

# Physikalische und Elektronische Grundlagen der Informatik

- Elektrische und Magnetische Felder
- Gleichstromnetzwerke
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Elektronen im Festkörper
- Halbleiterbauelemente
- analoge und digitale Grundschaltungen
- Übungsbeispiele
- mathematische Grundlagen

## Vorwort

Das vorliegende Material soll dazu beitragen, Ihnen wichtige Abschnitte der Lehrveranstaltung "Physikalische und Elektronische Grundlagen der Informatik" näher zu bringen. Das Grundanliegen der Physik - Erkennung von Naturgesetzen in Einheit mit deren mathematischer Beschreibung - zeigt das Problem: Die notwendige Kenntnis der physikalischen Grundgesetze muss verbunden werden mit anwendungsbereiten mathematischen Fertigkeiten. Wie die Erfahrung zeigt, haben zu Beginn des Studiums viele Studenten Schwierigkeiten, bereits erworbenes Wissen nutzbar zu machen. Andererseits bestehen große individuelle Unterschiede im Niveau der erhaltenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung. In Ihrem Studium sind aber sowohl Physik als auch Mathematik Grundlagenfächer und laufen parallel, so dass Wissenslücken in Mathematik erst allmählich geschlossen werden können. In der Physikvorlesung besteht die reale Chance, sowohl durch Defizite im Verständnis physikalischer Gesetze, als auch deren Umformung mit mathematischen Methoden "auszusteigen".

Als Brücke zwischen den unterschiedlichen Voraussetzungen der Studenten einerseits und den Anforderungen einer Ausbildung auf Hochschulniveau soll das vorliegende Material dienen. Weiterhin erhoffe ich, damit Anregungen zur vertiefenden Beschäftigung mit den Lehrinhalten der Vorlesung zu schaffen. In diesem Sinn ist es weniger als Skript der Vorlesung zu betrachten denn als Lehrbuch. Die einschlägigen Lehrbücher zur Experimentalphysik und Elektrotechnik/Elektronik sind nämlich wegen ihrer speziellen Ausrichtung zum Selbststudium in diesem Fach nur bedingt geeignet.

Der Gegenstand dieser Lehrveranstaltung besteht darin, die physikalischen Wirkprinzipien aufzuzeigen, nach denen die wesentlichen Baugruppen eines Computers funktionieren. Weiterhin sollen Grundkenntnisse zu elektronischen Schaltungen als Voraussetzung für die weiterführenden Fächer der hardware-Ausbildung vermittelt werden.

Zunächst werden Eigenschaften und Grundgesetze von elektrischen und magnetischen Feldern behandelt. Hiervon ist Ihnen sicher bereits vieles bekannt. Neu sein dürfte die Anwendung der Vektorrechnung in Einheit mit den Methoden der Differential- und Integralrechnung. Dies gestattet nicht nur eine elegante Formulierung der physikalischen Gesetze, sondern auch die rasche Lösung verschiedener Probleme. *In Anerkennung der Tatsache, dass bei vielen Studienanfänger die Kenntnisse sowohl in Vektor- als auch Infinitesimalrechnung lückenhaft sind, werden parallel vereinfachte Ausdrücke angegeben, die dem schulischen Grundkursniveau entsprechen.* Zur Wiederholung und zur Erleichterung des Selbststudiums sind einige Grundbegriffe zu physikalischen Größen und Gleichungen, zur Vektorrechnung und Infinitesimalrechnung als Ergänzung zusammengefasst. Hierbei geht es weniger um die Rechenregeln als um den Zusammenhang zwischen mathematischer Form und physikalischem Inhalt. Zur Illustration werden einige Beispielaufgaben mit Lösungen angegeben.

Die Berechnung von elektrischen Netzwerken in einem folgenden Kapitel ist ein gutes Beispiel für die Notwendigkeit der Beherrschung mathematischer Algorithmen. Sie werden erleben, dass ganz wenige elementare physikalische Gesetze notwendig sind, um mit Hilfe rationeller Methoden der linearen Algebra prinzipiell auch sehr komplizierte elektrische Netzwerke berechnen zu können.

Ein kurzer Exkurs in die Festkörperphysik soll dazu dienen, Ihnen die Funktionsweise der Halbleiterbauelemente verständlich zu machen. Auch benachbarte Themen werden diskutiert, z.B. wie ein Laser funktioniert, eine Flüssigkristallanzeige, eine Solarzelle,... Als Grundbausteine von Rechnern und digitalen Speichern werden schließlich logische Schaltungen aufgebaut.

Keinesfalls kann die Beschäftigung mit dem vorliegenden Material die Vorlesung bzw. Übungen ersetzen. Sie haben aber die Möglichkeit, dort behandelte Sachverhalte noch einmal nachzulesen. Sehr ausführlich dargestellte Übungsbeispiele sollen es auch dem mathematisch weniger gewandten Studenten ermöglichen, Lösungsschritte nachzuvollziehen. An vielen leichteren Übungsaufgaben sollen Sie selbständig Ihre Kenntnisse anwenden. Etwas schwierigere sind mit einem \* gekennzeichnet. Diese werden Gegenstand der seminaristischen Übungen sein und führen Sie an das Prüfungsniveau heran.

In einigen Abschnitten geht das Material über die in der Vorlesung behandelten Inhalte hinaus, um interessierten Studenten Anregungen für vertieftes Studium zu bieten.

# Elektrizität und Magnetismus

## 1. Elektrostatik

### 1.1. Die elektrische Ladung

Die am längsten bekannte elektrische Erscheinung ist die *Reibungselektrizität*. Mit einem an Wolle geriebenen Stück Bernstein lassen sich Papierschnipsel anziehen. Bernstein war schon bei den alten Griechen als Schmuckstein begehrt, aber auch wegen der ihm zugeschriebenen magischen Kräfte. Bernstein heißt auf griechisch Elektron, was GILBERT<sup>1</sup> Anlass war, die damit verbundenen Erscheinungen als "elektrische" zu bezeichnen. Reibt man verschiedene Materialien aneinander, kommt man zum Schluß, das es zwei verschiedene Sorten von Elektrizität gibt. DUFAY<sup>2</sup> nannte diese "vitreuse" (glasig) und "resineuse" (harzig), die sich wechselseitig anziehen bzw. abstoßen. FRANKLIN<sup>3</sup> wies nach, dass diese Eigenschaften aus Überschuss und Mangel von Ladungen resultieren und sich dies mathematisch durch positive und negative Ladungen beschreiben lässt, die sich zu Null neutralisieren lassen. Ordnet man die Stoffe danach, welche sich bei Reibung eher positiv bzw. negativ aufladen, erhält man die *Triboelektrische Reihe*:

+ Luft, Asbest, Glas, Polyamid, Wolle, Seide, Bernstein,  
Poly(ethylenterephthalat), PVC, Polystyrol, Polyethylen, Polypropylen, Poly(tetrafluorethylen) -

Triboelektrizität ist von großer praktischer Bedeutung. Werden durch Reibung Ladungen getrennt, kann dies durch Entladungsfunken in Kohlebergwerken, Getreidesilos, aber auch am Einfüllstutzen des Kraftstofftanks im Auto zu Explosionen führen. Weniger dramatisch, aber gleichermaßen zerstörend wirken elektrische Aufladungen bei elektronischen Bauelementen. Hier sind strenge Vorschriften zu beachten, da man seinen Körper durch Gehen über Teppichböden, Abziehen von Klebestreifen, Ablegen von Kleidung rasch auf etliche Kilovolt auflädt, was zur Zerstörung von Bauelementen führt, falls man diese ungeschützt in die Hand nimmt.

Die Ursache aller elektrischen und magnetischen Erscheinungen liegt in der Existenz von elektrischen Ladungen. Diese sind untrennbar an das Vorhandensein von Masse gebunden, wenngleich nicht jede Masse elektrische Ladung tragen muss. Ladungen sind additiv und auch teilbar, letzteres aber nicht unbegrenzt, denn es existiert eine kleinste (unteilbare) Ladung, die sogenannte *Elementarladung e*. Die materiellen Träger dieser Elementarladungen sind die Elementarteilchen *Elektron* und *Proton*. Das einfachste Atom, das Wasserstoffatom, besteht gerade aus je einem Elektron und einem Proton. Da Wasserstoffatome keine elektrische Ladung tragen, kann man schlussfolgern, dass beide Elementarteilchen Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen tragen, die sich zur Gesamtladung Null kompensieren (jedes vollständige Atom ist elektrisch neutral!). Das Vorzeichen der Elektronenladung wurde als negativ, das für die Ladung des Protons als positiv definiert.

Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung und Universalität bezeichnet man die Masse eines ruhenden Elektrons  $m_e$  und die Elementarladung  $e$  als Naturkonstanten:

Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Die geordnete Bewegung von Ladungsträgern wird als elektrischer Strom bezeichnet und in Ampère<sup>4</sup> (Symbol A) gemessen. Wenn durch einen Leiter der Strom von 1 A fließt, bedeutet das somit, daß je Sekunde etwa  $6,3 \cdot 10^{18}$  Elektronen das Meßgerät passieren müssen.

<sup>1</sup> William GILBERT (1540-1603), engl. Naturforscher, Leibarzt von Elisabeth I.

<sup>2</sup> Charles Francois de Cisternay DUFAY (1698-1739), franz. Chemiker

<sup>3</sup> Benjamin FRANKLIN (1706-1790), amer. Staatsmann und Naturforscher, Erfinder des Blitzableiters

<sup>4</sup> Andre Marie AMPÈRE (1775-1836), franz. Physiker, Mathematiker und Chemiker, experimentelle und theoretische Untersuchung der magnetischen Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern, Erklärung des Ferromagnetismus durch Ringströme; Doppelbrechung; kinetische Wärmetheorie

Die Existenz von Elektronen und die Größe der Elementarladung kann leicht experimentell nachgewiesen werden. Man kann z.B. durch Erhitzen einer Metalloberfläche diese zur Emission von Elektronen veranlassen. Bei hohen Temperaturen vollführen die Atome starke Schwingungen um ihre Ruhelage, ab und zu wird dabei von ihnen ein Elektron abgetrennt. Befindet sich diese Oberfläche im Vakuum, hat man freie Elektronen, mit denen man experimentieren kann. Wir werden uns später damit genauer befassen. Bei dem MILLIKAN<sup>5</sup>-Versuch werden winzige Öltröpfchen in das Feld eines Plattenkondensators gesprüht. Dabei werden sie durch die Reibung aufgeladen und können unter dem Mikroskop betrachtet werden. Ihre Sink- bzw. Steiggeschwindigkeiten im Schwerfeld der Erde weisen auf diskrete Ladungsunterschiede in der Größe von ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung  $e$  hin.

Ein ganz anderer Zugang zur Elementarladung ist durch die von FARADAY<sup>6</sup> gefundenen Gesetze der Elektrolyse gegeben. Wird bei einer Stromstärke  $I$  nach der Zeit  $\Delta t$  an der Anode eine Masse  $m$  von Atomen der Massenzahl  $M$  abgeschieden, so gilt

$$m = n M \frac{m_C}{12} \quad I \Delta t = Q = n k e ,$$

woraus sich die Elementarladung leicht berechnen läßt:

$$e = \frac{Q M m_C}{12 m k} ,$$

mit  $n$  der Anzahl der abgeschiedenen Ionen der Wertigkeit  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) und  $m_C$  der Masse des Kohlenstoffatoms des häufigsten Isotops  $^{12}\text{C}$ .

Zusammen mit den Neutronen (die keine elektrische Ladung tragen) gehören Elektronen und Protonen zu den Grundbausteinen der Materie. Die aus ihnen gebildeten Atome und Moleküle sind elektrisch neutral. Sie werden als *Ionen* bezeichnet, wenn man ein oder mehrere Elektronen abspaltet oder hinzufügt. Durch Veränderung der Anzahl einer Sorte von Ladungsträgern also durch Stromfluss "nach außen" kann ein Stoff elektrisch geladen werden. Ladungen können nicht erzeugt, sondern nur getrennt und transportiert werden. Somit gilt:

Die Ladung ist eine *quantisierbare* Größe. Sie kommt als positive und negative Vielfache der Elementarladung  $e$  in der Natur vor.

Ladungen sind additiv. Im abgeschlossenen System bleibt die Summe aus positiven und negativen Ladungsträgern konstant.

Die am längsten bekannte elektrische Erscheinung ist die *Reibungselektrizität*. Mit einem an Wolle geriebenen Stück Bernstein lassen sich Papierschnipsel anziehen. Beim Reiben wird ein kleiner Teil der Ladungsträger getrennt, somit Tuch und Bernstein mit unterschiedlichen Vorzeichen aufgeladen. Unterschiedliche Ladungen üben aufeinander eine anziehende Kraft aus, die *elektrostatische Wechselwirkung*. Bei Ladungen mit gleichen Vorzeichen führt diese Wechselwirkung zu einer Abstoßung. Die Größe dieser Kraft läßt sich mit einem *Elektrometer* leicht messen.

Im Experiment wird hierzu ein Glasstab mit einem Lederlappen gerieben. Vom Glasstab können jetzt Ladungen auf das Elektrometer gebracht werden, was einen Zeigerausschlag bewirkt. Berührt man daraufhin mit dem Lederlappen den Elektrometeranschluss, geht der Ausschlag zurück, da sich die Ladungen ausgleichen. Die Ladungen von Stab und Lappen sind somit etwa gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen.

<sup>5</sup> Robert Andrews MILLIKAN (1868-1953), amer. Physiker, Assistent MICHELSONS in Chicago; Messung der Elementarladung und der PLANCKSchen Konstanten

<sup>6</sup> Michael FARADAY (1791-1867), engl. Physiker und Chemiker; Elektromotor; Induktiongesetz; Elektrolyse; Faraday-Käfig; Dielektrika; Diamagnetismus; optischer Faraday-Effekt; Paramagnetismus

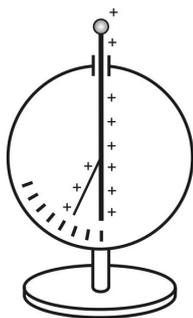


Abb. 1.1: Elektrometer

Flacher Hohlzylinder mit geerdetem Metallmantel und gläsernen Stirnflächen. Die Ladung wird auf den Pol oben aufgebracht und verteilt sich auf dem Leiter im Gehäuse. Ein dünnes Metallblättchen wird durch elektrostatische Kräfte abgespreizt.

Bei einem weiteren Versuch wird das Elektrometer nun wieder durch den erneut geriebenen Glasstab aufgeladen. Außerdem wird ein Hartgummistab mit einem Nylonlappen gerieben. Eine Berührung des Elektrometeranschlusses mit dem Stab führt jetzt zur Entladung. Beide Stäbe wurden also unterschiedlich aufgeladen. Der Glasstab trägt positive Ladungen, der Hartgummistab negative.

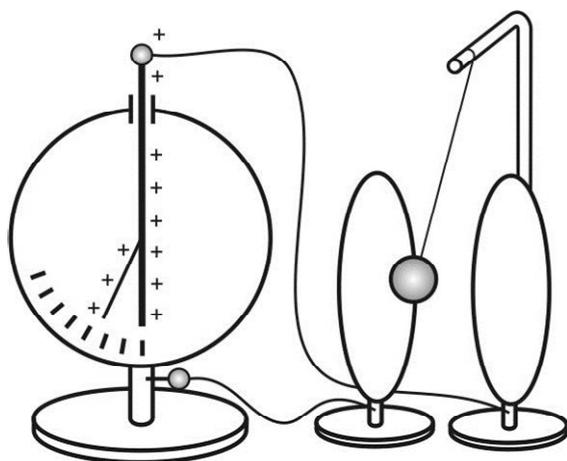


Abb. 1.2: Elektrostatiches Pendel

Eine isoliert aufgehängte Kugel mit leitfähiger Oberfläche wird zwischen zwei entgegengesetzt aufgeladene Platten gebracht. Die Kugel pendelt zwischen beiden Platten hin und her und entlädt sie dabei.

Im Allgemeinen hat man es mit räumlichen Verteilungen von Ladungen zu. Als Modellvorstellung ist es aber oft vorteilhaft, sich Ladungen als in einem Raumpunkt konzentriert vorzustellen. Man spricht dann von *Punktladungen*. Das Formelzeichen der elektrischen Ladung ist  $Q$  oder  $q$  (von lat. quantum).

## 1.2. Das elektrostatische Feld

Zwischen zwei geladenen Körpern, deren räumliche Ausdehnung gegenüber ihrem gegenseitigen Abstand klein ist (Punktladungen), tritt eine Kraft auf mit folgenden Merkmalen:

- Sie ist
1. direkt proportional zum Betrag jeder Ladung  $Q_1$  und  $Q_2$ ,
  2. umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes  $r^2$ ,
  3. parallel zur Verbindungslinie beider Körper gerichtet,
  4. anziehend bei ungleichnamigen Ladungen und abstoßend bei gleichnamigen.

Diese Eigenschaften wurden vom französischen Physiker COULOMB<sup>7</sup> (1736 - 1806) experimentell festgestellt. Als COULOMBkraft oder elektrostatische Feldkraft bezeichnet man die Kraft zwischen zwei elektrischen Punktladungen (gilt auch für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen). Im Internationalen Einheitensystem und in skalarer Form ist demnach die Kraft  $F$  welche zwei derartige Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  aufeinander ausüben

$$\text{COULOMBSches Gesetz} \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \quad (1.1a)$$

<sup>7</sup> Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), franz. Ing. und Physiker; Magnethadeln; magnet. Moment; elektrostatisches Kraftgesetz (Torsionswaage); Gleitreibung; innere Reibung

Berücksichtigt man die Richtungsabhängigkeit der Coulombkraft, erhält man das Coulomb-Kraftfeld

$$\text{COULOMBSches Gesetz} \quad \vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_{12} \quad (1.1b)$$

Hierbei zeigt der Einheitsvektor  $\vec{e}_{12}$  von der Ladung  $Q_2$  nach  $Q_1$  und  $\vec{F}_{12}$  stellt den Kraftvektor auf die Ladung  $Q_1$  dar. Die Konstante  $\varepsilon_0$  wird als *elektrische Feldkonstante*, *Permittivität des Vakuums* oder als *absolute Dielektrizitätskonstante* bezeichnet. Ein veralteter Name für  $\varepsilon_0$  lautet *Influenzkonstante*. Die dimensionslose Konstante  $\varepsilon_r$  bezeichnet man als *relative Dielektrizitätskonstante* oder *Permittivitätszahl*. Sie hat im Vakuum und Luft den Wert 1, ist in anderen Medien größer als 1 und hängt in anisotropen Medien (z.B. Kristallen) von der Richtung ab.

$$\text{Elektrische Feldkonstante} \quad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Der Faktor  $4\pi$  in Glg. 1.1 wurde aus Maßsystemgründen eingeführt. Dadurch wird vermieden, dass er in den fundamentalen MAXWELL<sup>8</sup>schen Gleichungen auftritt. Im hier verwendeten SI-System wird die Kraft in Newton, die Länge in Meter und die Ladung in Coulomb (1 C = 1 As) gemessen.

Wenn man die von einer feststehenden Ladung  $Q_2$  auf eine Probeladung  $Q_1$  ausgeübte Kraft für verschiedene Positionen der Probeladung im Raum durch jeweils einen Vektor beschreibt, erhält man folgende Darstellung:

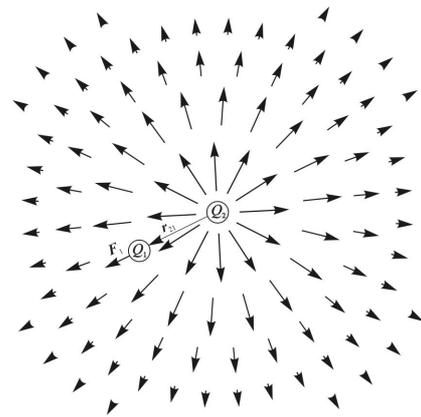


Abb. 1.3: Elektrostatisches Kraftfeld einer positiven Ladung  $Q_2$

Durch Vektorpfeile ist nur die auf eine positive Probeladung  $Q_1$  angreifende Kraft dargestellt, die sich jeweils für verschiedene Positionen der Probeladung im Raum ergibt. Bei einer negativen Ladung  $Q_2$  kehren sich die Richtungen der Vektorpfeile um.

Laut Glg. 1.1.b ergeben zwei gleichnamige Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  abstoßende Kräfte (wie auf der Abbildung), zwei ungleichnamige dagegen anziehende Kräfte.

Auf Abb. 1.3. wird eine wichtige Eigenschaft von elektrischen Ladungen ersichtlich: sie erzeugen ein *elektrostatisches Feld*, das den Raum durchsetzt. Bei einer Punktladung hat dieses Feld sphärische Symmetrie. Wenn man eine positive Probeladung in Richtung der wirkenden Kraft verschiebt und die hierbei berührten Raumpunkte miteinander verbindet, erhält man eine Kraft- oder Feldlinie (bei einer Punktladung sind die Feldlinien gerade; die Richtung der auf die Probeladung wirkenden Kraft wird durch einen Pfeil dargestellt). Offensichtlich haben die Feldlinien ihren Ursprung in der Ladung. Positive Ladungen sind *Quellen*, negative Ladungen *Senken* des elektrischen Feldes.

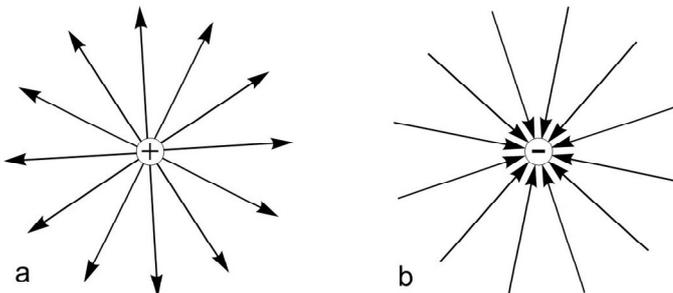


Abb. 1.4: Feldlinienverlauf bei einer positiven (a) sowie negativen (b) Punktladung

<sup>8</sup> James Clerk MAXWELL (1831-1879), schott. Physiker, bedeutender Theoretiker und Experimentator; kinetische Gastheorie, Elektrodynamik, Farbsehen

Somit gibt es keine in sich geschlossenen Feldlinien (Wirbel) und es gilt:

Das elektrostatische Feld ist ein wirbelfreies Quellenfeld mit positiven Ladungen als Quellen und negativen Ladungen als Senken.

