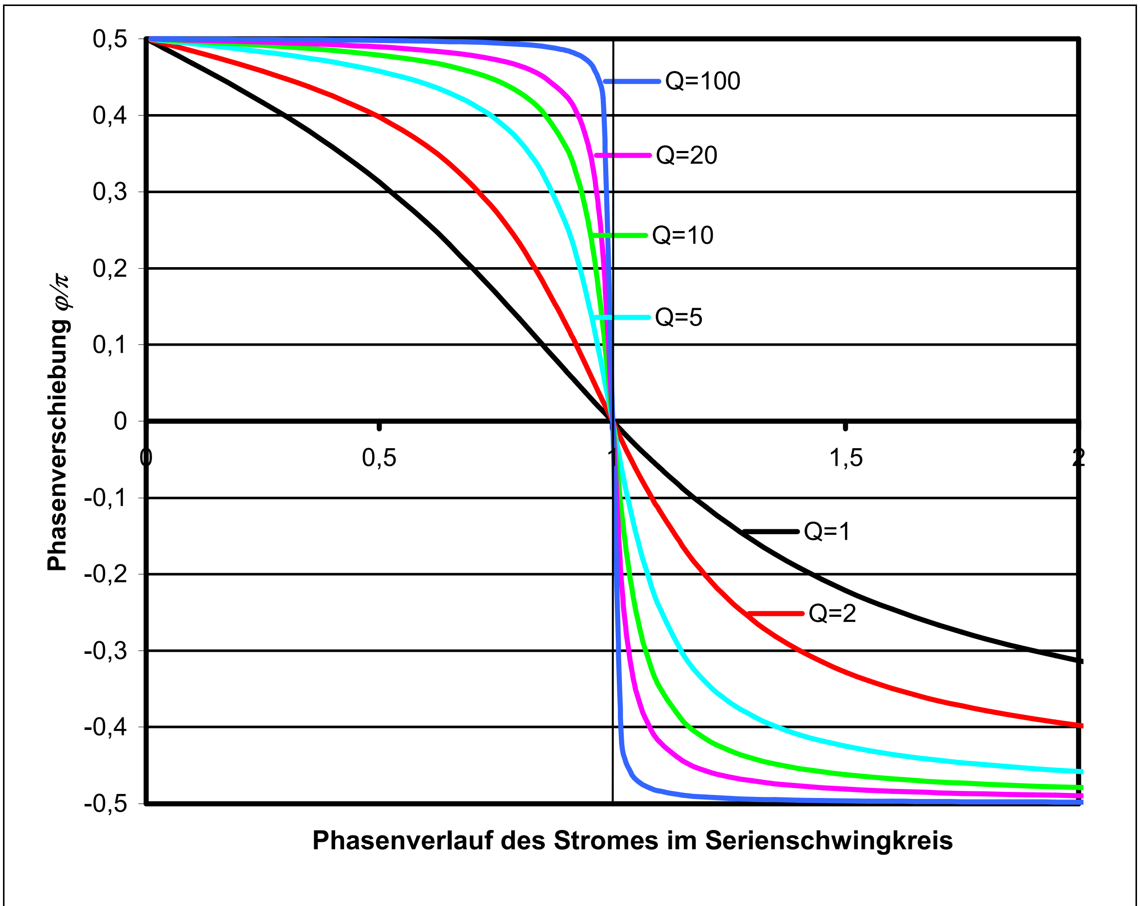


Abb. 4.10b Amplituden U_{L0} und U_{C0} im Serienschwingkreis