Bei parallel verlaufenden Feldlinien spricht man von einem *homogenen* Feld, ansonsten handelt es sich um ein *inhomogenes* Feld (so wie auf Abb. 1.4.). Die Feldlinien sind keine Vektoren! Allerdings kann man aus der Dichte der Feldlinien auf den Betrag der Feldkraft schließen. So nimmt z.B. bei der Punktladung auf Abb. 1.4. die Zahl der Feldlinien je  $\text{cm}^2$ , die eine zu den Feldlinien senkrechte Fläche durchsetzt (bei einer sphärischen Ladungssymmetrie ist dies ein Segment einer Kugeloberfläche), mit dem Quadrat des Abstandes dieser Fläche von der Punktladung ab. Gerade diese Abstandsabhängigkeit hat die Coulombkraft! Die auf eine Probeladung wirkende Kraft  $F$  dient zur Definition der elektrischen Feldstärke  $E$ . Elektrische Feldstärke ist Kraft je Probeladung, also  $E = F/Q$ . Berücksichtigt man den Vektorcharakter von  $F$ , ergibt sich der Vektorcharakter des Elektrischen Feldes:

Elektrische Feldstärke	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ ,	$[E] = 1 \frac{\text{N}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$	(1.2)
------------------------	---------------------------------	--	-------

Eine analoge Beziehung gilt natürlich für die Feldkraft:  $\vec{F} = Q \vec{E}$ . Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld und demzufolge ebenso additiv wie Ladungen. Für eine Ladungsverteilung lässt sich das elektrische Feld z.B. dadurch berechnen, dass man die elektrischen Felder von Punktladungen addiert. Ein elektrischer *Dipol*, bestehend aus zwei gleich großen, aber ungleichnamigen Ladungen im Abstand  $l$  hat somit (in Analogie zur Abb. 1.3) folgende Feldvektoren

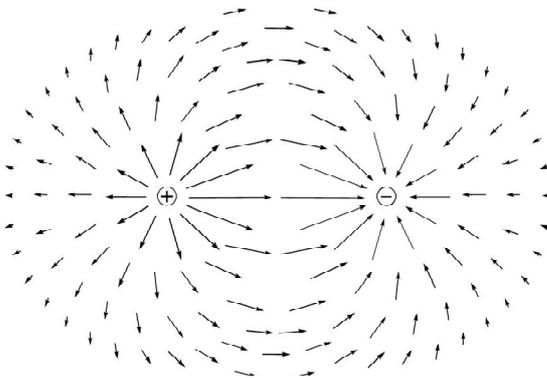


Abb. 1.5: Elektrostatisches Kraftfeld eines Dipols

Durch Vektorpfeile ist die an einer positiven Probeladung in verschiedenen Positionen angreifende Kraft dargestellt.

Auf ähnliche Weise wie oben beschrieben, kann man die Feldlinien des Dipols durch Verschieben der Probeladung entlang der Wirkungslinie der Feldkraft aufzeichnen.

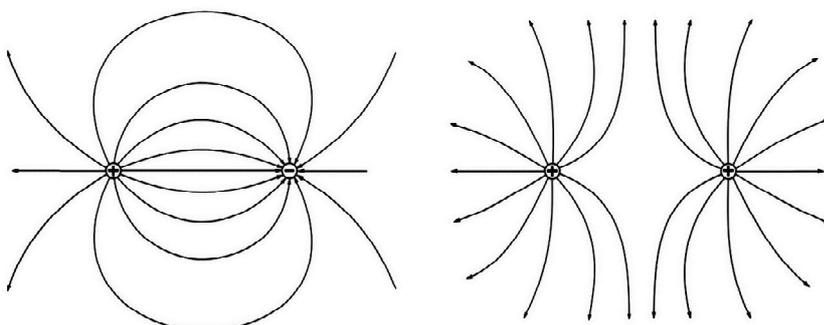


Abb. 1.6: Feldlinienbild

- a) zweier ungleichnamiger Punktladungen (Dipol)
- b) zweier positiver Ladungen

Sei  $\vec{l}$  der Ortsvektor von der negativen zur positiven Ladung im Dipol. Dann definiert man:

$$\boxed{\text{elektrisches Dipolmoment } \vec{p} = Q \vec{l}} \quad (1.2a)$$

Im homogenen elektrischen Feld  $\vec{E}$  wirken auf beide Ladungen vom Betrag gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte. Hieraus resultiert ein Drehmoment

$$\boxed{\text{Drehmoment eines elektrischen Dipols im elektrischen Feld } \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad (1.2b)$$

Offensichtlich ist das Drehmoment maximal bei senkrechter Orientierung von Dipol und Feldlinien. Bei paralleler Ausrichtung verschwindet das Drehmoment. Für den Fall, dass die Verbindungslinie beider Ladungen eines Dipols einen Winkel  $\alpha$  mit den Feldlinien bildet, hat das Drehmoment den Betrag  $M = Q l E \sin \alpha$ .

**Übungen** (Übungen mit \* entsprechen einem Leistungskurs-Niveau; Prüfungsaufgaben)

**1.1.** Berechnen Sie die Kraft, mit welcher sich zwei gleiche Punktladungen a)  $Q = 3,5 \cdot 10^{-9}$  C im Abstand von  $r = 12$  cm und b)  $Q = 10^{-7}$  C im Abstand von  $r = 1$  m abstoßen.

*Ergebnis:* a) 7,65  $\mu$ N; b) 90  $\mu$ N

**1.2.** Zwei gleiche Punktladungen stoßen sich im Abstand  $d = 20$  cm mit einer Kraft  $F = 1,5 \cdot 10^{-2}$  N ab. Wie groß sind die Ladungen?

*Ergebnis:*  $2,6 \cdot 10^{-7}$  As

**1.3.** Der Abstand zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom beträgt  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m.

a) Wie groß ist die Coulombkraft zwischen beiden Teilchen?

b) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen beiden Teilchen?

c) Wie groß ist das Verhältnis beider Kräfte, wie hängt es vom Abstand ab?

Geg.:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg;  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>;

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm

*Ergebnis:* a)  $8,2 \cdot 10^{-8}$  N; b)  $3,7 \cdot 10^{-47}$  N; c) hängt nicht vom Abstand ab

**1.4.\*** Die Oberfläche von Kontaktstiften soll vergoldet werden. Die Gesamtfläche aller Stifte beträgt  $A = 10$  cm<sup>2</sup>. Die aus dem Elektrolyten abgeschiedenen Goldionen sind 3-wertig. Die Dicke der Goldschicht soll  $d = 1,0$   $\mu$ m betragen.

a) Bestimmen Sie die Masse des abzuscheidenden Goldes.

b) Bei einem Goldpreis von derzeit 970 €/Feinunze entspricht diese Menge welchem Materialwert?

c) Wie lange dauert es bei einem Gleichstrom von  $I = 100$  mA, bis die gewünschte Schichtdicke erreicht wird?

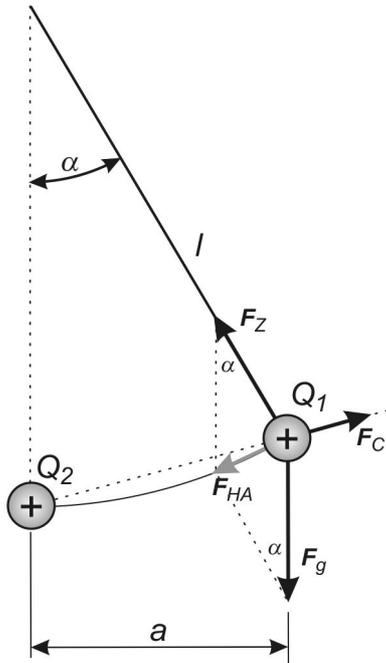
Geg.: 1 Feinunze = 31,2 g;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C;  $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg;  $\rho = 19,3$  g/cm<sup>3</sup>;  $M_{\text{Au}} = 197$

*Ergebnis:* a) 19,3 mg; b) 0,60 €; c) 283 s

**1.5.\*** Im Vorlesungsexperiment wurden Tennisbälle mit dem Durchmesser  $\phi = 37,5$  mm und der Masse  $m = 2,60$  g mit leitfähiger Oberfläche mit jeweils gleichen Ladungen  $Q$  aufgeladen. Eine Kugel war als Pendel der Länge 550 mm aufgehängt (vom Mittelpunkt des Tennisballes gerechnet). Die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage betrug 50 mm, während der zweite Tennisball in der ursprünglichen Ruhelage des beweglichen Balles fixiert wurde. Wieviel Elementarladungen befanden sich auf jeder der beiden Kugeln im Überschuß?

*Anmerkung:* Bestimmen Sie zuerst die Kraft, die infolge Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage ( $\alpha \ll 1$ , demzufolge  $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong \alpha$ ) durch das Gewicht der Pendelmasse hervorgerufen wird, indem Sie die an der Pendelmasse angreifende Gewichtskraft in eine radiale Kraftkomponente (in Fadenrichtung wirkend) und in eine tangentielle Kraftkomponente (senkrecht dazu, also auf die andere Kugel gerichtet) zerlegen. Dieser Kraft entgegengesetzt gleich ist die *Coulomb*-Kraft der elektrostatischen Abstoßung. Gehen Sie von einer gleichmäßigen Verteilung der Ladungen auf den Oberflächen beider Kugeln aus! In diesem Fall entspricht deren resultierendes elektrisches Feld (außerhalb der Kugeln!) dem von Punktladungen  $Q$ , von denen jeweils eine im Mittelpunkt der Kugeln lokalisiert ist.

*geg.:*  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As



**Lösung:** Gewichtskraft  $F_g$ , Zwangskraft  $F_Z$  und Coulombkraft  $F_C$  sind vektoriell zu addieren. Im statischen Gleichgewicht muß demnach gelten  $\vec{F}_g + \vec{F}_Z + \vec{F}_C = 0$ . Bei ungeladenen Kugeln ergeben Gewichtskraft und Zwangskraft addiert eine Hangabtriebskraft  $F_{HA}$  in Richtung der Tangente an die Kreisbahn, eine Pendelbewegung wäre die Folge. Bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage ( $\alpha \ll 1$ ) kann man bei geladenen Kugeln vernachlässigen, dass die Wirkungslinien von Coulomb- und Hangabtriebskraft leicht unterschiedliche Richtungen haben. In dieser Näherung gilt  $F_{HA} \cong -F_C$  und der Abstand der beiden Ladungen beträgt näherungsweise  $a \cong l \cdot \sin \alpha$ .

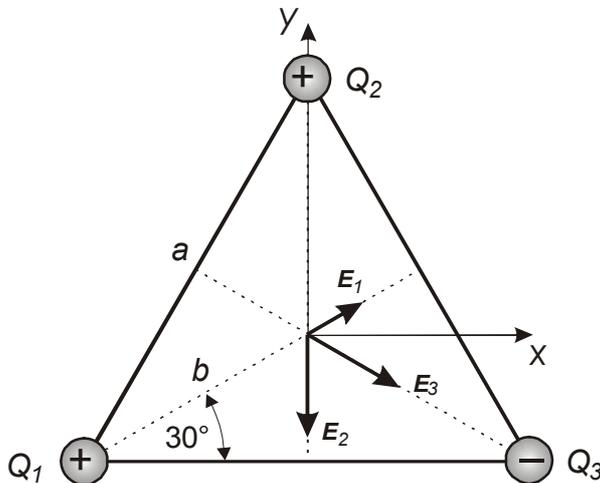
$mg \sin \alpha = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{n^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{mg a}{l}$  mit  $n$  der Anzahl der Elektronen auf einer Kugel.

$$n = \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0 a^3 mg}{e^2 l}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,55 \text{ m} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^2 \text{ Vm s}^2}}$$

$$n = 1,59 \cdot 10^{11}$$

**1.6.\*** Berechnet werden soll die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_p$  im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge  $a = 2 \text{ cm}$  in Luft, wenn die Eckpunkte Ladungen  $Q_1 = 10^{-8} \text{ As}$ ,  $Q_2 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ As}$  und  $Q_3 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ As}$  tragen.

**Lösung:** Immer zu empfehlen ist es, eine übersichtliche Skizze anzufertigen, das führt meist schon zu einem rationellen Lösungsweg. Da die Aufgabe offensichtlich nicht eindimensional ist, kommen wir nicht umhin, mit Vektoren zu arbeiten und legen deshalb aus Symmetriegründen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Dreiecks:



Die drei Feldstärken  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_3$  addiert ergeben die gesuchte Größe  $\vec{E}_p$ . Da alle drei Ladungen den gleichen Abstand zum Mittelpunkt des Dreiecks haben, ergeben sich für die Beträge der drei Feldstärken

$$E_i = \frac{|Q_i|}{4\pi \epsilon_0 b^2} = \frac{3|Q_i|}{4\pi \epsilon_0 a^2} \text{ und explizit}$$

$$E_1 = \frac{3 \cdot 10^{-8} \text{ As} \cdot \text{Vm}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 6,74 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = E_3 = 1,348 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ \\ \sin 270^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos 330^\circ \\ \sin 330^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

erhält man durch vektorielle Addition

$$\vec{E}_p = E_1 \cdot \vec{e}_1 + E_2 \cdot \vec{e}_2 + E_3 \cdot \vec{e}_3 = 6,74 \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 6,74 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Der Betrag der Feldstärke ergibt sich zu  $E_p = 2,43 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ , der Winkel zur x-Achse beträgt

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \left( -\frac{5}{3\sqrt{3}} \right) = -43,9^\circ$$

### 1.3. Das elektrostatische Potential, Spannung

Da auf Ladungen im elektrischen Feld eine Kraft wirkt, muss zur Verschiebung der Ladung Arbeit aufgewendet werden. Wenn die Verschiebung von Punkt A nach B auf einer geraden Strecke erfolgt und die Kraft  $\vec{F}$ , gegen die Arbeit verrichtet wird, dabei sowohl in Betrag als auch in der Richtung konstant ist, gilt

$$W = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -F s \cos \alpha, \quad (1.3)$$

wobei  $\vec{F}$  die Feldkraft und  $\vec{s}$  den Verschiebungsvektor von A nach B beschreiben.

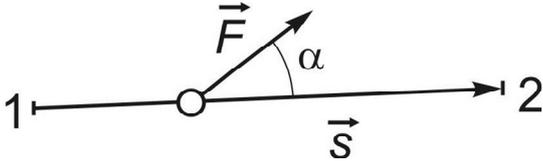


Abb. 1.7: Verschiebungsarbeit bei geradliniger Verschiebung von 1 nach 2 gegen eine konstante Kraft  $\vec{F}$ .

Arbeit, die am System geleistet wird und somit die Energie des Systems erhöht, ist positiv definiert, deshalb erscheint das Minuszeichen in der Gleichung (1.3). In Abb. 1.7 ist ein Fall dargestellt, bei dem eine Kraftkomponente (Projektion von  $\vec{F}$  auf  $\vec{s}$ ) die Richtung der Verschiebung aufweist. Bei einer Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft von 1 nach 2 verringert sich die Energie des Systems, es wird somit negative Arbeit am System geleistet. Gleichbedeutend ist dies mit einer Energieabgabe nach außen. Im allgemeinen Fall erfolgt die Verschiebung einer Ladung auf krummliniger Bahn und die Kraft ist ortsabhängig. Diese Schwierigkeit lässt sich beheben, indem der Verschiebungsweg in so kleine Abschnitte unterteilt wird, dass diese als annähernd gerade und die Kraft für jeweils einen Abschnitt als konstant angesehen werden kann. Die Verschiebungsarbeit für einen Abschnitt lässt sich dann nach (1.3) berechnen. Über alle Teilarbeiten ist zu summieren.

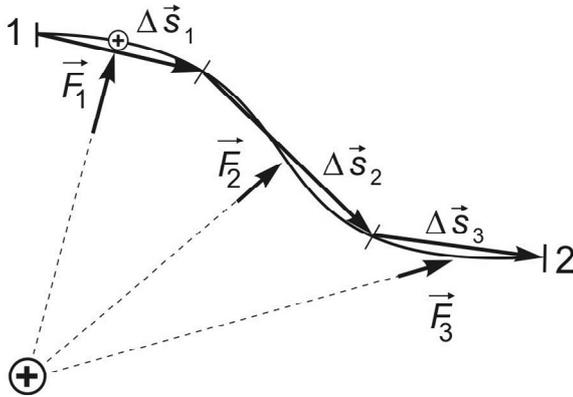


Abb. 1.8: zur Berechnung der Verschiebungsarbeit bei gekrümmter Bahn sowie ortsabhängiger Kraft

Die Verschiebung wird hier in drei Abschnitte geteilt, so dass für jeden Teilabschnitt eine annähernd lineare Verschiebung angenommen werden kann mit einer auf diesem Teilabschnitt wirkenden mittleren Kraft.

Die gesamte Verschiebungsarbeit von 1 nach 2 ergibt sich in erster Näherung aus der Summe der Arbeiten auf den drei Teilstrecken

$$W_{1 \rightarrow 2} \cong -(\vec{F}_1 \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \Delta \vec{s}_2 + \vec{F}_3 \Delta \vec{s}_3) \cong -(F_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + F_3 \Delta s_3 \cos \alpha_3), \quad (1.4)$$

Führt man diese Zerlegung feiner durch, wird der Fehler ebenfalls geringer, im Grenzfall ergibt sich das Integral

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 F(s) \cos \alpha(s) ds. \quad (1.5)$$

Für die Verschiebung einer Ladung im elektrischen Feld erhalten wir mit (1.2)

Verschiebungsarbeit $W_{12} = -Q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \int_1^2 E \cos \alpha(s) ds$	$[W] = \text{Nm} = \text{VAs} = \text{Ws}$
---	--

(1.6)

Der Ladung  $Q$  kann eine potentielle Energie  $W_P$  zugeschrieben werden, die sich während der Verschiebung ändert, da ja Arbeit geleistet wird. Diese Arbeit  $W_{12}$  ist gerade die Differenz der potentiellen Energien:  $W_{12} = W_{P2} - W_{P1}$ . Wird anstelle der potentiellen Energie die Energie pro Ladung verwendet, resultiert eine Größe, welche die Eigenschaften des Feldes charakterisiert, das *elektrostatische Potential*  $\phi$

$$W_{12} = W_{P2} - W_{P1} = Q(\phi_2 - \phi_1). \quad (1.7)$$

Den Ausdruck in der Klammer in Glg. 1.7 bezeichnet man als *Spannung*  $U_{21}$  (Potentialdifferenz von Punkt 2 gegen Punkt 1). Zu Ehren von VOLTA<sup>9</sup> wird die Einheit der Spannung Volt genannt.

Spannung	$U_{21} = \phi_2 - \phi_1$	$[U] = \text{Nm/As} = \text{V (Volt)}$	(1.8)
----------	----------------------------	--	-------

Das elektrostatische Potential ist somit nur als Differenz zweier Werte zugänglich. Da sich diese Differenz nicht ändert, wenn man beide Werte um gleiche Beträge ändert, wird oft ein Bezugspunkt gewählt (z.B. Punkt 1) und dessen Potential gleich Null gesetzt. Der Wert von  $\phi_2$  entspricht dann gerade der Verschiebungsarbeit je Einheitsladung zum Punkt 2.

$$\phi_2 = -\int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s} = -\int_1^2 E(s) \cos \alpha(s) ds.$$

Oftmals ist es bequem, den Punkt 1 mit dem Nullpotential auf die Erdoberfläche zu legen oder ins Unendliche, da dort die Wechselwirkungen zwischen den Punkten 1 und 2 verschwinden. Mit einer solchen Nebenbedingung kann man bei bekanntem Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  jedem Raumpunkt ein skalares Potential  $\phi(\vec{r})$  zuordnen:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s}. \quad (1.9)$$

Aus 1.7. und 1.8. folgt die besonders wichtige Erkenntnis

Ladung mal Spannung ist Arbeit (zugeführte Energie)
---

und formal sollten Sie sich einprägen

Verschiebungsarbeit	$W_{12} = Q \cdot U_{21}$	(1.10a)
Spannung	$U_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s} = -\int_1^2 E \cos \alpha(s) ds$	

In einem *homogenen* elektrischen Feld sind die Feldlinien parallel, die Elektrische Feldstärke hat im betrachteten Teil des Raumes gleichen Betrag und gleiche Richtung. Einen solchen Fall findet man zwischen den Platten eines Plattenkondensators. Verschiebt man eine Probeladung entlang der Feldlinie von einer Platte zur anderen, erhält man

$W = Q \cdot E \cdot s$	$Q$ Ladung des Körpers	(1.10b)
$W = Q \cdot U$	$E$ konstante Feldstärke	
$U = E \cdot s$	$s$ Verschiebungsweg parallel zu den Feldlinien	
	$U$ Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkt	

<sup>9</sup> Alessandro VOLTA (1745-1827), it. Physiker, von Napoleon zum Grafen geadelt; Entwicklung von Kondensator, Elektrometer; Einführung der Begriffe Ladung, Spannung, Kapazität; Erklärung von GALVANIs Froschschenkelversuchen; VOLTA'sche Säule

Sehr häufig wird das Bezugspotential  $\varphi_1$  gleich Null gesetzt, so dass die Indizes der Spannung entfallen können. Wie im konkreten Fall eines *inhomogenen* elektrischen Feldes das Potential zu berechnen ist, soll gleich an Beispielen demonstriert werden. Prinzipiell wichtig ist der Umstand, dass  $U$  nur von den Werten des Integrals an den Punkten 1 und 2 abhängt, somit nicht von der Verschiebungstrajektorie. Da also jegliche Verschiebung von 1 nach 2 den gleichen Wert für  $U$  ergibt, können wir stets eine solche wählen, bei der sich das Integral bequem berechnen lässt. Zwischen zwei unmittelbar benachbarten Raumpunkten, die durch den Verschiebungsvektor  $d\vec{s}$  verbunden sind, ist die Potentialdifferenz gleich Null, wenn die Verschiebung  $d\vec{s}$  senkrecht zur Richtung des Feldes  $\vec{E}$  erfolgt. Die Gesamtheit solcher Orte gleichen Potentials bildet eine *Äquipotentialfläche*.

Äquipotentialflächen verbinden Orte gleichen Potentials, die Feldlinien schneiden die Äquipotentialflächen senkrecht.

Weiter folgt aus 1.10a, dass die Verschiebungsarbeit entlang einer geschlossenen Bahn gleich Null ist. Ein solches Feld mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *Konservatives Feld*.

$$\text{Konservatives Feld } \oint \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (1.11)$$

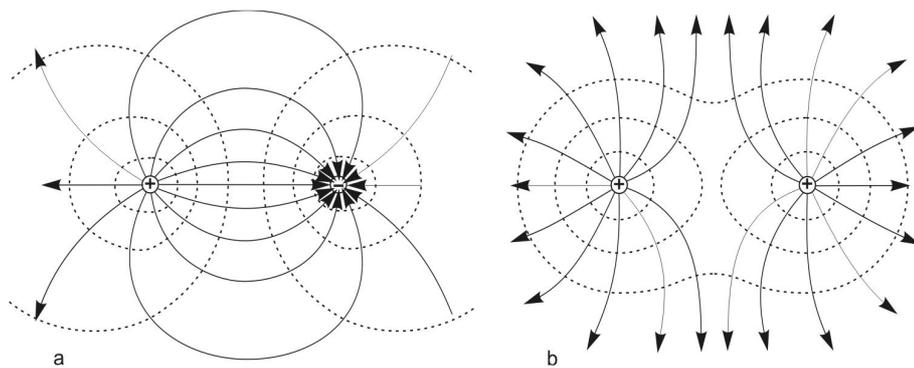


Abb. 1.9: Feldlinien (glatt) und Äquipotentialflächen (gestrichelt)  
a) zweier ungleichnamiger Punktladungen (Dipol)  
b) zweier positiver Ladungen

### Übungen

1.7. In einem Kondensator mit dem Plattenabstand  $d = 5$  cm besteht ein elektrisches Feld der Stärke  $E = 9,4$  kV/m. Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Ladung  $Q = 5,5 \cdot 10^{-12}$  C von der einen Platte zur anderen zu transportieren?

Ergebnis:  $2,59 \cdot 10^{-9}$  Nm (Vorzeichen hängt von der Richtung der Verschiebung ab)

1.8. In homogenen Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke  $E = 8,5 \cdot 10^4$  V/m. wird ein geladenes Teilchen ( $Q = 2,5 \cdot 10^{-8}$  C) a) parallel zu den Feldlinien und b) unter einem Winkel von  $30^\circ$  zu den Feldlinien  $1,2$  cm weit gegen das Feld transportiert.

Berechnen Sie die aufzubringende Arbeit.

Ergebnis: a)  $-2,55 \cdot 10^{-5}$  Nm; b)  $-2,21 \cdot 10^{-5}$  Nm

1.9. Zwischen beiden Platten eines Plattenkondensators liegt eine Spannung von  $22,5$  V. Der Abstand zwischen den Platten beträgt  $3,0$  cm.

- Wie groß ist die elektrische Feldstärke zwischen den Platten?
- Ein positiv geladener Körper mit einer Ladung von  $Q = 6 \cdot 10^{-8}$  C wird um  $2,0$  cm parallel zu den Feldlinien verschoben. Wie groß ist die Änderung seiner potentiellen Energie?
- Wie groß ist das Potential der negativ geladenen Platte, wenn man das der positiv geladenen Platte mit der Erde verbindet (gleich Null setzt)?

Ergebnis: a)  $750$  V/m; b)  $-9 \cdot 10^{-7}$  Nm; c)  $-22,5$  V

**1.10\*** Im homogenen elektrischen Feld  $\vec{E} = 5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \vec{e}_x$  soll die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 mit den Ortsvektoren  $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m}$  und  $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \text{m}$  bestimmt werden.

*Lösung:* Eine Skizze schafft auch hier Klarheit über die Verhältnisse.

Nach Glg. 1.10a ergibt sich für den konkreten Fall

$$U_{21} = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = - \vec{E} \cdot (\vec{s}_2 - \vec{s}_1)$$

$$U_{21} = - \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = -E (\Delta s_x \cdot \cos 0 + \Delta s_y \cdot \cos 90^\circ)$$

$$U_{21} = -E \cdot \Delta s_x$$

Hierbei konnte der Umstand ausgenutzt werden, dass das elektrische Feld konstant ist und somit vor das Integral geschrieben werden kann. Die folgende Integration über die Verschiebung ergibt den Verschiebungsvektor, mit dem das elektrische Feld skalar zu multiplizieren ist. Mit den gegebenen Größen berechnet sich die Spannung zu  $U_{21} = -25 \text{ V}$ . Somit ist das Potential am Punkt 2 geringer als am Punkt 1.

**1.11.\*** Zu berechnen ist das Potential  $\varphi(\vec{r})$  einer Punktladung  $Q$ .

*Lösung:* Das elektrische Feld der Punktladung  $Q$  läßt sich leicht aus Glg. 1.1 ableiten, indem man durch die Probeladung dividiert. Man erhält  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ . Der Wert der Feldstärke geht im Unendlichen gegen Null, so dass es bequem ist, dort das Bezugspotential ebenfalls gleich Null zu setzen. Aus Glg. 1.9. folgt

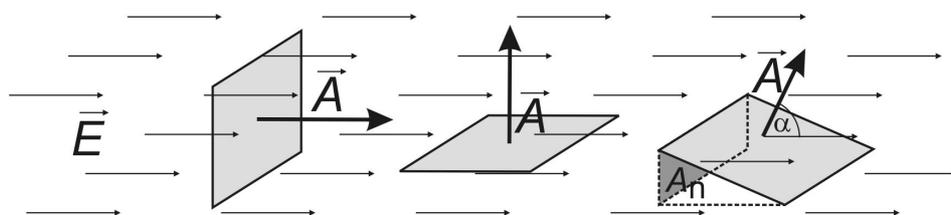
$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \int_r^{\infty} r^{-2} dr$$

Hierbei wurde die Verschiebung entlang einer Feldlinie gewählt ( $\vec{e}_r \parallel d\vec{s}$ ), so daß  $\vec{e}_r \cdot d\vec{s} = dr$ .

$\varphi(r) = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \right)_r^{\infty}$ . Der Wert des Potentials hängt somit nur vom Abstand  $r$  ab, was aus Symmetriegründen zu erwarten ist.

$\varphi(r) = - \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left( \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$ . Das Potential wächst folglich stark an bei Verringerung von  $r$ .

### 1.4. Elektrische Flussdichte



$$\Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = \epsilon_r \epsilon_0 EA \quad \Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = 0 \quad \Psi = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \vec{A} = \epsilon_r \epsilon_0 EA \cos \alpha = \epsilon_r \epsilon_0 EA_n$$

Abb. 1.10: Elektrischer Fluss durch eine ebene Fläche  $A$

Der Vektor  $\vec{A}$  einer Fläche hat den Betrag des Flächeninhalts der Fläche und steht senkrecht auf ihr. Der elektrische Fluss  $\Psi$  bestimmt sich aus der auf dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  senkrechten Flächenprojektion  $A_n$

**Definition:** Unter dem elektrischen Fluss  $\Psi$  durch ein Flächenstück  $A$  versteht man das Produkt aus der elektrischen Feldkonstanten  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ , der die Fläche durchsetzenden Feldstärke  $E$  und der senkrecht zu den Feldlinien stehenden Flächenprojektion  $A_n$ :  $\Psi = \varepsilon_r \varepsilon_0 E A_n$ .

Da positive und negative Ladungen Quellen bzw. Senken von Feldlinien darstellen, erscheint die Vorstellung zunächst plausibel, dass bei sonst gleichen geometrischen Verhältnissen die gesamte "Anzahl" der Feldlinien proportional zur Ladung in einem Raumgebiet sein sollte. Legt man eine geschlossene Fläche um ein solches Raumgebiet und "zählt" die Feldlinien, müssten hieraus Schlussfolgerungen bezüglich der eingeschlossenen Ladung möglich sein.

Der von einer Ladung  $Q$  ausgehende, eine diese vollständig umschließende Oberfläche durchsetzende elektrische Fluss ist gleich der Ladung:  $\Psi = Q$ .

Besteht eine geschlossene Oberfläche aus  $k$  ebenen Teilstücken (z.B. wie beim Quader), summiert man über die die einzelnen Flächen durchsetzenden elektrischen Flüsse

$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_k = \varepsilon_r \varepsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + E_2 \cdot A_{2n} + \dots + E_n \cdot A_{kn})$ . Diese Beziehung gilt nur, wenn das eine Teilfläche durchsetzende elektrische Feld jeweils konstant ist.

Im Allgemeinen ist jedoch die geschlossene Fläche gekrümmt und das Feld inhomogen. Die Berechnung des gesamten Flusses wird möglich, indem man diese Fläche differentiell fein unterteilt. Jedem Flächenelement kann ein zur Oberfläche senkrechter Vektor  $d\vec{f}$  zugeordnet werden. Der elektrische Fluss  $d\Psi$  durch  $d\vec{f}$  ergibt sich somit zu  $d\Psi = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{D} \cdot d\vec{f} = D \cdot df_n$ . Man definiert:

$$\text{elektrische Flussdichte oder Verschiebungsdichte } \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1.12)$$

Im Unterschied zum Elektrischen Feld ist die Verschiebungsdichte eine vom Material unabhängige Größe und wird ausschließlich durch die Verteilung der Ladungen im Raum bestimmt. Den gesamten Fluss durch die geschlossene Oberfläche erhält man durch Summation (Integration) der Beiträge aller Flächenelemente. Wirklich ist dieser Wert gerade gleich der gesamten umschlossenen Ladung, unabhängig von der Gestalt der sie umschließenden Oberfläche!

$$\begin{aligned} \text{GAUSS}^{10}\text{scher Satz} \quad Q &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{f} \\ Q &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \oiint E \, df_n = \oiint D \, df_n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Das eigenartige Integralzeichen  $\oiint$  besagt lediglich, dass die Integrationsvariable eine Fläche darstellt und sich die (bestimmte) Integration über eine *geschlossene* Oberfläche erstreckt. Der GAUSS'sche Satz ist ein **Grundgesetz** der Elektrostatik und gilt übrigens ganz unabhängig von der Form der Hüllfläche und der Art der umschlossenen Ladungsverteilung, egal ob Leiter oder Nichtleiter! Da  $Q$  die Gesamtladung darstellt, ergibt die Berechnung nach Glg. 1.13 für einen umschlossenen Dipol (zwei gleich große Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens im Abstand  $d$ ) offensichtlich den Wert Null. Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, wie man den GAUSS'schen Satz anwenden kann.

<sup>10</sup> Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) dt. Mathematiker und Physiker; Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten; Erdmagnetismus, Magnetometer; elektromagnet. Telegraph, Maßsystem (mit Weber); Prinzip des kleinsten Zwanges in der Mechanik; Mathemat. Beiträge zur Physik: Methode der kleinsten Quadrate in der Fehlerrechnung; Fehlerfunktion; Zahlenebene; Gamma-Funktion; Differentialgeometrie; Potentialtheorie; Gaußscher Satz der Vektoranalysis

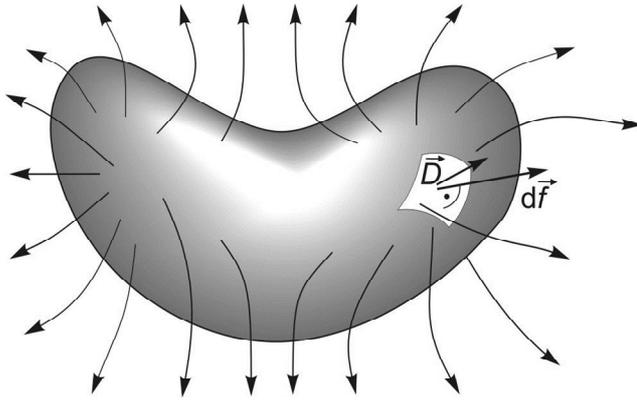


Abb. 1.11: Elektrischer Verschiebungsfluss durch eine geschlossene Oberfläche. Jedes Flächenelement wird durch einen zur Oberfläche senkrechten Vektor dargestellt. Bei differentiell kleinem Flächenelement  $d\vec{f}$  ist in dessen Bereich die Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  konstant. Der elektrische Fluß durch dieses Flächenelement ist  $d\Psi = D df_n$ , wobei  $df_n$  die auf  $\vec{D}$  senkrechte Flächenprojektion von  $d\vec{f}$  darstellt.

### Übungen

1.12. Welches Vorzeichen hat der elektrische Fluss  $\Psi$  durch eine um eine negative Punktladung geschlossene Fläche? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Ergebnis:* negatives, weil  $d\vec{f}$  und  $\vec{E}$  antiparallel verlaufen

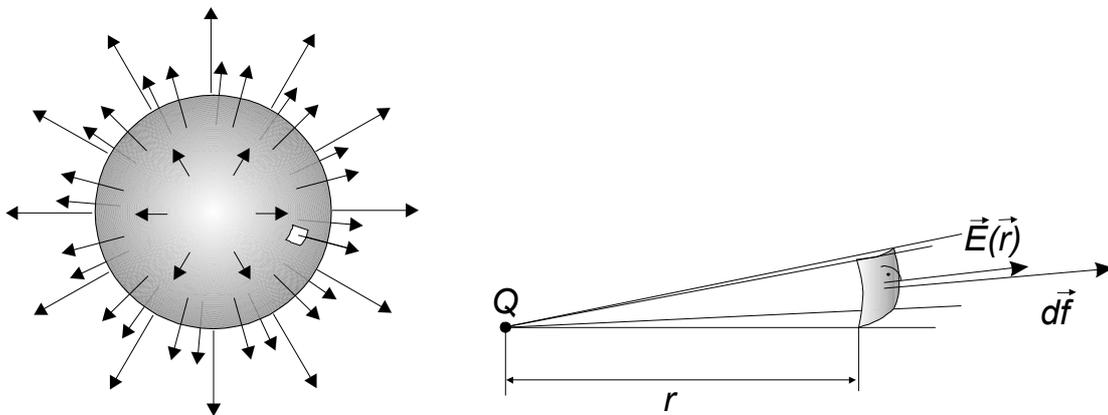
1.13. Eine Kugel ( $r = 6,2$  cm) wird negativ aufgeladen ( $Q = 2,8 \cdot 10^{-8}$  C). Berechnen Sie die elektrische Flussdichte (Quotient aus Fluss und Fläche)

a) auf der Oberfläche der Kugel; b) im Abstand  $a = 3,1$  cm von der Oberfläche.

*Ergebnis:* a)  $5,8 \cdot 10^{-7}$  C/m<sup>2</sup>; b)  $2,6 \cdot 10^{-7}$  C/m<sup>2</sup>

1.14.\* Berechnen Sie das Elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  einer Punktladung  $Q$ !

Hinweis: Eine Punktladung erzeugt ein Feld mit Kugelsymmetrie. Es erleichtert wesentlich die Berechnung, wenn man die Integrationsfläche als Kugeloberfläche annimmt, mit der Ladung im Zentrum.



*Lösung:* Auf der Abbildung sind links die Feldlinien einer Punktladung durch eine Kugeloberfläche und rechts ein Flächenelement dargestellt. Der Vektor des E-Feldes an dieser Stelle  $\vec{E}(\vec{r})$  steht senkrecht auf dieser Fläche, ebenso wie der dazu gehörende Flächenvektor  $d\vec{f}$ .

Da beide Vektoren parallel verlaufen, kann man das Skalarprodukt durch das Produkt der Beträge ersetzen:

$\vec{E} \cdot d\vec{f} = E \cdot df \cdot \cos 0^\circ = E \cdot df$ . Somit ergibt sich  $Q = \epsilon_r \epsilon_0 \oiint E(r) df$ . Dabei ist auch zu berücksichtigen, dass für alle Flächenelemente auf der Kugeloberfläche der Betrag des Feldes gleich groß ist, denn dieser hängt lediglich vom Abstand  $r$  zur Punktladung ab. Da sich dieser im Rahmen der durchzuführenden Integration nicht ändert ( $r$  hängt nicht von der Integrationsvariablen  $f$  ab, also auch nicht  $E$ ), ist  $E$  eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Hierdurch reduziert sich das Integral auf die Berechnung der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r$ :

$Q = \epsilon_r \epsilon_0 E(r) \oiint df = \epsilon_r \epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2$ . Durch Umstellen erhält man leicht den Betrag des Feldes einer

Punktladung  $E(r) = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2}$ . Da  $\vec{E}(\vec{r})$  die Richtung des Einheitsvektors von  $\vec{r}$  hat ( $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ), gilt für das

Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r$ , also lautet die allgemeine Lösung

Elektrisches Feld einer Punktladung	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	(1.14)
-------------------------------------	---	--------

Nennen wir jetzt diese Punktladung  $Q_2$  und bringen in deren Nähe eine zweite Probeladung  $Q_1$ , so wird laut Glg. 1.2 auf die Probeladung  $Q_1$  eine Feldkraft  $\vec{F}_{12}(\vec{r}) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$  ausgeübt. Dies ist das oben bereits formulierte COULOMB-Gesetz. Hier ist  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  der Vektor von  $Q_2$  nach  $Q_1$ .

**1.15.\*** Eine aus nichtleitendem Material mit  $\epsilon_r=1$  hergestellte Kugel mit dem Radius  $R$  wurde so präpariert, dass in ihrem Volumen eine konstante Ladungsträgerkonzentration  $\rho = dQ/dV = Q/V$  von negativen Ladungsträgern erzeugt wurde.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des *Gaußschen Satzes* das Elektrische Feld  $E(r)$  sowohl für  $r < R$  als auch  $r > R$ !

b) Tragen Sie die Abhängigkeit  $E(r)$  qualitativ in einem Diagramm auf!

geg.:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

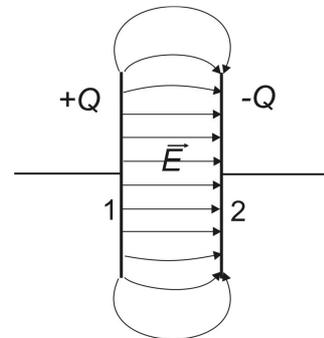
*Anmerkung:* Gehen Sie bei der Ableitung ganz analog vor, wie bei der Berechnung des Elektrischen Feldes einer Punktladung (s. Vorlesung). Im Unterschied dazu ist aber im aktuellen Fall die von der Integrationsfläche umschlossene Ladung (für Bereiche innerhalb der Kugel) von der Größe des von der Integrationsfläche umschlossenen Volumens abhängig.

## 1.5. Die Kapazität

Eine Anordnung von zwei voneinander elektrisch isolierten planparallelen Platten aus leitfähigem Material wie auf Abb. 1.12 bezeichnet man als *Plattenkondensator*. Wenn man eine Ladung  $Q$  von der einen auf die andere Platte transportiert, ist der Kondensator geladen und es bildet sich ein Elektrisches Feld heraus.

Abb 1.12: Plattenkondensator

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand. Im Innern des Kondensators verlaufen die Feldlinien parallel. Somit sind Betrag und Richtung des Feldes dort konstant, man bezeichnet dies als *homogenes Feld*. An den Plattenrändern ist das Feld dagegen inhomogen. Dieser Effekt ist dann von untergeordneter Bedeutung, wenn der Plattenabstand klein ist gegen deren Durchmesser.



Unter der für kleinen Abstand und großem Durchmesser der Platten guten Annahme eines homogenen Feldes lässt sich die Spannung zwischen beiden Platten leicht aus Glg. 1.10b berechnen:

$$U_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -E \cdot d . \quad (1.15)$$

In welchem Zusammenhang steht die Ladung  $Q$  des Kondensators mit der Feldstärke  $E$ ? Hier findet wieder der Gaußsche Satz Anwendung. Es gilt, zunächst eine geeignete Fläche zu finden, welche die Ladung  $Q$  umschließt und eine einfache Integration gestattet. Wie auf Abb. 1.13 gezeigt, kann eine solche Fläche z.B. die Oberfläche eines Quaders sein, die eine Kondensatorplatte voll umschließt. Dabei verläuft eine der 6 Flächen des Quaders zwischen beiden Kondensatorplatten. Wenn man Randeffekte vernachlässigt, gibt es nur auf dieser Fläche Bereiche mit  $E \neq 0$ , nämlich gerade zwischen beiden Platten der Fläche  $A$ . Somit ist nur der elektrische Fluss durch diese Fläche ungleich Null und wir erhalten für den gesamten elektrischen Fluss durch die Oberfläche des Quaders

$$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 + \Psi_6 = \epsilon_r \epsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + \dots + E_6 \cdot A_{6n}) = \epsilon_r \epsilon_0 E \cdot A \quad (1.16)$$

Ersetzt man das elektrische Feld in Glg. 1.16 unter Anwendung von Glg. 1.15, so erhält man einen wichtigen Zusammenhang für die Beträge von Spannung und Ladung eines Plattenkondensators:

$Q = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \cdot U$	(1.17)
Kapazität des Plattenkondensators $Q = C \cdot U \quad [C] = 1 \frac{As}{V} = 1F \quad (\text{Farad})$	

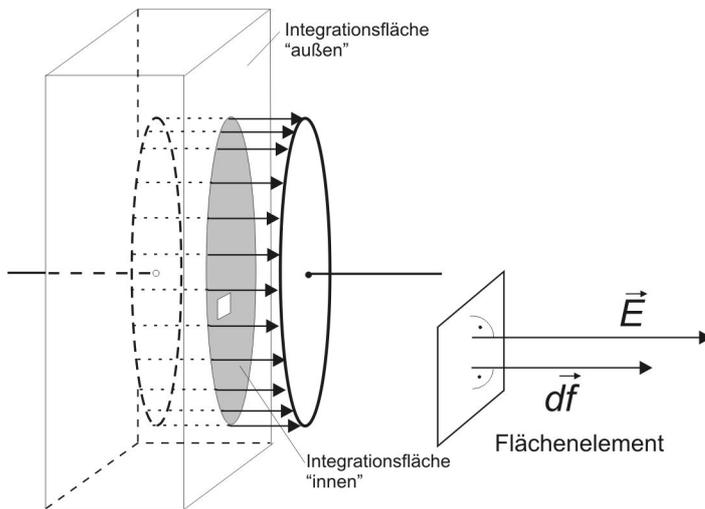


Abb 1.13: Elektrischer Fluß beim Plattenkondensator

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand. Zwischen beiden rechteckigen Kondensatorplatten ist das Feld homogen, außerhalb ist es vernachlässigbar klein. Die vom Feld durchsetzte Fläche ist somit gerade gleich der einer Platte. Da die Feldlinien von  $\vec{E}$  senkrecht zur Oberfläche verlaufen, sind sie stets parallel zu dem Vektor  $d\vec{f}$  eines jeden Flächenelementes (rechts im Bild).

Im Experiment lässt sich die Beziehung 1.17 leicht verifizieren: Wenn man den Plattenabstand eines aufgeladenen Kondensators bei gleichbleibender Ladung vergrößert, wächst die Spannung zwischen den beiden Platten proportional mit  $d$ . Einen analogen Effekt erreicht man bei Verringerung der Fläche des Kondensators, indem man z.B. beide Platten parallel zueinander verschiebt.

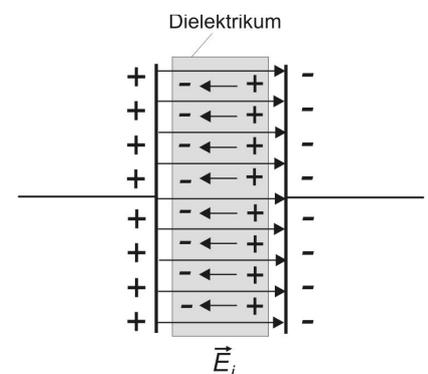
Vergrößert man die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$ , z.B. durch Einschleiben einer Platte aus PVC, sinkt die Spannung, beim Herausziehen steigt sie dagegen wieder auf den vorigen Wert an.

Ein solches Dielektrikum erzeugt durch Verschiebung seiner Ladungen infolge der Feldkraft des außen angelegten Feldes ein diesem entgegengesetztes inneres Feld  $\vec{E}_i$ . Da sich beide Felder addieren, sinkt das gesamte Feld und damit die außen angelegte Spannung. Aus Glg. 1.17 ist ersichtlich, dass die Kapazität mit  $\epsilon_r$  wächst.

Abb. 1.14: Plattenkondensator mit Dielektrikum

Veranschaulicht sind die Feldlinien im geladenen Zustand infolge der außen aufbrachten Ladungen (äußeres Feld), sowie des durch Polarisation des Dielektrikums erzeugten inneren Feldes. Da Felder additiv sind, hat das resultierende Feld eine wesentlich geringere Stärke.

Ein Dielektrikum ist ein Isolator. Die Verschiebung von Ladungen ist deshalb nur auf molekularer Ebene möglich. Die negativ geladene Elektronenhülle verschiebt sich geringfügig gegenüber dem Gerüst aus den positiv geladenen Kernen. Jedes Molekül erhält hierdurch ein elektrisches Dipolmoment, es wird *polarisiert*. Die Felder aller polarisierten Moleküle addieren sich zum inneren Feld. Bei Kristallen verschieben sich im äußeren Feld unterschiedlich geladene Ionen des Gitters gegeneinander, wodurch eine Polarisation erreicht wird.



### Parallel- und Reihenschaltung

Wenn man Kondensatoren parallel bzw. in Reihe schaltet (s. Abb. 1.15), kann man die Kapazität einer solchen Anordnung leicht durch die Einzelkapazitäten ausdrücken. Betrachten wir zunächst die Parallelschaltung. Es gilt

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U$$

Eine analoge Beziehung erhält man für die Reihenschaltung, wenn man beachtet, dass die Ladungen auf jedem der beiden Kondensatoren gleich der Gesamtladung ist (dies folgt aus dem Umstand, dass die Summe der positiven und negativen Ladungsträger auf beiden miteinander leitend verbundenen Kondensatorflächen unter Berücksichtigung der Vorzeichen verschwindet).

$$U_{ges} = U_1 + U_2, \quad \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}.$$

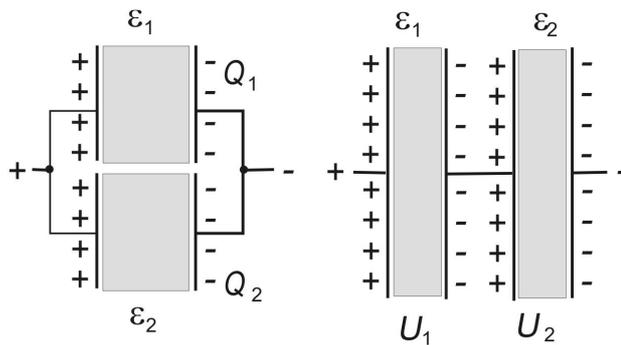


Abb. 1.15: Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Zu beachten ist, dass durch Leiter verbundene Teile stets auf gleichem Potential liegen. Bei Reihenschaltung tragen beide Kondensatoren die gleiche Ladung, bei Parallelschaltung sind die Spannungen gleich.

Ganz ähnliche Betrachtungen kann man für entsprechende Schaltungen mit mehr als zwei Kondensatoren anstellen:

Parallelschaltung $C_{ges} = \sum_i C_i$	(1.18)
Reihenschaltung $C_{ges}^{-1} = \sum_i C_i^{-1}; C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; C_{ges} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}$	

### Energiegehalt des geladenen Kondensators

Die im Kondensator gespeicherte *Energie* ist gleich der Arbeit, die zur Aufladung des Kondensators notwendig ist. Diese Arbeit wird von der Stromquelle geleistet, indem Ladungen gegen die aktuelle Potentialdifferenz auf die Kondensatorplatten gebracht werden. Liegt während dieses Prozesses zwischenzeitlich eine Spannung  $U'$  an, benötigt man zur Vergrößerung der bereits aufgebrauchten Ladung um  $dQ$  die Energie  $dW = U' dQ$ . Verwendet man Glg. 1.17, um die Abhängigkeit der Spannung von der Ladung explizit auszudrücken und integriert über den gesamten Aufladevorgang, erhält man die

hierzu notwendige Arbeit:  $W = \int_0^Q U' dQ = C \int_0^U U' dU' = \frac{C}{2} U^2.$

Energie des geladenen Kondensator $W = \frac{Q}{2} U = \frac{C}{2} U^2$	(1.19)
---	--------

## 1.6. Die Energiedichte des elektrischen Feldes

Ersetzt man in Glg. 1.19 die Ausdrücke für Spannung und Kapazität mittels Glgn. 1.12, 1.15 und 1.17, folgt für den Energieinhalt eines homogenen elektrischen Feldes innerhalb eines Volumens  $V$

$$W = \frac{C}{2} U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot V = \frac{1}{2} D \cdot E \cdot V. \text{ Division von } W \text{ durch } V \text{ ergibt die}$$

$$\text{Energiedichte des elektrischen Feldes } \omega_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (1.20)$$

Im Plattenkondensator ist die Energiedichte konstant und man erhält die Gesamtenergie durch Multiplikation der Energiedichte mit dem Volumen des Dielektrikums. Bei inhomogenen elektrischen Feldern ist eine differentielle Rechnung notwendig. Das Volumenelement  $dV$  enthält die Energie  $dW = \omega_{el} dV$ , eine Integration über das von Feld durchsetzte Raumgebiet liefert die darin enthaltene Feldenergie:  $W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 dV$ .

Tabelle 1.1. Relative Permittivitäten  $\varepsilon$ , bei ca. 20°C gemessen in statischen oder niederfrequenten Feldern

Helium	1,00007	Glimmer	5 - 8
CO <sub>2</sub>	1,00099	Glas	4 - 16
O <sub>2</sub>	1,00049	Porzellan	6
N <sub>2</sub>	1,00053	Aluminiumoxid	9 - 12
Pentan	1,84	MgTiO <sub>3</sub>	10 - 50
Benzol	2,28	BaTiO <sub>3</sub>	10 <sup>3</sup> - 10 <sup>4</sup>
Chloroform	4,81	NaCl	6,1
Aceton	21,4	Diamant	5,5
Äthanol	25,1	Silizium (undotiert)	11,5
Glycerin	41,1	Germanium "	16
Wasser 80,4		GaAs "	13
Cyanwasserstoff	114,9	PVC	3,0

### Technische Kondensatoren

Die ursprüngliche Form des Kondensators (=Verdichter) war die der *Leidener Flasche*, also eines mit Metallfolie ausgekleideten oder mit Wasser gefüllten gläsernen Gefäßes. Die Wirkung von Elektrisiermaschinen konnten durch Speicherung der Ladung in einer Leidener Flasche viel eindrucksvoller demonstriert werden.

Heute sind Kondensatoren fundamentale Bauelemente der Elektrotechnik. Sie dienen u.a. der Glättung, Kopplung, Phasenschiebung, Kompensation, Entstörung, als Filter, in Schwingkreisen, Erzeugung von Stoßentladungen in mächtigen Impulslasern, aber auch als winzige Datenspeicher in integrierten Schaltungen. Die beiden wichtigen Kenngrößen sind *Kapazität* und *zulässige Spannung*. Weiterhin sind neben den Abmessungen des Bauelementes dessen Temperatur- und Hochfrequenzverhalten wichtig.

Es gibt sehr verschiedenartige Bauausführungen von Kondensatoren. Die ursprüngliche Form als Plattenkondensator findet man stilisiert als Schaltzeichen in elektronischen Schaltungen: Zwei voneinander isolierte Platten mit zugeführten Leitern.

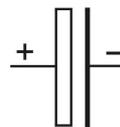


*Plattenkondensatoren* mit Luft als Dielektrikum findet man nur noch selten als Drehkondensator mit einstellbarer Kapazität. Hierbei werden kammartige Strukturen von Plattenstapeln ineinander verdreht und hierdurch stufenlos Kapazitäten eingestellt. Wesentlich höhere Kapazitäten erreicht man mit *Keramikkondensatoren*, bei denen die hohen Werte der relativen Permittivität von Titanaten und Zirkonaten (10<sup>4</sup> - 10<sup>5</sup>) zu Kapazitäten von einigen  $\mu\text{F}$  bei Abmessungen von wenigen mm<sup>2</sup> Kondensatorfläche führen. Hervorragend sind die Hochfrequenzeigenschaften im GHz-Bereich und hohe Nennspannungen bis zu einigen 10 kV.

*Wickelkondensatoren* bestehen aus Papier- oder Kunststofffolien, die Metallfolien oder dünne Bedampfungsschichten isolieren. Es werden trotz der geringen Werte der Permittivität der verwendeten Folien durch große aufgewickelte Flächen und Verwendung dünner Folien hohe Kapazitäten

(ca. 10mF) erreicht und Nennspannungen bis ca. 10 kV. Nachteile sind schlechte HF-Eigenschaften (sog. parasitäre Induktivität durch den Wicklungscharakter) und großes Volumen.

Bei den *Elektrolytkondensatoren* (Aluminium- und Tantal-Elkos) besteht die positive Anode aus einer Metallschicht mit großer Oberfläche (geätzte Alu-Folie oder gesintertes Ta-Pulver). Als Dielektrikum dient eine dünne Oxidschicht mit relativ großem  $\epsilon$  (ca. 10 bei Al bzw. 27 bei Ta). Die zweite Platte ist ein Elektrolyt, der von der Kathode (unoxidierte Al-Folie bzw. Leitsilberschicht) kontaktiert wird. Da die Oxidschicht stets auf der Anode liegt, gilt es bei der praktischen Anwendung stets auf richtige Polung der Kondensatoren zu achten. Falschpolung führt wie Überschreiten der höchstzulässigen Spannung zur Zerstörung des Kondensators infolge elektrochemischer Gas- und Wärmeentwicklung. Der Kondensator kann geräuschvoll (und gefährvoll!) platzen. Ta-Elkos sind besonders klein und werden bis etwa 300 $\mu$ F und 100V gebaut, Al-Elkos gibt es bis über 1kV und 1F. Für Wechselfspannungen sind Elkos natürlich nicht geeignet.



*Goldkondensatoren* sind eine spezielle Bauform von Elkos, bei denen als Dielektrikum eine molekulare Doppelschicht fungiert. Die Nennspannungen sind auf einige Volt begrenzt, infolge der großen erreichbaren Kapazitäten bis über 1000 F sind solche Kondensatoren als Notstromversorgung u.a. für Mikrocomputer verwendbar. Hierbei ist interessant, dass sie eine praktisch unbegrenzte Zahl von Lade-Entladezyklen überstehen, und hierbei (ebenfalls im Unterschied zu den Akkus) innerhalb weniger Sekunden be- und entladen werden können.

## Übungen

**1.16.** Berechnen Sie die im Plattenkondensator ( $A = 314 \text{ cm}^2$ ,  $d = 0,5 \text{ mm}$ ) bei einer Spannung von  $U = 220 \text{ V}$  gespeicherte Energie (Dielektrikum ist Glimmer mit  $\epsilon_r = 6$ ). Wie groß ist die Energiedichte?

*Ergebnis:* 0,16 mWs; 10,2 Ws/m<sup>3</sup>

**1.17.** Welche Energiedichte kann ein elektrisches Feld in feuchter Luft höchstens haben, wenn es bei einer Feldstärke  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$  zum Funkenüberschlag kommt? Berechnen Sie die Spannung, die man hierbei an einem luftgefüllten Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von  $d = 4 \text{ mm}$  höchstens anlegen kann.

*Ergebnis:* 17,7 Ws/m<sup>3</sup>; 8 kV

**1.18.** Ein auf die Spannung  $U_1 = 100 \text{ V}$  aufgeladener Kondensator der Kapazität  $C_1 = 20 \mu\text{F}$  wird an einem ungeladenen Kondensator der Kapazität  $C_2 = 10 \mu\text{F}$  parallel geschaltet. Berechnen Sie die Spannung, die an beiden Kondensatoren anliegt. Bleibt nach der Parallelschaltung die Energie erhalten?

*Ergebnis:* 66,7 V; nein

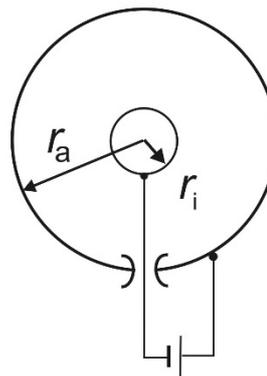
**1.19.** Wie groß müsste die Plattenfläche eines luftgefüllten Plattenkondensators sein, der bei einem Plattenabstand von  $d = 1 \text{ mm}$  und einer Spannung von  $U = 220 \text{ V}$  die gleiche Energie speichert wie eine Autobatterie von 12 V und 88 Ah?

*Ergebnis:* 17700 km<sup>2</sup>

**1.20.\*** Wie groß ist die Kapazität eines Kugelkondensators, wenn die Durchmesser von Innen- und Außenkugelschalen  $d_i = 200 \text{ mm}$  und  $d_a = 300 \text{ mm}$  betragen und das Dielektrikum eine relative Dielektrizitätskonstante von  $\epsilon = 4$  aufweist?

*Anmerkung:* Gehen Sie bei der Ableitung ganz analog vor, wie bei der Berechnung der Kapazität für den Plattenkondensator, beachten Sie aber hier, daß das elektrische Feld zwischen beiden Kugelschalen nicht homogen ist (anders als beim Plattenkondensator), sondern offensichtlich Kugelsymmetrie hat. Eine günstige Integrationsfläche ist die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt mit der des Kugelkondensators identisch ist und für deren Durchmesser  $d$  gilt  $d_i < d < d_a$ .

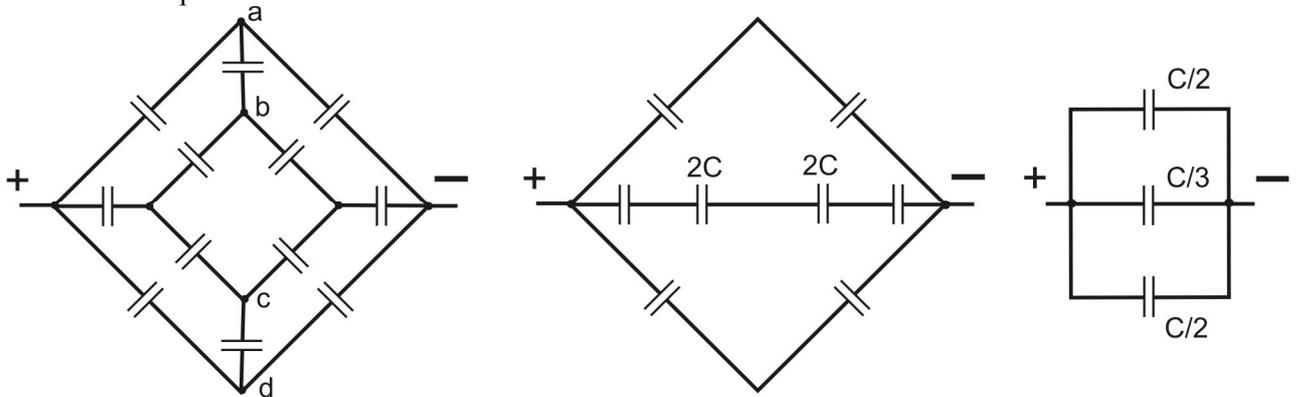
*Ergebnis:* 135 pF



**1.21.** Aus 12 Röhrenkondensatoren gleicher Kapazität  $C$  wird ein Würfel angefertigt, indem je ein Anschluss von jeweils drei Kondensatoren zusammengelötet eine Würfecke bildet. Die "Würfelkante" wird durch einen Kondensator gebildet. Wie groß ist die Gesamtkapazität, wenn diese über zwei Eckpunkte des Würfels gemessen wird, die durch eine *Flächendiagonale* verbunden sind?

*Anmerkung:* Die Lösung wird vereinfacht, wenn Sie beachten, dass ggf. Punkte gleichen Potentials (Symmetrie ausnutzen!) stets durch einen zusätzlichen Leiter verbunden werden könnten, der dann die Messung nicht beeinflusst (denn über den Leiter würden ja keine Ladungen fließen). Nach dem gleichen Prinzip kann man einen zwischen zwei Punkten gleichen Potentials befindlichen Kondensator entfernen (denn in einem solchen Fall ist er ja nicht geladen) oder durch einen Draht ersetzen, s.o.

*Lösung:* Wieder ist eine Skizze hilfreich. Allerdings ist es günstig, anstelle einer perspektivischen Darstellung des Würfels, diesen quasi platt zu drücken und, um Kurzschlüsse der Verbindungsdrähte der Kondensatoren zu vermeiden, diese ggf. etwas zu dehnen oder zu stauchen. Das sollte möglichst symmetrisch geschehen. Dann erkennt man leichter, dass die Punkte a, b, c und d (s. Abb.) alle auf gleichem Potential liegen, nämlich gerade auf dem mittleren, bezogen auf die Anschlüsse + und -. Somit ist es praktisch, die Punkte b und c leitend zu verbinden, die Kondensatoren zwischen a, b sowie zwischen c, d können entfernt werden. Es ergibt sich eine Gesamtkapazität von  $4C/3$ .



**1.22.** Wie 1.15. aber mit den Anschlüssen a) über die Raumdiagonale und b) über eine Würfelkante.

**1.23.\*** Ein  $l = 1$  m langes Koaxialkabel mit einem Innenleiter ( $R_i = 0,5$  mm) und einem Außenleiter ( $R_a = 3,5$  mm) bildet einen sogenannten Zylinderkondensator. Der Raum zwischen beiden Leitern besteht aus einem Dielektrikum mit  $\epsilon = 1,2$ .

a) Geben Sie in einer Skizze (Querschnitt) den Verlauf der Feldlinien des elektrischen Feldes innerhalb und außerhalb des Kabels qualitativ an, wenn der Innenleiter positiv gegen den Außenleiter geladen ist.

b) Leiten Sie eine Formel ab zur Bestimmung der Kapazität des Zylinderkondensators.

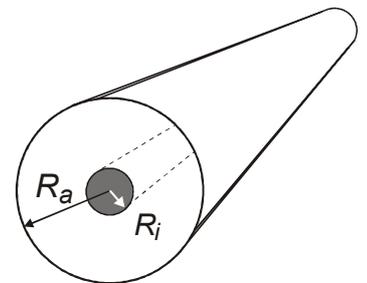
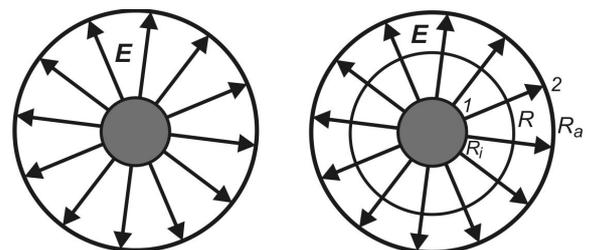


Abb. Koaxialkabel

*Anmerkung:* Verfahren Sie hierbei wie bei der Berechnung der Kapazität des Plattenkondensators. Wenden Sie also den Gaußschen Satz an sowie die Definition der elektrischen Spannung (Zusammenhang zwischen Elektrischem Feld und Potential). Eine günstige Integrationsfläche ist die Oberfläche eines Zylinders, dessen Symmetrieachse mit der des Koaxialkabels identisch ist und für dessen Radius  $R$  gilt  $R_i < R < R_a$ . Vergessen Sie aber der Vollständigkeit halber nicht, dass zu einer geschlossenen Zylinderfläche auch die Stirnseiten gehören.

geg.:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm

*Lösung:* a) Ein Feld kann nur die gleiche Symmetrie haben wie die Anordnung, die es hervorruft. Somit hat das Feld zylindrische Symmetrie. Da die Feldlinien aus den positiven Ladungen quellen, sich diese auf dem Innenleiter befinden, verlaufen die Feldlinien radial. Da sich die positiven Ladungen nur auf der Oberfläche des Innenleiters befinden, ist das Innere des Innenleiters feldfrei. Da die Gesamtladung von Innen- und Außenleiter gleich Null ist, ist



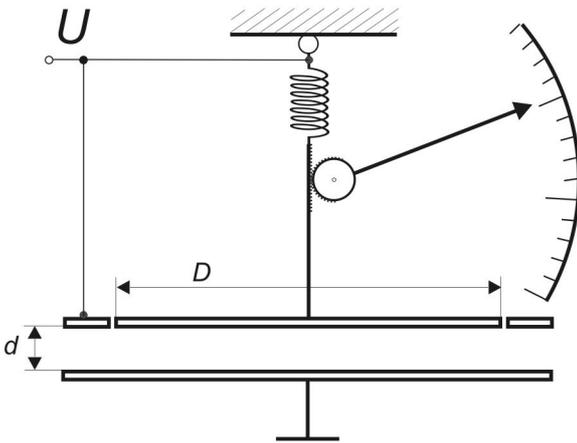
auch das Feld außerhalb des Außenleiters gleich Null. Das Feldlinienbild ist auf der linken Abbildung wieder gegeben.

b) Wie in der Anmerkung angeregt, ist eine für die Anwendung des Gaußschen Satzes günstige Oberfläche die eines zwischen Innen- und Außenleiter angeordneten Zylinders mit dem Radius  $R$ . Dann besteht die Integrationsfläche aus der Zylinderwandung  $A_1$  sowie den beiden Stirnflächen  $A_2$  und  $A_3$ . Die beiden Stirnflächen haben aber keine Flächenprojektion senkrecht zu den Feldlinien, also gilt für den gesamten Elektrischen Fluß durch die Oberfläche des Zylinders laut Glg. 1.13

$Q = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \epsilon_r \epsilon_0 (E_1 \cdot A_{1n} + E_2 \cdot A_{2n} + E_3 \cdot A_{3n}) = \epsilon_r \epsilon_0 E(R) \cdot 2\pi R \cdot l + 0 + 0$ . Die Feldstärke ist somit umgekehrt proportional zum Abstand von der Zylinderachse. Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ergibt sich nach Glg. 1.10a. Der Verschiebungsweg wird dabei zweckmäßig in Richtung einer Feldlinie gewählt, da dafür gilt  $\cos \alpha = 1$ :

$$U = - \int_{R_1}^{R_2} E(s) \cos \alpha(s) ds = - \int_{R_1}^{R_2} E(s) ds = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi s \cdot l} ds = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi \cdot l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Die Kapazität des Zylinderkondensators ist somit  $C = Q/U = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi \cdot l}{\ln R_2/R_1}$ .



**1.24.\*** Die nebenstehende Abbildung zeigt ein *elektrostatisches Voltmeter*. Es besteht aus einer feststehenden Kondensatorplatte mit Masseanschluss sowie einer ebenfalls runden beweglich angeordneten Platte mit dem Durchmesser  $D = 3$  cm, die noch von einem Kreisring umgeben ist. Als Maß für die Spannung wird die Kraft gemessen, die auf die bewegliche Platte ausgeübt wird, sobald der Kondensator aufgeladen ist.

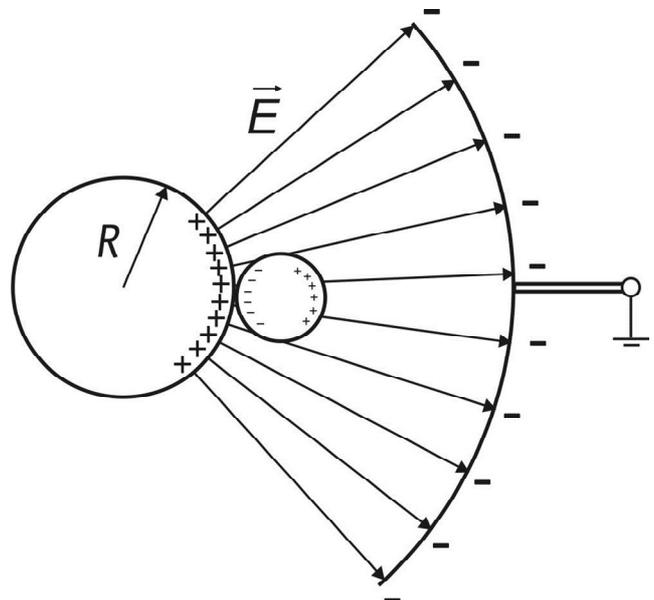
- Bei einem Plattenabstand von  $d = 3$  mm wird eine Kraft von  $0,7$  mN auf die obere Kondensatorplatte ausgeübt. Wie groß ist die angelegte Spannung  $U$ ?
- Wozu dient der Ring um die obere Platte?
- Worin besteht der Vorteil eines elektrostatischen Voltmeters?

*Ergebnis:* 1420 V; Feld wird homogenisiert; stromlos, hohe Spannungen

**1.25.\*** Ein elektrostatisches Staubfilter benutzt ein *inhomogenes* Feld, dessen Stärke an der Oberfläche eines dünnen Drahtes mit einem Durchmesser  $d = 0,2$  mm  $E = 10^6$  V/m beträgt. Die Feldstärke verringert sich mit zunehmendem Abstand  $r$  von der *Mittellinie* des Drahtes gemäß  $E(r) \propto 1/r$ . Die elektrisch neutralen Staubteilchen werden unter dem Einfluss des Feldes polarisiert und verhalten sich dann so, als trügen sie  $+5000$  e sowie  $-5000$  e in  $1 \mu\text{m}$  Abstand. Welche elektrostatische Kraft wirkt auf sie direkt in Drahtnähe? Wie groß ist hierzu im Vergleich die Gewichtskraft, wenn die Teilchen kugelförmig sind mit einem Durchmesser von  $1 \mu\text{m}$  und einer Dichte von  $2 \text{g/cm}^3$ ?

geg.:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As

*Ergebnis:*  $8 \cdot 10^{-10}$  N;  $10^{-14}$  N



**1.26.\*** Die Beschleunigungsspannung  $U_B$  für den Elektronenstrahl eines Oszilloskops beträgt 4,5 kV. Die Ablenkung des zunächst horizontalen Strahls erfolgt durch ein zusätzliches elektrisches Feld  $E$ . Dieses wird durch einen Plattenkondensator mit der Ablenkspannung  $U_A=1,8$  kV und dem Plattenabstand  $d = 4$  cm erzeugt. Näherungsweise ist das Feld innerhalb des Kondensators homogen, außerhalb des Raumes zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigbar klein.

a) Fertigen Sie die (evtl. perspektivische) Prinzipskizze eines vertikalen Schnittes durch eine Elektronenstrahlröhre an, welche die Elektronenquelle mit Beschleuniger sowie die für die Vertikalablenkung notwendigen Elektroden (analog Plattenkondensator) enthält. Zeichnen Sie die für eine Ablenkung nach oben notwendige Richtung des Elektrischen Feldes ein sowie die hierzu notwendige Polung der Ablenkspannung  $U_A$  (Begründung) !

b) Berechnen Sie die Elektronengeschwindigkeit infolge der Beschleunigungsspannung!

c) Die zwischen den Ablenkplatten auf das Elektron wirkende elektrostatische Feldkraft bewirkt, dass dieser Teil der Flugbahn von der Geraden abweicht. Bestimmen Sie die Trajektorie der Elektronen  $y(x)$ , wobei der Ursprung des Koordinatensystems an der Stelle liegt, an welcher der Elektronenstrahl in den Bereich des Ablenkfeldes eintritt, die  $x$ -Richtung entspricht der ursprünglichen Richtung des Elektronenstrahls, die  $y$ -Achse zeigt in Richtung der ablenkenden Feldkraft.

*Anmerkung:* Die Elektronengeschwindigkeit ermittelt man, indem die kinetische Energie verglichen wird mit der Energie, die das Elektron durch die Beschleunigungsspannung erfährt. Die zur Ablenkung notwendige elektrische Feldkraft erzeugt eine konstante Beschleunigung. Vergleichen Sie die Bewegung in  $x$ -Richtung ( $x(t)$ ) mit der in  $y$ -Richtung ( $y(t)$ ) und eliminieren Sie in beiden Gleichungen die Zeit  $t$ .

geg.:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg

Ergebnis: b) 40000 km/s c)  $y(x) = \frac{U_A}{U_B} \frac{x^2}{4d}$

## Anhang 1 Mathematische Grundlagen

### A1.1 Größen und Gleichungen

Gegenstand der Physik ist das Erkennen von Naturgesetzen sowie deren Beschreibung mit den Methoden der Mathematik. Physikalische *Größen* kennzeichnen Eigenschaften physikalischer Objekte, für die ein Messverfahren existiert, haben somit eine *Qualität* (Kraft, Masse, Geschwindigkeit, Dichte,...) wie auch *Quantität* (erfasst durch eine Zahl), die es gestattet, Größen gleicher Qualität miteinander zu vergleichen. Hierbei bezieht man sich auf physikalische *Einheiten*, das sind international festgelegte reproduzierbare Größen, die entweder durch einen *Prototypen* wie beim Kilogramm oder eine *Messvorschrift* wie beim Ampere (s.u.) definiert werden. Jede physikalische Größe  $G$  kann als Vielfaches dieser Einheiten ausgedrückt werden. Somit ergibt sie sich als Produkt aus dem quantitativen Merkmal, der *Maßzahl* oder dem *Zahlenwert*  $\{G\}$ , und dem qualitativen Merkmal, der *Maßeinheit*  $[G]$ :

$$G = \{G\}[G]. \quad (\text{A1.1})$$

Physikalische Gesetze finden ihren Ausdruck in der mathematischen Verknüpfung verschiedener physikalischer Größen. Gilt z.B. für die gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit  $v$  ein Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg  $s$  und der dazu benötigten Zeit  $t$  als Produkt  $s = v t$ , erhält man laut A1.1 für die explizite Berechnung  $s = \{v\}[v]\{t\}[t] = \{vt\}[vt] = \{s\}[s]$ .

Physikalische Gesetze führen somit zu einer Verknüpfung von Maßeinheiten. Man unterscheidet hierbei zwischen *Basiseinheiten* und *abgeleiteten Einheiten*.

Dem Internationalen Einheitensystem (Système International d'Unités, abgekürzt SI) liegen sieben Basiseinheiten zugrunde:

Physikalische Größe	Basiseinheit	Symbol
Länge	das <b>Meter</b>	m
Zeit	die <b>Sekunde</b>	s
Masse	das <b>Kilogramm</b>	kg
Elektrische Stromstärke	das <b>Ampere</b>	A
Temperatur	das <b>Kelvin</b>	K
Stoffmenge	das <b>Mol</b>	mol
Lichtstärke	die <b>Candela</b>	cd
<i>ergänzende Einheiten</i>		
ebener Winkel	der <b>Radian</b>	rad
Raumwinkel	der <b>Steradian</b>	sr

Bei einer *Größengleichung* stehen die Symbole für die physikalischen Größen, also für die Produkte aus Zahlenwert und Einheit dieser Größen. Sie gilt unabhängig von der Wahl der Einheiten. Es ist unerheblich, ob man z.B. in der Gleichung  $s = v t$ , die Geschwindigkeit in m/s oder km/h angibt, wenn die Einheit der Zeit entsprechend in s oder h gewählt wird. Verwendet man dagegen *nichtkohärente* Einheiten - das ist insbesondere bei ingenieurtechnischen Anwendungen üblich - kommt man zur *Zahlenwertgleichung*. Bei dieser sind bestimmte Einheiten vorgeschrieben, in unserem Beispiel:

$$s = v t / 3,6 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} s - \text{Weg in Metern} \\ v - \text{Geschwindigkeit in Kilometern je Stunde} \\ t - \text{Zeit in Sekunden.} \end{array}$$

Die Verwendung der SI-Einheiten bietet dagegen den Vorteil, dass die Größengleichungen ohne Veränderung auch als Zahlenwertgleichungen benutzt werden können. Aus diesem Grunde werden im Folgenden stets Größengleichungen in SI-Einheiten verwendet.

Bei der Umformung einer Größengleichung gelten die üblichen Regeln der Mathematik. Zahlenwerte und Einheiten verschiedener Größen können in einem gemeinsamen Ausdruck umgeformt werden.

Da Summanden innerhalb einer Größengleichung stets gleiche Einheiten haben müssen, kann man diese aber auch ausklammern und getrennt umformen. Auf diese Weise entsteht aus einer Größengleichung die dazugehörige *Einheitengleichung*.

*Größengleichung:*  $v = v_0 + s/t = \{v_0\}[v_0] + \{s/t\}[s/t] = \{v_0\}[v] + \{s/t\}[v] = (\{v_0\} + \{s/t\})[v]$

*Zahlenwertgleichung:*  $\{v\} = \{v_0\} + \{s/t\}$

*Einheitengleichung:*  $[v] = [v] + [s/t] = [s] / [t] = \text{m/s}$

Man sollte die Einheitengleichung stets sorgfältig behandeln. Bei einer unrichtigen Größengleichung ist sehr oft die Einheitengleichheit nicht gegeben und man kommt dadurch dem Fehler rasch auf die Spur. Zu beachten ist, dass als Potenzen nur Zahlen in Frage kommen, ebenso wie Logarithmen auch nur von Zahlen gebildet werden können. Andererseits sind die trigonometrischen Funktionen nur für Winkel definiert.

## A1.2 Differentiation physikalischer Größen

Oft sind die interessierenden Größen nicht konstant, sondern Funktionen verschiedener Variablen. Üblich ist in der Mathematik die Bezeichnung  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , mit dimensionslosen Variablen  $x_i$  und Funktion  $f$ . Funktionen und Variablen der Physik enthalten dagegen Maßeinheiten. Besonders häufig sind Zeitabhängigkeiten. Sei die Geschwindigkeit  $v(t)$  eine solche Zeitfunktion. Die bekannte Beziehung  $v = s/t$  liefert nur die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher in der Zeit  $t$  die Wegstrecke  $s$  zurückgelegt wird. Interessiert man sich für aktuelle Geschwindigkeitswerte, so betrachtet man kleine Teilwegstrecken  $\Delta s$ , die in Zeiten  $\Delta t$  zurückgelegt werden.

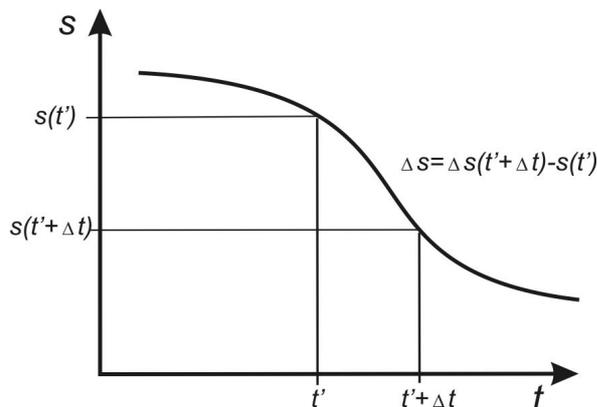


Abb. A1.1 Weg-Zeit-Funktion bei zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit

In diesem Fall wird  $s(t)$  durch eine gekrümmte Kurve beschrieben. Der Differenzenquotient  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  entspricht der mittleren Geschwindigkeit im Zeitintervall  $\Delta t$ . Durch Übergang zum Differentialquotient erhält man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t'$  als  $v(t')$ .

Der Grenzübergang zu differentiellen Zeitintervallen  $dt$  liefert die Momentangeschwindigkeit  $v(t)$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Die Differentiale  $ds$  und  $dt$  sind jeweils Produkte aus Maßzahl und Maßeinheit. Die Einheitengleichung lässt sich separieren, man erhält wieder die Maßeinheit der Geschwindigkeit. Als Aufgabe verbleibt die Differentiation der Zahlenwertfunktion  $\{s(t)\}$  nach dem Zahlenwert der Zeit:

$$\{v\}[v] = \frac{d\{s\}[s]}{d\{t\}[t]} = \frac{d\{s\}}{d\{t\}} \cdot \frac{[s]}{[t]} = \frac{d\{s\}}{d\{t\}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (\text{A1.2})$$

Das ist ein rein mathematisches Problem und leicht zu lösen, wenn die Zeitabhängigkeit  $s(t)$  bekannt ist. Zweckmäßig geht man so vor, dass die Funktion  $s(t)$  nach  $t$  formal differenziert wird (genau so, als würde eine analoge Funktion  $y(x)$  nach  $x$  differenziert werden). Werden in die resultierende Funktion  $v(t)$  dort enthaltene physikalische Größen eingesetzt, erhält  $v(t)$  stets die richtige Maßeinheit.

### Beispiel A1.1: Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit eines Oszillators

*Aufgabe:* Die Zeitfunktion der Auslenkung eines Oszillators (Federschwinger) der Frequenz  $f$  ist durch die Funktion  $s(t) = B \cos(2\pi ft)$  gegeben. Man berechne die Geschwindigkeit  $v(t)$ .

Geg.: Amplitude  $B = 0,05$  m; Frequenz  $f = 1,5$  s<sup>-1</sup>.

*Lösung:* Die Funktion  $s(t)$  wird formal differenziert:  $v(t) = ds(t)/dt = -2\pi f B \sin(2\pi ft)$ . Die gegebenen Werte für Frequenz und Amplitude werden eingesetzt und die Maßeinheiten geeignet umgeformt:

$v(t) = -0,15\pi \sin(3\pi t/s)$  m/s. Das ist die gesuchte Geschwindigkeits-Zeit-Funktion. Interessiert ein spezieller Wert, z.B. zu  $t = 0,5$ s, wird für die Zeit diese Größe eingesetzt  $v(0,5s) = -0,15\pi \sin(1,5\pi)$  m/s = 0,471 m/s.

### A1.3 Integration physikalischer Größen

Die Integration als Umkehrung der Differentialrechnung erweist sich auch in der Physik als eine wichtige Methode. Als Stammfunktion oder Integral einer gegebenen Funktion  $y = f(x)$  bezeichnet man eine differenzierbare Funktion  $F(x)$ , deren Ableitung gleich  $f(x)$  ist, also  $F'(x) = f(x)$ . Da bei der Differentiation einer Funktion eine in dieser additiv auftretende Konstante verschwindet, existieren zu einer gegebenen Funktion unendlich viele Stammfunktionen. Bei der Berechnung des Integrals ist diese *Integrationskonstante*  $C$  unbestimmt

$$\boxed{\text{unbestimmtes Integral} \quad \int f(x) dx = F(x) + C.} \quad (\text{A1.3})$$

Die Funktion  $f(x)$  bezeichnet man als *Integrand*,  $x$  ist die *Integrationsvariable*. Es ist insbesondere bei Anwendungen in der Physik durchaus üblich, das *Differential*  $dx$  auch unmittelbar hinter das Integralzeichen zu schreiben.

Wie verfährt man, wenn es sich um physikalische Größen handelt,  $x$ ,  $f$ ,  $F$  und  $C$  also Maßeinheiten enthalten? Auch hier können Zahlenwertgleichung und Einheitengleichung separiert werden.

$$\int v(t) dt = \int \{v(t)\} [v(t)] \{dt\} [dt] = \int \{v(t)\} \{dt\} \text{ m} = \{s(t)\} [s(t)] + \{C\} [C] = \{s(t)\} \text{ m} + \{C\} \text{ m} = s(t) + C$$

In der Praxis wird man wieder so verfahren, dass die Funktion  $v(t)$  formal über die Zeit integriert wird, das Ergebnis erhält automatisch die richtige Maßeinheit (sofern richtig integriert wurde - Kontrollmöglichkeit!). Welche Bedeutung hat die Integrationskonstante  $C$ ? Diese enthält einen zunächst unbestimmten zeitunabhängigen, also konstanten, Anteil am Weg  $s$ . Es wird zur expliziten Bestimmung von  $C$  also noch eine weitere Angabe zu  $s$  benötigt. Sei der Weg  $S_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  gegeben. Hieraus ergibt sich eine Möglichkeit,  $C$  zu bestimmen:  $C = S_1 - s(t_1)$ . Mit der so bestimmten Integrationskonstante kann man für beliebige Zeiten den Weg berechnen. Interessiert der innerhalb eines Zeitintervalles  $[t_a; t_e]$  zurückgelegte Weg, berechnet man die Differenz  $s(t_e) - s(t_a)$ .

Während eines sehr kleinen Zeitintervalls  $[t_1; t_1 + \Delta t]$  kann die Geschwindigkeit als nahezu konstant betrachtet werden  $v = v(t_1)$ . Das Produkt  $v(t_1)\Delta t$  hat die Dimension einer Länge mit der Maßeinheit Meter und entspricht dem während  $\Delta t$  zurückgelegten Weg  $\Delta s$ . Teilt man das Intervall  $[t_a; t_e]$  in ausreichend viele  $\Delta t_i$ , so ist die Summe über die Teilstrecken  $\Delta s_i$  in guter Näherung gleich dem in dieser Zeit zurückgelegten Weg

$$s(t_e) - s(t_a) \cong \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i. \quad (\text{A1.4})$$

Von dieser Summe wird der Grenzwert für den Fall berechnet, dass die Dauer der Elementarintervalle gegen Null strebt und demzufolge ihre Anzahl gegen  $\infty$ . Dieser Grenzwert heißt das bestimmte Riemann<sup>11</sup>sche Integral der Funktion in dem gegebenen Intervall. In unserem Beispiel schreibt man dafür

<sup>11</sup> Bernhard RIEMANN (1826-1866), dt. Mathematiker; part. Diff.-Glg. der Theoret. Physik; Funktionentheorie; Riemann-Integral u.v.m.

$$s(t_e) - s(t_a) = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i = \int_{t_a}^{t_e} v(t) dt \quad (\text{A1.5})$$

Die beiden *Intervallgrenzen* werden zu Integrationsgrenzen, sie legen das *Integrationsintervall* fest. Die Berechnung eines bestimmten Integrals wird über die Beziehung

*Hauptsatz der Integralrechnung*  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

auf die Be-

rechnung

des zugehörigen unbestimmten Integrals  $F(x)$ , d.h. auf die Ermittlung einer Stammfunktion  $s$ . Glg.A1.3 zurückgeführt. Angewandt auf unser Beispiel ergibt sich eine Übereinstimmung mit Glg. A1.5.

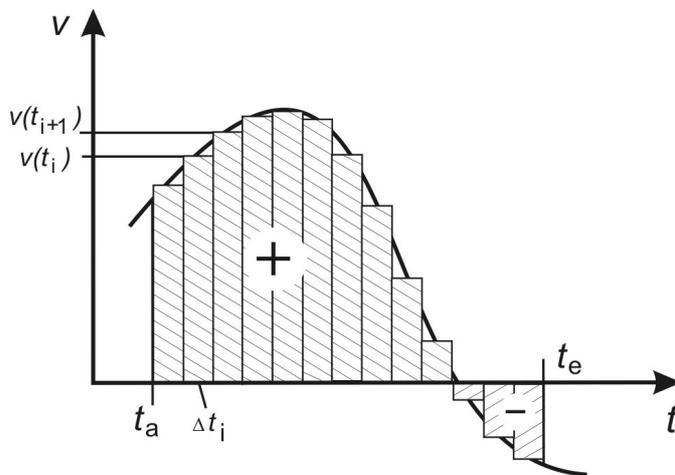


Abb. A1.2 Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals

Die bestimmte Integration kann mit einer Flächenberechnung verglichen werden. Die Abbildung zeigt dies anschaulich für eine relativ grobe Zerlegung laut Glg. A1.4. Teilsummen für positive Werte von  $v(t)$  erhalten positives Vorzeichen, solche für negative  $v$  analog negative Vorzeichen. Die Integration über das gesamte Intervall liefert eine Flächendifferenz. Im Beispiel hat diese natürlich die Dimension einer Länge, da  $[v][t] = \text{m}$ .

Vertauscht man die Integrationsgrenzen, ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals.

### Beispiel A1.2: Wurfhöhe beim senkrechten Wurf

*Aufgabe:* Eine Masse  $m$  wird aus der Höhe  $h_0 = 15 \text{ m}$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 15 \text{ m/s}$  senkrecht nach oben geworfen und bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft. Welche Position hat die Masse zu einem späteren Zeitpunkt  $t' = 3,5 \text{ s}$ ?

*Lösung:*

Für die Geschwindigkeit beim senkrechten Wurf gilt die Beziehung  $v(t) = v_0 - gt$  mit der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Um hieraus die Ortsfunktion  $h(t)$  zu berechnen, muss  $v(t)$  über die Zeit integriert werden:

$$h(t) = \int v(t) dt = \int v_0 - gt dt = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + C.$$

Die Integrationskonstante  $C$  kann bestimmt werden, wenn man die *Randbedingung*  $h(t=0) = h_0$  anwendet. Hieraus folgt sofort  $C = h_0$  und somit ergibt sich als Lösungsfunktion  $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + h_0$ . Mit den angegebene

nen Werten bestimmt man  $h(t') = 7,4 \text{ m}$ .

Führt man eine bestimmte Integration durch, muß man die Integrationsgrenzen  $t_a = 0$ ;  $t_e = t'$  festlegen. Der innerhalb dieses Zeitintervalls zurückgelegte Weg beträgt

$$h(t') - h(0) = \int_0^{t'} v_0 - gt dt = v_0 t' - \frac{g}{2} t'^2 = -7,6 \text{ m}. \text{ Addiert man die Anfangshöhe } h_0, \text{ erhält man ein gleiches Ergebnis wie bei der unbestimmten Integration.}$$

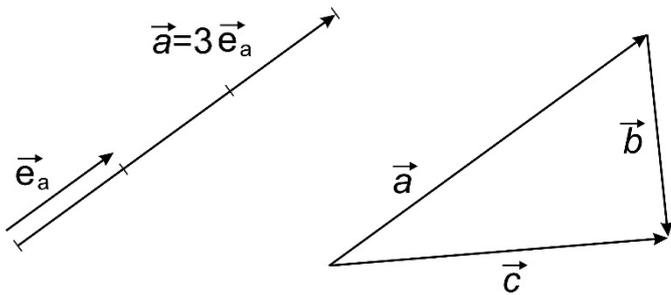
### A1.4. Vektorielle Größen

Neben solchen *skalaren* Größen wie Masse, Zeit, Dichte, Volumen, Druck, Temperatur,... welche durch Maßzahl und Maßeinheit vollständig angegeben werden, unterscheidet man in der Physik *gerichtete* Größen. Solche sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Feldstärke,... die durch *Vektoren* dargestellt werden können. Gut veranschaulichen kann man sich einen Vektor als Pfeil, dessen Länge (sein *Betrag*) gleich dem Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit ist, und dessen Richtung durch die Orientierung des Pfeiles vom *Ausgangs-* oder *Startpunkt* zum *Endpunkt* oder *Spitze* im Raum angegeben wird. Eine einfachste Methode, einen Vektor  $\vec{a}$  zu charakterisieren besteht somit in der Angabe seines Betrages  $|\vec{a}| = a$  und seiner Richtung durch einen sogenannten *Einheitsvektor*  $\vec{e}_a$ . Dieser hat den Betrag "1" und ist dimensionslos. Man schreibt  $\vec{a} = a \vec{e}_a$ , der Vektor  $\vec{a}$  ist somit der um den Betrag  $a$  vergrößerte Einheitsvektor  $\vec{e}_a$ . Vektoren lassen sich addieren ( $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a \vec{e}_a + b \vec{e}_b$ ) und mit anderen Skalaren multiplizieren ( $\vec{d} = C \vec{a} = C a \vec{e}_a$ ). Die skalare Multiplikation ändert nur den Betrag, nicht die Richtung des Vektors. Ist der Skalar negativ, so ändert sich jedoch der *Richtungssinn* des Vektors (zeigt jetzt in die genau entgegengesetzte Richtung).

Abb. A1.3 Multiplikation mit Skalar, Addition

Der (Einheits-)Vektor  $\vec{e}_a$  wird mit einem Skalar  $a$ , seinem Betrag, multipliziert (links).

Bei der Addition zweier Vektoren wird der zweite Summand so parallel verschoben, dass sein Startpunkt auf den Endpunkt des ersten Summanden trifft. Die Summe ergibt sich aus dem Vektor vom Startpunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten Summanden.



Bei dem Produkt zweier Vektoren unterscheidet man zwischen *Skalarprodukt* (auch "Punktprodukt", Ergebnis ist ein Skalar) und *Vektorprodukt* (auch "Kreuzprodukt", Ergebnis ist ein Vektor). Die geometrische Veranschaulichung beider Produkte ist auf Abb. A1.4 gegeben. Das Skalarprodukt sowie der Betrag des Vektorproduktes der Vektoren berechnet sich zu

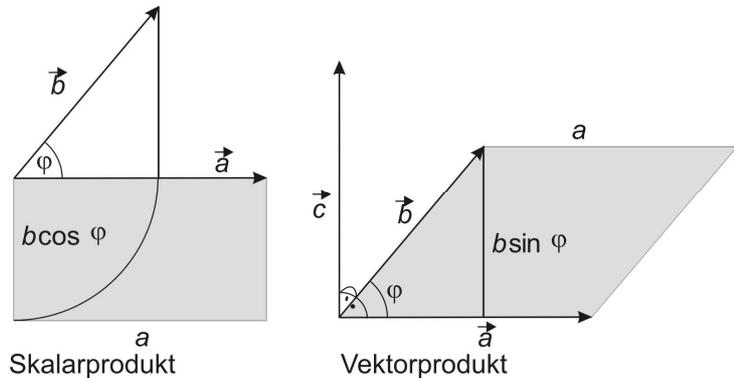
$\text{Skalarprodukt} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi \quad \text{mit } \varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b})$	(A1.7)
$\text{Betrag des Vektorproduktes} \quad  \vec{c}  =  \vec{a} \times \vec{b}  = ab \sin \varphi$	

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf der durch beide Faktoren aufgespannten Ebene, der Richtungssinn ergibt sich aus der *Rechtsschraube*.

Abb. A1.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Die Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$  hat den Betrag  $a \cos \varphi$ . Mit dem Betrag von  $\vec{b}$  multipliziert ergibt sich das Skalarprodukt.

Das Vektorprodukt ist vom Betrag gleich der Fläche des durch beide Faktoren aufgespannten Parallelogramms. Dreht man den ersten Faktor des Produkts, also  $\vec{a}$ , um eine zu beiden Vektoren senkrechte Achse auf  $\vec{b}$ , so zeigt  $\vec{c}$  in die Richtung einer um diese Achse gedrehten Rechtsschraube.



Physikalische Gesetze, die mit Skalar- bzw. Vektorprodukt formuliert werden, haben unterschiedliche Bedeutung. Greift z.B. eine konstante Kraft  $\vec{F}$  an einem Punkt an, der um den Vektor  $\vec{R}$  verschoben wird, leistet sie an diesem die *Verschiebungsarbeit*  $W = \vec{R} \cdot \vec{F}$ . Greift dagegen die gleiche Kraft an einem Ortsvektor  $\vec{R}$  an, erzeugt sie um eine Achse, die senkrecht zu  $\vec{F}$  und  $\vec{R}$  verläuft, ein *Drehmoment*  $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ . Die Maßeinheit beider Größen ist gleich Nm.

### Koordinatenschreibweise

Hat man es mit vielen Vektoren zu tun und sind diese noch variabel, z.B. zeitabhängig, ist es praktisch, diese mit konstanten Vektoren zu vergleichen. Drei zueinander senkrecht orientierten Vektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , jeweils vom Betrag 1 bilden die Basis oder *Einheitsvektoren* eines *kartesischen Koordinatensystems*. Jeder Vektor kann eineindeutig in drei *Komponenten* so zerlegt werden, daß diese jeweils ein Vielfaches der Einheitsvektoren darstellen. Die Komponenten sind somit Vektoren. Die skalare Größe, mit welcher man einen Einheitsvektor multiplizieren muss, um die entsprechende Komponente in dieser Richtung zu erhalten, bezeichnet man als *Koordinate*. Es gilt somit für einen Ortsvektor

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z. \quad (\text{A1.8})$$

Der große Vorteil dieser Koordinatenschreibweise besteht darin, dass man alle Vektoren mit nur drei Einheitsvektoren beschreiben kann. Dabei ist es unerheblich, welche Dimension diese Vektoren haben. Man kann also z.B. sowohl Geschwindigkeits- oder auch Kraftvektoren zusammen mit Ortsvektoren in einem System darstellen. Ausschließlich die Koordinaten enthalten dabei die Maßeinheiten, z.B.  $R_x = \{R_x\} [R_x] = \{R_x\} \text{m}$ .

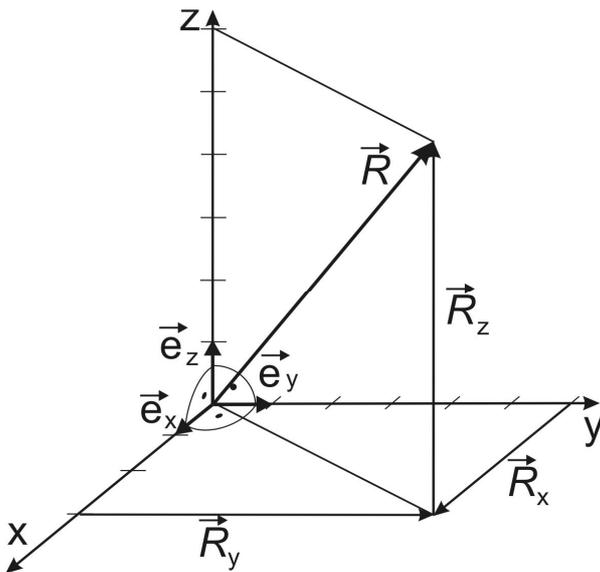


Abb. A1.5 Koordinatendarstellung

Die Projektionen des Vektors  $\vec{R}$  auf die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  ergeben die Komponenten  $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ . Jede Komponente kann als Einheitsvektor, multipliziert mit der dazugehörigen Koordinate, dargestellt werden. Die Koordinate besteht aus dem Produkt von (positiver oder auch negativer) Maßzahl und Maßeinheit.

Beim abgebildeten Koordinatensystem handelt es sich um ein sogenanntes *Rechtssystem*. Alle anders orientierten Systeme, die durch Drehung aus diesem System erhalten werden können, sind ebenfalls Rechtssysteme. Nur mit solchen Systemen werden wir arbeiten. Ein *Linkssystem* erhält man, wenn eine Achse in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Wenn man sich stets auf das gleiche Koordinatensystem bezieht, ist es müßig, bei jedem Vektor die Einheitsvektoren explizit aufzuschreiben, da dieser ja durch die Koordinaten bereits vollständig beschrieben ist. Also gibt man oft nur die drei Koordinaten in x-, y- und z-Richtung an:

$$\text{Zeilenvektor } \vec{R} = (R_x, R_y, R_z) \quad \text{Spaltenvektor } \vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A1.9})$$

Ob man die Koordinaten eines Vektors als Zeile oder Spalte anordnet, ist zunächst unerheblich. Wenn wir uns an den Regeln der *Linearen Algebra* orientieren, die allgemeinere Strukturen beschreibt, werden wir Vektorprodukte als *Zeilenvektor mal Spaltenvektor* aufschreiben.

## Rechenregeln

Die Koordinatenschreibweise erleichtert vorzüglich das Rechnen mit Vektoren.

### Vektoraddition

$$\vec{R} + \vec{S} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z + S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y + S_z \vec{e}_z = (R_x + S_x) \vec{e}_x + (R_y + S_y) \vec{e}_y + (R_z + S_z) \vec{e}_z$$

$$\vec{Q} = \vec{R} + \vec{S} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x + S_x \\ R_y + S_y \\ R_z + S_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Vektoraddition} \quad Q_i = R_i + S_i \quad i = x, y, z} \quad (\text{A1.10})$$

### Multiplikation mit einem Skalar

$$\vec{P} = A \vec{R} = A R_x \vec{e}_x + A R_y \vec{e}_y + A R_z \vec{e}_z = \sum_{i=x,y,z} A R_i \vec{e}_i = A \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A R_x \\ A R_y \\ A R_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Multiplikation mit Skalar} \quad P_i = A R_i \quad i = x, y, z} \quad (\text{A1.11})$$

### Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{S} &= (R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z) \cdot (S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y + S_z \vec{e}_z) \\ &= R_x S_x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + R_x S_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + R_x S_z \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z + R_y S_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + R_y S_y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y + R_y S_z \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z \\ &\quad + R_z S_x \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + R_z S_y \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y + R_z S_z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \\ &= R_x S_x + R_y S_y + R_z S_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Skalarprodukt} \quad \vec{R} \cdot \vec{S} = \sum_{i=x,y,z} R_i S_i} \quad (\text{A1.12})$$

Aus dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst  $\vec{R} \cdot \vec{R} = R^2$  ergibt sich eine Möglichkeit zur Berechnung seines Betrages:

$$\boxed{\text{Betrag eines Vektors} \quad R = |\vec{R}| = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} R_i^2}} \quad (\text{A1.13})$$

### Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \vec{Q} = \vec{R} \times \vec{S} &= (R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z) \times (S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y + S_z \vec{e}_z) \\ &= R_x S_x \vec{e}_x \times \vec{e}_x + R_x S_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + R_x S_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z + R_y S_x \vec{e}_y \times \vec{e}_x + R_y S_y \vec{e}_y \times \vec{e}_y + R_y S_z \vec{e}_y \times \vec{e}_z \\ &\quad + R_z S_x \vec{e}_z \times \vec{e}_x + R_z S_y \vec{e}_z \times \vec{e}_y + R_z S_z \vec{e}_z \times \vec{e}_z \\ &= (R_y S_z - R_z S_y) \vec{e}_x + (R_z S_x - R_x S_z) \vec{e}_y + (R_x S_y - R_y S_x) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Vektorprodukt} \quad Q_i = R_j S_k - R_k S_j \quad i, j, k = x, y, z \text{ in zyklischer Vertauschung}} \quad (\text{A1.14})$$

### Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe

Ist ein Vektor von einer skalaren Größe abhängig (in vielen Fällen ist das die Zeit  $t$ ), stellt sich die Frage nach seiner Ableitung. Betrachtet man einen Ortsvektor  $\vec{R}(t)$ , so lautet dessen *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{\vec{R}(t + \Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}. \text{ Offensichtlich handelt es sich um einen Vektor mit der Maßeinheit m/s,}$$

also eine Geschwindigkeit. Dessen Grenzwert  $\vec{v}(t)$  ist die Zeitableitung des Ortsvektors. Da Zeitableitungen in der Physik sehr häufig auftreten, hat man hierfür eine Abkürzung eingeführt. Ein Punkt über der Zeitfunktion bedeutet, dass man sie einmal ableitet, zwei Punkte sind gleichbedeutend mit

der zweiten Ableitung usw. Also gilt  $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{R}(t) = \dot{\vec{R}}(t)$ . Ansonsten gelten die bekannten Regeln der Differentiation. Da ein Vektor als Summe seiner Komponenten aufgeschrieben werden kann, ist seine Ableitung auch gleich der Summe der Ableitungen der Komponenten. Da jede Komponente Produkt eines (konstanten!) Einheitsvektors mit der zeitabhängigen Koordinate ist, wird nur diese abgeleitet. Das stellt kein Problem dar, denn die Koordinate ist ja nur eine skalare Zeitfunktion. Es ergibt sich somit

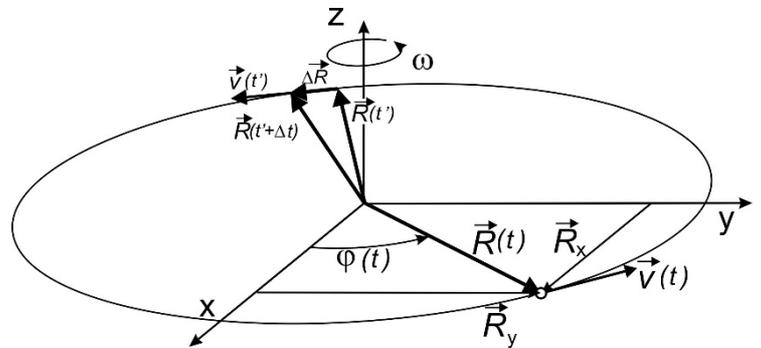
$$\text{Differentiation eines Vektors } \dot{\vec{R}}(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=x,y,z} R_i(t) \vec{e}_i = \sum_{i=x,y,z} \frac{d}{dt} R_i(t) \vec{e}_i = \sum_{i=x,y,z} \dot{R}_i(t) \vec{e}_i \quad (\text{A1.15})$$

**Beispiel A1.3: Geschwindigkeit bei gleichförmiger Kreisbewegung**

*Aufgabe:* Ein Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer Kreisbahn um die z-Achse mit dem Radius  $R$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind seine Koordinaten  $(R, 0, 0)$ . Gesucht ist der Geschwindigkeitsvektor.

*Lösung:*

Die Position des Massenpunktes ist gegeben durch den Abstand  $R$  von der Rotationsachse sowie den Winkel  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ . Diese beiden Größen sind die *Polarkoordinaten*. Da der Massenpunkt zu  $t = 0$  auf der x-Achse liegt, folgt  $\varphi_0 = 0$ . Aus der Projektion des Ortsvektors auf die x-, y- und z-Achse ergeben sich die *kartesischen Koordinaten* zu  $R_x = R \cos \omega t$ ,  $R_y = R \sin \omega t$ ,  $R_z = 0$ .



Durch Differentiation der Ortskoordinaten nach der Zeit erhält man die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors. Dieser hat die Richtung einer Tangente an die Kreisbahn

$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) = R \omega (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$ . Die Richtung der Bahngeschwindigkeit ergibt

sich aus  $\Delta \vec{R}$ , der Änderung des Ortsvektors  $\vec{R}$  im Zeitintervall  $\Delta t$ ,  $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t + \Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$ . Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant:  $v = \omega R$ .

*Integration eines Vektors über eine skalare Größe*

Betrachten wir als Beispiel wieder einen zeitabhängigen Ortsvektor  $\vec{R}(t)$ . Bekanntlich ergibt die erste Zeitableitung eine Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$ . Bei einer nochmaligen Ableitung nach der Zeit resultiert die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$ . Die Integration als Umkehrung der Differentiation sollte es demzufolge ermöglichen, aus einer bekannten Beschleunigung die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion als Vektor zu bestimmen. Hier geht man formal vor, indem man die Integration des Vektors als Summe der Integrale der drei Komponenten versteht. Da jede Komponente aus dem Produkt von (konstantem) Einheitsvektor und zeitabhängiger Koordinate besteht, kann der Einheitsvektor vor das Integralzeichen geschrieben werden. Integriert wird dann die Koordinate, die lediglich eine skalare Zeitfunktion darstellt.

$$\text{Integration eines Vektors } \int \vec{v}(t) dt = \int \sum_{i=x,y,z} v_i(t) \vec{e}_i dt = \sum_{i=x,y,z} \int v_i(t) \vec{e}_i dt = \sum_{i=x,y,z} \vec{e}_i \int v_i(t) dt \quad (\text{A1.16})$$

**Beispiel A1.4: Der schiefe Wurf**

*Aufgabe:* Eine Punktmasse bewegt sich zu  $t = 0$  vom Koordinatenursprung aus mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  unter einem Winkel  $\alpha$  zur  $x$ -Achse. Sie unterliegt nur der Erdbeschleunigung. Geben Sie den Ortsvektor als Funktion der Zeit an.

*Lösung:*

Die Erdbeschleunigung wird über die Zeit integriert. Das Ergebnis ist ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{g} dt = \int (0, 0, -g) dt = (C_x, C_y, \int -g dt) = (C_x, C_y, -gt + C_z) = \vec{g}t + \vec{C}.$$

Die Integration der  $x$ - und  $y$ -Koordinaten liefert nur Konstanten. Offensichtlich gilt für  $t = 0$  die Beziehung  $\vec{v}(0) = \vec{C}$ . Somit ist die Integrationskonstante gleich dem Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{C} = \vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$ . Nochmalige Integration liefert den Ortsvektor:

$$\begin{aligned} \vec{R}(t) &= \int \vec{v} dt = \int (v_0 \cos \alpha, 0, -gt + v_0 \sin \alpha) dt = \left( \int v_0 \cos \alpha dt, C_y, \int -gt + v_0 \sin \alpha dt \right) \\ &= \left( v_0 t \cos \alpha + C_x, C_y, -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha + C_z \right) = \frac{\vec{g}}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}. \end{aligned}$$

Für die Integrationskonstante gilt  $\vec{C} = \vec{R}(0) = 0$ , also  $\vec{R}(t) = \left( v_0 t \cos \alpha, 0, -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha \right)$ . Da für beliebige Zeiten  $R_y = 0$ , verläuft die Wurfbahn nur in der  $xz$ -Ebene. Durch welche Funktion  $z(x)$  wird die Wurfbahn beschrieben? Hierzu wird  $x = v_0 t \cos \alpha$  nach  $t$  umgestellt und in  $z$  eingesetzt:

$z = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Die geworfene Masse beschreibt eine sogenannte *Wurfparabel*. Die nicht-

triviale Nullstelle entspricht der Wurfweite  $s = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ . Bei einem Abwurfwinkel von  $\alpha = 45^\circ$  hat sie ihren Maximalwert.

**Integration über eine vektorielle Integrationsvariable**

Wenn die Integrationsvariable ein Vektor ist, so stellt das Differential einen infinitesimal kleinen Vektor dar. Mit diesem ist der Integrand (in der Regel eine Funktion der Integrationsvariablen) zu multiplizieren. Danach wird innerhalb der Integrationsgrenzen aufsummiert. Sei als einfachstes Beispiel die Integrationsvariable ein Ortsvektor  $\vec{R}_a$ , der die Lage eines Punktes angibt. Der Punkt wird nun entlang einer gekrümmten Trajektorie verschoben. Die Verschiebung von einem Raumpunkt auf der Trajektorie zum nächsten wird recht gut durch kleine Verschiebungsvektoren  $\Delta \vec{R}_i$  beschrieben, s. Abb. A1.8. Schließlich endet die Trajektorie im Punkt mit dem Ortsvektor  $\vec{R}_e$ . Offensichtlich gilt

$$\Delta \vec{R}_1 + \Delta \vec{R}_2 + \Delta \vec{R}_3 + \dots + \Delta \vec{R}_n = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{R}_i \cong \vec{R}_e - \vec{R}_a = \int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} d\vec{R}. \quad (\text{A1.17})$$

Oft ist der Integrand  $\vec{G}(\vec{f})$  eine Vektorfunktion der Integrationsvariablen  $\vec{f}$ . Der Ausdruck hat dann die Form  $\int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} \vec{G}(\vec{f}) d\vec{f}$ . Das sieht erst ein wenig ungewohnt aus. Wenn wie hier der Integrand mit der Integrationsvariablen durch skalare Multiplikation verknüpft sind, kann man die entsprechenden Regeln anwenden. Nach Glg. A1.7 folgt  $\int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} \vec{G}(\vec{f}) d\vec{f} = \int_{\vec{f}_a}^{\vec{f}_e} G(\vec{f}) \cos \alpha(\vec{f}) d\vec{f}$ . Der Integrand ist dann eine

skalare Funktion von  $\vec{f}$ . Die Integration ist explizit durchführbar, wenn  $\alpha(\vec{f})$  bekannt ist.

Wenn die Funktion  $\vec{G}(\vec{f})$  in kartesischen Koordinaten gegeben ist, kann Glg. A1.12 angewendet werden. Das Differential wird ebenfalls in Koordinaten angegeben. Der resultierende Ausdruck  $\vec{G}(\vec{f}) d\vec{f} = G_x df_x + G_y df_y + G_z df_z$  enthält nur noch skalare Funktionen, die zu integrieren sind, Somit gilt  $\int \vec{G}(\vec{f}) d\vec{f} = \int G_x df_x + \int G_y df_y + \int G_z df_z$ .

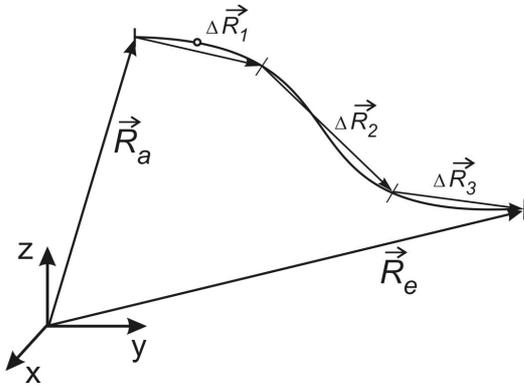


Abb. A1.8 Integration über ein Kurvenstück

Die Integration  $\int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} d\vec{R}$  bedeutet hier die Summation der infinitesimalen Verschiebungsvektoren  $d\vec{R}$ . Die resultierende Gesamtverschiebung wird allein durch Anfangs- und Endpunkt bestimmt. Wohl zu unterscheiden gilt es hiervon den ganz ähnlichen Ausdruck  $\int_{\vec{R}_a}^{\vec{R}_e} dR$ . Da  $R = |\vec{R}|$  hat das Integral die Bedeutung der *Streckenlänge* der Verschiebung, ist keine gerichtete Größe und hängt sehr wohl von der Art der Streckenführung ab.

### Beispiel A1.5: Verschiebungsarbeit gegen eine Feldkraft

**Aufgabe:** Eine Punktmasse  $m = 5\text{ kg}$  soll gegen die Schwerkraft verschoben werden. Die lineare Verschiebung beginnt im Koordinatenursprung und endet im Punkt mit den Koordinaten  $(1\text{ m}, 0, 2\text{ m})$ . Man berechne die gegen die Schwerkraft aufzubringende Verschiebungsarbeit.

**Lösung, Variante 1:**

Die Gewichtskraft, die auf die Masse  $m$  wirkt beträgt  $\vec{G} = m \vec{g}$ . Die Kraft  $\vec{F}$ , mit der gegen die Schwerkraft Arbeit verrichtet wird, ist dieser entgegengesetzt gleich. Sie hat die Koordinaten  $\vec{F} = (0, 0, m g)$ . Die gesamte Verschiebungsarbeit kann als Summe der Teilarbeiten während differentieller Verschiebungen aufgefasst werden. Solche Teilarbeit hat die Form  $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0dx + 0dy + mgdz = mgdz$ . Bei Verschiebungen in x- bzw. y-Richtung wird also keine Arbeit geleistet! Somit erhält man

$$\int_{\vec{R}}^{\vec{R}_e} \vec{F} d\vec{R} = \int_0^h mg dz = mgh = 5\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{ m} = 98,1\text{ Nm}.$$

**Lösung, Variante 2 :**

Der Winkel  $\alpha$  zwischen  $\vec{F}$  und der Verschiebung  $d\vec{R}$  ist bekannt und beträgt stets  $\text{arccot } 2 = 26,56^\circ$ .

$$\int_{\vec{R}}^{\vec{R}_e} \vec{F} d\vec{R} = \int_0^{\vec{R}_e} mg \cos 26,56^\circ dR = mg \cos 26,56^\circ \int_0^{\vec{R}_e} dR = mg \cos 26,56^\circ R = 5\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,895 \sqrt{(2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2} = 98,1\text{ Nm}$$

Beide Ergebnisse sind identisch. Bemerkenswert ist der Umstand, dass für die Verschiebungsarbeit offensichtlich nur Anfangs- und Endpunkt wichtig sind, nicht die konkrete Verschiebungstrajektorie. Dies ist ein Merkmal sogenannter *konservativer Felder*.

## 2. Der Gleichstromkreis

### 2.1. Das elektrische Feld im Leiter

Von einem *Leiter* spricht man bei Vorhandensein von frei beweglichen Ladungsträgern. Da dies für einen Teil der Elektronen in einem Metall zutrifft (sogenannte *Leitungselektronen*), betrachten wir im Folgenden metallische Leiter.

Infolge ihrer elektrostatischen Abstoßung verteilen sich (überschüssige) Leitungselektronen stets auf der Oberfläche des geladenen Leiters und zwar so lange, bis die auf jedes Elektron wirkenden Kräfte verschwinden (sich vektoriell zu Null addieren). In diesem stationären Fall ist das Potential im Innern des Leiters und auf seiner Oberfläche konstant. Eine Potentialdifferenz innerhalb des Leiters hat wegen der Beweglichkeit der Elektronen sofort einen Stromfluss zur Folge, der bestrebt ist, einen Potentialausgleich herbei zu führen.

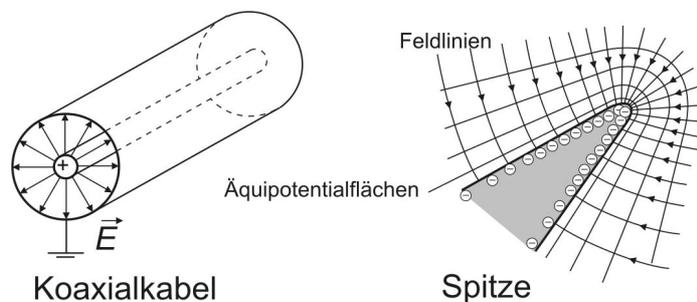
Im stromlosen Leiter ist das elektrostatische Potential konstant, die Leiteroberfläche bildet eine Äquipotentialfläche mit dazu senkrechten elektrischen Feldlinien. Das elektrostatische Feld im Leiter ist Null.

Das elektrische Feld verschwindet auch innerhalb eines von Leitern umschlossenen Raumes, z.B. einer metallischen Hohlkugel oder eines Drahtkäfigs. Dies nennt man einen *FARADAYSchen Käfig*. Die Karosse eines Autos stellt einen solchen Käfig dar und schützt demzufolge zuverlässig die Insassen bei einem etwaigen Blitzschlag.

Eine weitere praktische Anwendung dieses Prinzips ist das Koaxialkabel. Ein meist auf Massepotential liegender *Außenleiter* in Form eines zylindrischen Metallmantels (Drahtgeflecht oder Kunststoff mit metallisierter Oberfläche) umgibt einen Innenleiter. Zwischen beiden sorgt meist ein Schaumstoff (Schaumpolyethylen) mit kleinem  $\epsilon$  für äußere Stabilität und die mechanische Halterung des Innenleiters.

Abb. 2.1: Das elektrische Feld an Leiteroberflächen

Im links dargestellten Koaxialkabel verlaufen die Feldlinien vom Innenleiter radial zum Außenleiter. Außerhalb des Kabels ist kein Feld vorhanden. Fremdfelder werden durch den geschlossenen Mantel wirksam abgeschirmt (Faradayscher Käfig). Die hohe Dichte der Feldlinien an einer negativ geladenen Metallspitze (rechts im Bild) zeugt von einer hohen Feldstärke. Aus dünnen Spitzen und Drähten können deshalb leicht Elektronen austreten.



### 2.2. Die klassische Elektronentheorie

Die gute Leitfähigkeit von Metallen beruht darauf, dass einige Elektronen nicht fest an ihre Wirtsatome gebunden sind, sondern als frei bewegliche *Leitungselektronen* negative Ladungen transportieren können. Bei guten Leitern wie Silber und Kupfer steht je Atom ein Leitungselektron zur Verfügung, bei anderen Metallen mitunter wesentlich weniger. So gibt bei Wismut nur etwa jedes 1000te Atom im Mittel ein Elektron frei. Da alle Leitungselektronen die benachbarten positiven Ionen gleichermaßen anziehen, bewirken sie die *metallische Bindung*.

Dass es wirklich solche frei beweglichen Elektronen gibt, wurde durch einen Versuch von TOLMAN<sup>12</sup> gezeigt: Eine Kupferdrahtspule wurde in schnelle Rotation versetzt und daraufhin schlagartig abgebremst. Die Massenträgheit der Elektronen bewirkte eine kurzzeitige Ladungverschiebung, die durch ein Galvanometer nachgewiesen werden konnte.

<sup>12</sup> Richard TOLMAN (1881-1948), amer. Physiker; Trägheit von Elektronen; Relativitäts- und Quantentheorie

Von DRUDE<sup>13</sup> wurde 1902 an der Universität Leipzig eine auf den Prinzipien der klassischen Mechanik beruhende Theorie zur Elektronenbewegung im stromdurchflossenen Leiter aufgestellt. Wird an die Enden eines Leiters eine Spannung angelegt, ist das E-Feld im Leiter nicht mehr gleich Null. Somit wirkt auf die Leitungselektronen eine Feldkraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , die nach dem 2. Newtonschen Axiom  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  eine beschleunigte Bewegung bewirkt. Die Geschwindigkeit nimmt so-

lange zu, bis durch Wechselwirkung des Elektrons mit einem Atom des Wirtsgitters die aufgenommene Energie abgegeben wird. Man kann dann von einem stationären Zustand ausgehen, bei dem sich die Elektronen mit einer mittleren *Driftgeschwindigkeit* bewegen und Stöße nach einer mittleren *Stoßzeit*  $\tau$  ausführen.

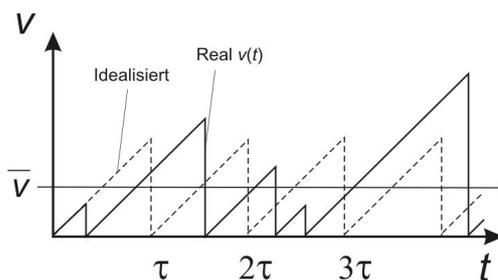


Abb. 2.2: Ladungsträrgeschwindigkeit

Dargestellt ist die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit freier Ladungsträger unter dem Einfluss einer Feldkraft. In unregelmäßigen Zeitabständen erfolgen unelastische Stöße mit Gitteratomen (reale Kurve). Im zeitlichen Mittel erfolgen Stöße nach einer Stoßzeit  $\tau$  (idealisierte Kurve), die zeitliche Mittelung der Geschwindigkeit ergibt die Driftgeschwindigkeit  $\bar{v}$ .

Dies ergibt für den stationären Zustand für den Betrag der Driftgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{e \tau}{m} E \quad (2.1)$$

Die Proportionalität von Driftgeschwindigkeit und Feldstärke (bzw. Feldkraft) hat eine starke Analogie zur mechanischen Reibung (Strömungswiderstand eines Körpers in einem Fluid). Die Proportionalitätskonstante ist die *Beweglichkeit*  $\mu$ :

$$\mu = \frac{e}{m} \tau \quad (2.2)$$

Weitere wichtige elektrische Größen sind die Ladungsträgerdichte  $n$  (Zahl der Ladungsträger je Volumen) und der Stromdichtevektor  $\vec{j}$ :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\text{Ladungsträgerzahl}}{\text{Volumen}} \quad (2.3)$$

$$\vec{j} = n \cdot (-e) \cdot \vec{v} \quad (2.4)$$

Der Stromdichtevektor gibt die in der Richtung von  $\vec{v}$  je Flächeneinheit pro Zeit durchströmende Ladung an. Integriert man den Stromdichtevektor über eine Fläche  $A$ , erhält man den Strom  $I$  durch diese Fläche:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} = I \quad (2.5)$$

Handelt es sich bei dieser Fläche um einen Draht, gilt  $I = j \cdot A$ .

Fasst man 2.1 und 2.4 zusammen, erhält man eine Proportionalität zwischen Stromdichte und Elektrischer Feldstärke. Die Proportionalitätskonstante  $\sigma$  bezeichnet man als *Leitfähigkeit*:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\boxed{\sigma = n \cdot e \cdot \mu \quad \text{Leitfähigkeit, in SIEMENS}^{14} \quad 1\text{S} = 1\Omega^{-1}\text{m}^{-1}} \quad (2.7)$$

<sup>13</sup> Paul Karl Ludwig DRUDE (1863-1906) dt. Physiker, Universität Leipzig; klassische Elektronentheorie, Ellipsometrie, Wärmeleitfähigkeit

<sup>14</sup> Werner von SIEMENS (1816-1892), dt. Ing. Physiker und Unternehmer; dynamoelektrisches Prinzip; Telegraphenbau; Stifter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

Die reziproke Leitfähigkeit, der *spezifische Widerstand*  $\rho$  (in  $\Omega\text{m}$ ), ist eine ebenfalls in der Elektrotechnik häufig verwendete stoffspezifische Größe. Aus Glg. 2.6 lässt sich leicht eine wichtige und Ihnen wohlbekannte Beziehung ableiten, das OHM<sup>15</sup>sche Gesetz. Man betrachtet hierzu ein Leiterstück der Länge  $l$  mit dem über die Länge konstanten Querschnitt  $A$ . Die Stromdichte sei über den Querschnitt konstant, ebenso das Elektrische Feld. Die Integration über den Leiterquerschnitt laut Glg. 2.5 entspricht dann einer Multiplikation  $j \cdot A = I$ . Man erhält

$$I = \sigma \cdot E \cdot A = \frac{E \cdot A}{\rho} = \frac{E \cdot l}{\rho \frac{l}{A}} = \frac{U}{\rho \frac{l}{A}} \quad (2.8)$$

Die Erweiterung mit  $l$  entspricht einer Integration über die Drahtlänge entsprechend Glg. 1.10 Spannung und Stromstärke über einen Leiter sind also zueinander proportional.

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{mit} \quad R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{in Ohm;} \quad 1\Omega = 1\text{V/A,} \quad \text{Ohmsches Gesetz} \quad (2.9)$$

Tabelle 2.1 Spezifischer Widerstand bei Raumtemperatur in  $\Omega\text{m}$

Bernstein	$10^{16}$ - $10^{17}$	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	$10^{-4}$
Polystyrol, PTFE	$10^{16}$	Graphit	$1,1 \cdot 10^{-5}$
Polyethylen, Glimmer	$10^{15}$	Chromdioxid	$10^{-6}$
Epoxydharz, hart-PVC	$10^{14}$	Wismut	$1,2 \cdot 10^{-6}$
Isolierpapier, Sinterkorund	$10^{13}$	Quecksilber	$9,6 \cdot 10^{-7}$
Silikongummi	$10^{11}$ - $10^{14}$	Konstantan	$5,0 \cdot 10^{-7}$
Diamant	$10^{11}$	Manganin	$4,2 \cdot 10^{-7}$
Porzellan	$10^{10}$	Blei	$2,1 \cdot 10^{-7}$
Glas (kein Leitglas)	$10^6$ - $10^{16}$	Zinn, Platin	$1,1 \cdot 10^{-7}$
Galliumarsenid (undot.)	$2 \cdot 10^7$	Eisen	$1,0 \cdot 10^{-7}$
Silizium (undot.)	$2,3 \cdot 10^5$	Wolfram	$5,5 \cdot 10^{-8}$
Silizium (dotiert)	bis $3 \cdot 10^{-5}$	Aluminium	$2,8 \cdot 10^{-8}$
Germanium	0,46		
Gefüllte Kunststoffe	$10^{10}$ - $10^{-4}$	Gold	$2,2 \cdot 10^{-8}$
Selbstleitende Kunststoffe	$10^{10}$ - $10^{-6}$	Kupfer	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Kalk, Granit	$10^4$	Silber	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Humus	$10^2$		

### Definition der Stromstärke

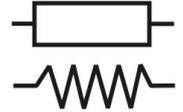
Die Stromstärke ist eine der 7 Basiseinheiten im Internationalen Maßsystem (SI). Ursprünglich wurde sie durch Anwendung der FARADAYSchen Gesetze definiert, indem die bei der Elektrolyse abgeschiedene Stoffmenge gewogen wurde. Die derzeit gültige Festlegung nutzt Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern aus. Hiernach fließt durch zwei lange parallele Drähte im Abstand von 1m dann je ein Strom von 1 Ampere, wenn die Kraft je Meter Leitungslänge  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton beträgt. Bei gleichgerichteten Strömen tritt Anziehung, bei antiparalleler Stromrichtung Abstoßung auf.

<sup>15</sup> Georg Simon OHM (1787-1854), dt. Physiker; Ohmsches Gesetz mit Thermoelement als Spannungsquelle; Molekularphysik; Kristalloptik; musikalische Akustik

Tabelle 2.2 Elektronenbeweglichkeit bei Raumtemperatur in  $10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$ 

Silber	5,6
Kupfer	3,1
Indium-Arsenid	2700
Wismut	400
Germanium	390
Silizium	190

In elektrischen Schaltbildern wird ein Widerstand durch ein Rechteck dargestellt, in englischer Literatur oft auch durch eine stilisierte Drahtwendel.



### Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Schaltet man 2 Widerstände  $R_1, R_2$  in *Reihe* hat diese Anordnung die gleiche Wirkung wie ein einzelner Widerstand  $R$ . Welche Größe hat dieser Ersatz- oder Gesamtwiderstand? Man denke sich jeden Widerstand aus je einem Streifen gleichen Querschnittes  $A$  und aus dem gleichartigen Leitermaterial mit dem spezifischen Widerstand  $\rho$  gefertigt. Lediglich die Längen  $l_1, l_2$  sind unterschiedlich. Offensichtlich kann man beide Streifen durch einen einzigen mit der Länge  $l = l_1 + l_2$  ersetzen, aus 2.9 folgt sofort  $R = R_1 + R_2$ .

Eine ähnliche Überlegung liefert den Ersatzwiderstand für eine *Parallelschaltung* von  $R_1$  und  $R_2$ . Hierzu kann man sich beide Widerstände aus jeweils gleich langen Streifen identischen Leitermaterials realisiert vorstellen, die aber unterschiedliche Querschnitte  $A_1, A_2$  aufweisen. Diese Anordnung kann ersetzt werden durch einen analogen Leiter mit dem Querschnitt  $A = A_1 + A_2$ . Es addieren sich laut 2.9 somit bei Parallelschaltung die reziproken Widerstände  $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$ . Führt man diese Betrachtungen für mehr als zwei Widerstände durch, ergeben sich folgende Beziehungen für den Gesamtwiderstand von Widerständen in Reihen- sowie Parallelschaltung

$$\boxed{\text{Reihenschaltung: } R_{ges} = \sum R_i ; \quad \text{Parallelschaltung: } R_{ges}^{-1} = \sum R_i^{-1}} \quad (2.10)$$

### 2.3. Elektrische Netzwerke - die KIRCHHOFF<sup>16</sup>schen Regeln

Als Netzwerk (Schaltung) bezeichnet man eine Zusammenstellung miteinander wechselwirkender elektronischer Bauelemente, die elektrische Energie erzeugen, leiten, speichern oder dissipieren (verbrauchen) können. Punkte, an denen mindestens drei Bauelemente miteinander verbunden sind, nennt man *Netzwerkknoten*. Vom Netzwerkknoten ausgehende Leiter heißen *Zweige*. Ein Weg, der nach Durchlaufen von mindestens zwei Zweigen an den Ausgangspunkt zurückführt, bildet eine geschlossene Schleife und wird als *Netzwerkmasche* bezeichnet.

Wenn während der Zeit  $dt$  durch den Querschnitt eines Leiters die Ladungsmenge  $dQ$  fließt, so bezeichnet man dies als elektrischen Strom mit der Stromstärke

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.11)$$

Verzweigt sich der Leiter, fließt diese Ladung i.a. zu ungleichen Teilen in die einzelnen Zweige, s. Abb. 2.3

$$I = \frac{dQ_1 + dQ_2}{dt} = I_1 + I_2 \quad (2.12)$$

<sup>16</sup> Gustav Robert KIRCHHOFF (1824-1887), dt. Physiker, Stromverteilungsregeln; Strahlungsgesetz; Spektralanalyse

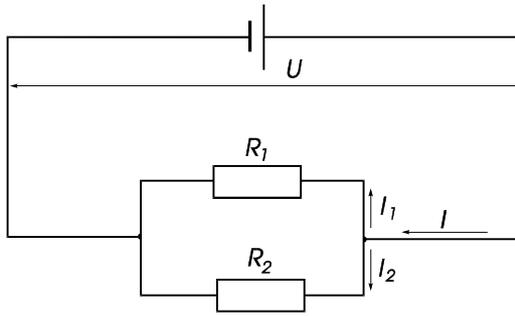


Abb. 2.3: Verzweigter Stromkreis

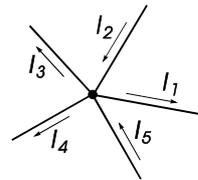


Abb. 2.4: Knoten

Es wird die Stromrichtung als positiv bezeichnet, bei der positive Ladungen zum Knoten hin fließen. Die Stromrichtung wird durch Pfeile verdeutlicht (der elektrische Strom ist aber keine vektorielle Größe!). Analog liegt eine negative Stromrichtung vor, wenn positive Ladungsträger vom Knoten wegfließen. Da keine Ladungen entstehen oder verschwinden, muss die Summe aller Teilströme an einem Knoten gleich Null sein. Diese Feststellung ist die 1. Kirchhoffsche Regel, der **Knotensatz**:

$\sum_k I_k = 0$ <p><b>Knotensatz</b></p> <p>Die Summe aller elektrischen Stromstärken ist unter Beachtung der Vorzeichen an einem Knotenpunkt gleich Null.</p>	(2.13)
---	--------

In Abb. 2.5 ist eine Anordnung angegeben, bei der die Klemmen einer Stromquelle durch zwei hintereinandergeschaltete Widerstände verbunden sind. Die Spannung zwischen den Polen der Quelle wird gemessen. Außerdem sind aber auch an beiden Widerstände Voltmeter angeschlossen. Auch diese Voltmeter zeigen Ausschläge: Hierbei stellt man fest, dass für beliebige Werte der Widerstände die Beziehung  $U = U_1 + U_2$  gilt. Analoge Experimente in verzweigten Netzwerken haben ein ähnliches Ergebnis zur Folge, das als 2. Kirchhoffsche Regel, auch als **Maschensatz**, bezeichnet wird.

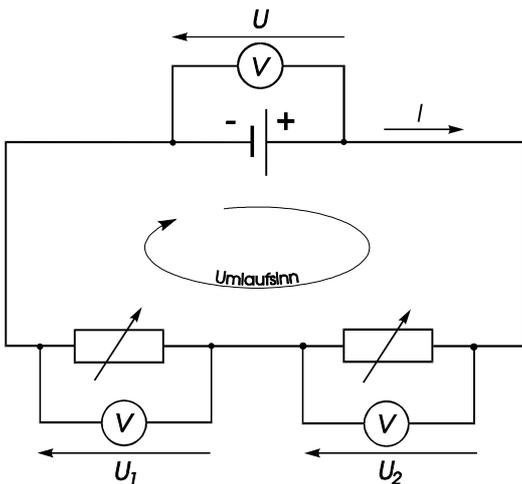


Abb. 2.5: Zur Kirchhoffschen Maschenregel

Richtungsfestlegungen:

1. Der elektrische Strom fließt durch den *äußeren* Stromkreis vom +Pol zum -Pol der Spannungsquelle, dann *innerhalb* der Spannungsquelle in der gleichen Richtung weiter, also vom -Pol zum +Pol.
2. Der Spannungsabfall hat die Richtung des Stromes im *äußeren* Stromkreis, also vom +Pol zum -Pol, *innerhalb* der Spannungsquelle die dem Strom entgegengesetzte Richtung, also ebenfalls vom +Pol zum -Pol.

Die an einer positiven Ladung verrichtete Arbeit ist bei deren Verschiebung innerhalb der Spannungsquelle, also von - nach + positiv, Die EMK (elektromotorische Kraft) "hebt" diese Ladung auf ein höheres Potential. Diese Energie wird während des Passierens der Ladung durch die Widerstände wieder als Wärme abgegeben. Die Vorzeichen dieser Arbeiten sind also negativ.

Legt man innerhalb der Masche einen Richtungssinn fest und bezieht auf diesen die Vorzeichen der Quellenspannungen  $U_{qi}$  und der an den Widerständen auftretenden Spannungsabfälle  $U_j$ , erhält man somit die folgende Beziehung:

$$\sum_i U_{qi} + \sum_j U_j = 0$$

(2.14a)

Die Summe aller Quellenspannungen und Spannungsabfälle in einer Masche ist gleich Null.

Wir betrachten vorläufig Schaltungen mit Spannungsquellen und Ohmschen Widerständen. Die an letzteren auftretenden Spannungsabfälle sind nach dem Ohmschen Gesetz dem Strom proportional, von dem sie durchsetzt werden:  $U_j = R_j I_j$ . Da die  $U_j$  in Glg. 2.14a negativ sind, ist es bequemer, mit der umgestellten zu arbeiten:

$$\sum_j R_j I_j = \sum_i U_{qi} \quad \text{Maschensatz}$$

(2.14b)

Die Summe aller Quellenspannungen ist gleich der Summe der Spannungsabfälle in einer Masche.

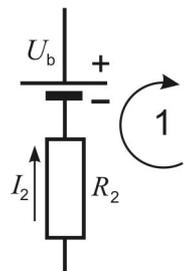
Diese Gleichung hat den Vorteil einfacherer Handhabbarkeit bezüglich der Festlegung der Vorzeichen der Spannungsabfälle an den Widerständen. Diese hängen nämlich von der i.a. vorerst unbekanntem Stromrichtung ab. Der Vergleich mit Abb. 2.5 zeigt, dass die  $R_j I_j$  in Glg. 2.14b positiv gerade dann sind, wenn Stromrichtung und Umlaufsinn übereinstimmen.

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln lassen sich für (nahezu beliebig komplizierte) Netzwerke lineare Gleichungssysteme aufstellen und durch deren Lösung unbekannte Größen bestimmen. Sind z.B. Urspannungen und Widerstände bekannt, können die Ströme über die einzelnen Widerstände und somit Spannungsabfälle berechnet werden. Sind ggf. Ströme und Spannungsabfälle bekannt, lassen sich die Urspannungen ermitteln usw. Im Folgenden werden wir einige Beispiele zur Anwendung der Kirchhoffschen Regeln rechnen. Hierbei ist es zweckmäßig, sich einen Algorithmus einzuprägen, der für alle Probleme dieser Art angewendet werden kann:

1. Kennzeichnung der Urspannungen sowie Ströme mit Angabe der Stromrichtung (willkürlich)
2. Bei N Knoten können maximal N-1 linear unabhängige Knotenregeln aufgeschrieben werden
3. Kennzeichnung von Maschen und Angabe des Umlaufsinns (willkürlich)
4. Vervollständigung des linearen Gleichungssystems durch Maschenregeln
5. Lösung des Gleichungssystems nach Standardmethoden der Linearen Algebra

Wenn wir nach dem angegebenen Schema verfahren, gilt es folgendes zu beachten:

1. Die Stromrichtungen an den Knoten sowie der Umlaufsinn in den einzelnen Maschen können willkürlich gewählt werden, hierbei ist es sinnvoll, soweit möglich, die Stromrichtungen in Übereinstimmung mit dem jeweiligen Umlaufsinn zu wählen. Es ist vorteilhaft, die Glg. 2.14b zu verwenden. Bei Stromrichtung in Umlaufsinn werden dann die Spannungsabfälle an den Widerständen positiv gerechnet (s. Skizze).
2. Urspannungen sind positiv, wenn der Umlaufsinn vom Minus- zum Plus- Pol (durch die Stromquelle) verläuft (s. Skizze). Die auf der rechten Seite der Gleichung 2.14b auftretenden Summanden werden dann positiv gerechnet (der sogenannte inhomogene Teil des entstehenden linearen Gleichungssystem erscheint dadurch gleich auf der rechten Seite der Gleichungen).



## Übungen

2.1. Obwohl die Driftgeschwindigkeit von Elektronen in einem metallischen Leiter sehr klein ist, leuchtet eine elektrische Lampe fast sofort nach dem Schließen des Schalters auf. Erklären Sie dies.

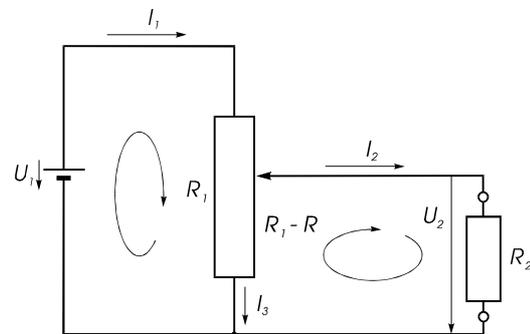
2.2. Berechnen Sie mit den in den Tabellen 2.1. und 2.2. gegebenen Daten die Dichte der Leitungselektronen in Silber, Wismut und in Silizium.

2.3. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einem Silberdraht der Länge  $d = 3,5$  m bei einer angelegten Spannung von  $U = 1$  V.

### 2.4. Der Ohmsche Spannungsteiler

*Aufgabe:* Mit Hilfe eines regelbaren Widerstandes (Potentiometer mit veränderlichem Mittelabgriff) kann ein einfacher Spannungsteiler aufgebaut werden. Man berechne die am Lastwiderstand abfallende Spannung.

Abb. 2.6: Spannungsteiler mit Lastwiderstand



*Lösung:* In die Schaltung laut Abb. 2.6 werden Ströme und Spannungen eingetragen und der Umlaufsinn in jeder Masche gekennzeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall des *unbelasteten* Spannungsteilers. Das bedeutet, dass der Strom über den Lastwiderstand  $R_2$  vernachlässigbar klein ist, also  $I_2 \ll I_1$  bzw.  $R_2 \gg R_1 - R$ . Dann gilt in guter Näherung

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 R_1 \\ 0 &= U_2 - I_1 (R_1 - R) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$U_2 = U_1 \frac{(R_1 - R)}{R_1} \quad \text{unbelasteter Ohmscher Spannungsteiler} \quad (2.15)$$

Wenn man dagegen den Spannungsteiler belastet, ist der Teilstrom  $I_2$  zu berücksichtigen. Die Anwendung von Knoten- und Maschenregeln liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ U_1 &= R I_1 + (R_1 - R) I_3 \\ U_2 &= R_2 I_2 = (R_1 - R) I_3 \end{aligned}$$

Die Kombination der drei Gleichungen ergibt folgenden Zusammenhang für den *belasteten* Ohmschen Spannungsteiler:

$$U_2 = U_1 \frac{R_2 (R_1 - R)}{R_2 R_1 + R (R_1 - R)}$$

Es ist leicht zu sehen, dass beim Grenzübergang  $R_2 \rightarrow \infty$  diese Beziehung in den Ausdruck für den *unbelasteten* Spannungsteiler übergeht.

### 2.5.\* Die WHEATSTONE<sup>17</sup>sche Brücke

Man kann einen Widerstand messen, indem man gleichzeitig die an ihm abfallende Spannung  $U$  sowie den Strom  $I$  misst. Aus beiden Größen lässt sich dann nach dem Ohmschen Gesetz problemlos der Widerstand bestimmen. Diese Art der Widerstandsbestimmung ist aber aus mehreren Gründen recht ungenau. Einerseits verfälscht der Innenwiderstand der Messgeräte entweder Spannung oder Strom, andererseits treten systematische Fehler durch die begrenzte Genauigkeit der Messgeräte auf. Deshalb bedient man sich zur genaueren Widerstandsbestimmung häufig der sog. Wheatstoneschen Brücke. Hierbei wird der unbekannte Widerstand mit geeichten Widerständen verglichen. Da man stromlos misst, wird eine hohe Messgenauigkeit erreicht.

*Aufgabe:* Geben Sie für die abgegliche Brücke die Größe des unbekanntes Widerstandes  $R_3$  an.

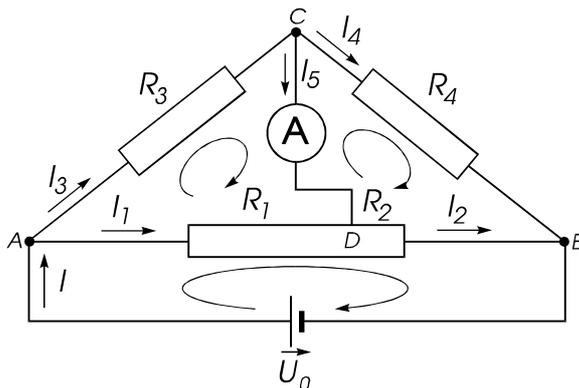


Abb. 2.7: Wheatstonesche Brücke

Der sogenannte Abgleich der Brücke erfolgt durch Variation von  $R_1$  und  $R_2$ , bis über das Amperemeter kein Strom mehr fließt. Im unabgeglichenen Betrieb ist der Innenwiderstand  $R_5$  des Strommessgerätes zu berücksichtigen.

*Lösung:* Den verstellbaren Widerstand verändert man solange, bis durch das Messgerät kein Strom mehr fließt. Dies ist der Fall wenn die Spannung zwischen den Punkten C und D verschwindet, d.h. die Spannungsabfälle an  $R_3$  und  $R_1$  sind gleich, somit auch die Spannungsabfälle an  $R_4$  und  $R_2$ . Für diesen Fall der abgeglichenen Brücke lässt sich unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln leicht eine Beziehung für den unbekanntes Widerstand  $R_3$  aufschreiben. Wir kennzeichnen hierzu wieder die einzelnen Ströme und legen die Umlaufrichtungen für die einzelnen Maschen fest (s. Abb. 2.7). Aus der Anwendung von Knoten- und Maschenregeln ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}
 \text{A)} & I - I_1 - I_3 = 0 \\
 \text{B)} & I_3 - I_4 - I_5 = 0 \\
 \text{C)} & I_1 + I_5 - I_2 = 0 \\
 \text{D)} & R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_0 \\
 \text{E)} & R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_1 I_1 = 0 \\
 \text{F)} & R_4 I_4 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = 0
 \end{array}$$

Für die abgegliche Brücke ( $I_5 = 0$ ) gilt dann :

$$\begin{array}{ll}
 \text{B)} & I_3 = I_4 \\
 \text{C)} & I_1 = I_2 \\
 \text{E)} & R_3 I_3 = R_1 I_1 \\
 \text{F)} & R_4 I_4 = R_2 I_2
 \end{array}
 \quad \text{und}$$

Aus der Division der Gleichungen E) und F) folgt dann schließlich

$$\underline{\underline{R_3 = R_4 \frac{R_1}{R_2}}}$$

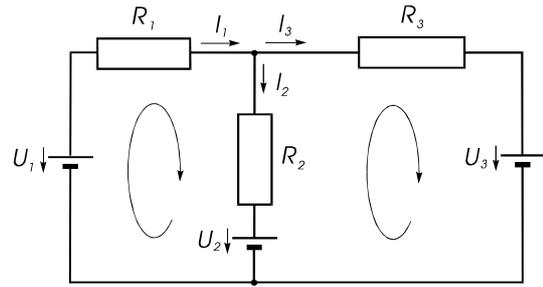
Somit hat man  $R_3$  auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Da die Messung über den Nullabgleich des Strommessers durchgeführt wird, ist die Güteklasse des Messgerätes von untergeordneter Bedeutung. Weiterhin ist die Spannung  $U$  der Spannungsquelle unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken. Hieraus folgt, dass die Wheatstone-Brücke gleichermaßen für Wechselstrom geeignet ist. Später werden wir sehen, wie sich mit ähnlichen Schaltungen auch Kapazitäten, Induktivitäten und Frequenzen sehr genau messen lassen.

<sup>17</sup> Sir Charles WHEATSTONE (1802-1875), engl. Physiker; Musikinstrumentenhersteller; Optik (Stereoskop); Ausbreitung elektrischer Signale auf Leitungen

2.6.\* In der Schaltung nach Abb. 2.8 ist der Wert von  $I_2$  gesucht.

Abb. 2.8: Widerstandsnetzwerk

$$\begin{aligned} U_1 &= 2V & R_1 &= 4\Omega \\ U_2 &= 4V & R_2 &= 6\Omega \\ U_3 &= 6V & R_3 &= 8\Omega \end{aligned}$$



Lösung: Nach der Bezeichnung von Strömen, Spannungen und Angabe des jeweiligen Umlaufsinn ergibt die Anwendung der Knoten- und der Maschenregel folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_2 R_2 + I_3 R_3 &= U_2 - U_3 & \Rightarrow & I_3 R_3 = U_2 - U_3 + I_2 R_2 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 &= U_1 - U_2 & & (I_2 + I_3) R_1 + I_2 R_2 = U_1 - U_2 \end{aligned}$$

Umstellen nach  $I_3$  und Einsetzen in die letzte Gleichung ermöglicht die Separation von  $I_2$

$$\begin{aligned} I_3 &= (U_2 - U_3 + I_2 R_2) / R_3 \\ (I_2 + (U_2 - U_3 + I_2 R_2) / R_3) R_1 + I_2 R_2 &= U_1 - U_2 \\ I_2 &= \frac{U_1 - U_2 + (U_3 - U_2) R_1 / R_3}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_3} = \frac{(U_1 - U_2) R_3 + (U_3 - U_2) R_1}{(R_1 + R_2) R_3 + R_1 R_2} \end{aligned}$$

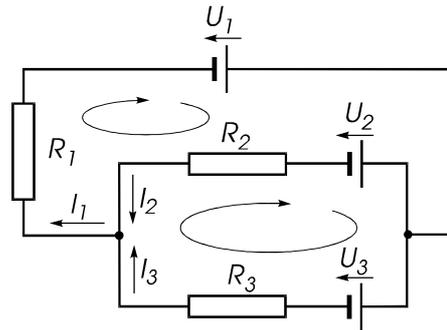
Erst jetzt (also nachdem ein Ausdruck gefunden wurde, bei dem die gesuchte Größe als Funktion von bekannten Größen dargestellt ist) werden die gegebenen Werte für Widerstände und Urspannungen eingesetzt:

$$I_2 = \frac{(2V - 4V) 8\Omega + (6V - 4V) 4\Omega}{(4\Omega + 6\Omega) 8\Omega + 4\Omega 6\Omega} = \frac{-16 + 8}{80 + 24} \cdot \frac{V}{\Omega} = \underline{\underline{-77 \text{ mA}}}$$

Das im Ergebnis auftretende Minuszeichen bedeutet, dass die wahre Stromrichtung von  $I_2$  der in Abb.2.7 willkürlich gewählten entgegengesetzt ist.

2.7.\* Für das in Abb. 2.9 dargestellte Netzwerk sind die Ströme über die einzelnen Widerstände zu berechnen!

Abb. 2.9: Widerstandsnetzwerk



Lösung: Nach der Bezeichnung von Strömen und Festlegung der Umlaufrichtungen erhalten wir wieder durch Anwendung von Knoten- und Maschenregeln das Gleichungssystem für das Netzwerk:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_1 - U_2 \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 &= U_2 - U_3 \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen wurden diesmal nach den drei Unbekannten  $I_1, I_2, I_3$ , so geordnet aufgeschrieben, dass ihre jeweiligen Koeffizienten deutlich werden und die Absolutglieder auf der rechten Seite stehen. Sie sollen jetzt mit einer sehr rationellen Methode zur Lösung dieser Art von Gleichungssystemen bekanntgemacht

werden. Hierzu ist es bequem, diese Gleichungen in der sogenannten *Matrixschreibweise* aufzuschreiben. Dabei bilden die Koeffizienten die Elemente einer quadratischen Matrix, der *Koeffizientenmatrix*. Die Variablen und der inhomogene ("rechte") Teil sind in Spaltenvektoren enthalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}$$

Die Lineare Algebra bietet Lösungsverfahren für derartige Gleichungssysteme, die es gestatten, auch äußerst komplexe Netzwerke zu berechnen. Bei einfacheren Systemen, wie dem vorliegenden Beispiel, ist es trotzdem vorteilhaft, sich dieser Methoden zu bedienen, da bei Anwendung von festen Lösungsschemata Fehler eher vermieden werden. Außerdem wird die Struktur des Gleichungssystems weitgehend erhalten, so dass die Ergebnisse meist ohne große Umformungen kompakt sind. Zur Bestimmung von  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  wollen wir die CRAMER<sup>18</sup>sche Regel anwenden (siehe Anhang). Hierzu ist es notwendig, die *Determinante*  $D$  der Koeffizientenmatrix zu berechnen. Man erhält:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3$$

Wir bezeichnen mit  $D_j$  diejenige Determinante, die entsteht, wenn die  $j$ -te Spalte von  $D$  durch die Elemente des Spaltenvektors der Konstanten ("Rechte Seite") ersetzt wird:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ U_1 - U_2 & R_2 & 0 \\ U_2 - U_3 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 (U_1 - U_2) + R_2 (U_2 - U_3) + R_3 (U_1 - U_2)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U_1 - U_2 & 0 \\ 0 & U_2 - U_3 & R_3 \end{vmatrix} = R_3 (U_1 - U_2) + R_1 (U_3 - U_2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & U_1 - U_2 \\ 0 & -R_2 & U_2 - U_3 \end{vmatrix} = R_2 (U_2 - U_3) + R_1 (U_2 - U_3) + R_2 (U_1 - U_2)$$

Damit erhalten wir für die Teilströme folgende Ausdrücke:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{R_2 (U_1 - U_2) + R_2 (U_2 - U_3) + R_3 (U_1 - U_2)}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{R_3 (U_1 - U_2) + R_1 (U_3 - U_2)}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}$$

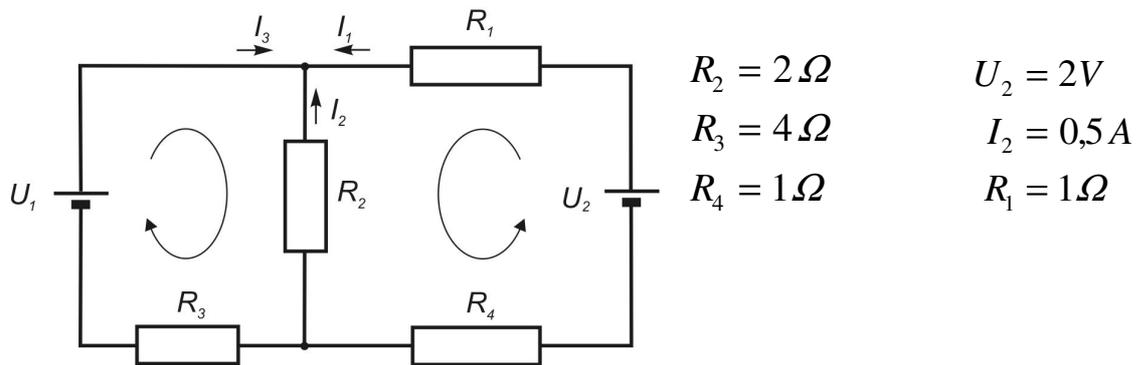
$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{R_2 (U_2 - U_3) + R_1 (U_2 - U_3) + R_2 (U_1 - U_2)}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}$$

<sup>18</sup> Gabriel CRAMER (1704-1752) Schweizer Mathematiker und Philosoph

Die Vorteile der Anwendung der Cramerschen Regel werden offensichtlich, wenn man versucht, analytische Lösungen für noch kompliziertere Netzwerke zu gewinnen. Größere Gleichungssysteme durch Umstellen und Einsetzen aufzulösen, führt zunächst zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken und es eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten für Rechenfehler. Dagegen können Determinanten leicht vereinfacht werden, insbesondere enthalten Quotienten der Art  $D_j/D$  oft gemeinsame Teiler, so dass effektiv gekürzt werden kann, was sich in einer kompakten Form der Ergebnisse widerspiegelt.

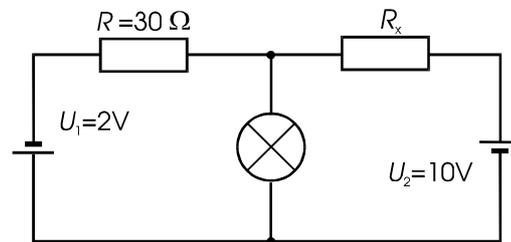
In der Vorlesung "Lineare Algebra" werden Sie die Grundlagen für diese und ähnliche rationelle Verfahren (Gaußsches Eliminationsverfahren, Gauß-Jordan-Algorithmus) zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen kennenlernen. Sollten Sie schon jetzt Interesse verspüren, können Sie sich im Anhang A2 "Die Cramersche Regel" hierüber etwas ausführlicher informieren.

**2.8.\*** Wie groß muss die Spannung  $U_1$  sein, damit über den Widerstand  $R_2$  ein Strom von 0,5A (in der angegebenen Richtung) fließt?



*Ergebnis:*  $U_1 = -9V$ , d.h. die Spannungsquelle  $U_1$  muss umgepolt werden!

**2.9.\*** Auf der Abb. ist ein Gleichspannungsnetzwerk dargestellt. Die Glühlampe trägt am Sockel die Inschrift „6V 2,4 W“. Berechnen Sie (unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln!) den Wert des Widerstandes  $R_x$ , der notwendig ist, damit das Lämpchen optimal leuchtet.



*Richtiges Ergebnis:*  $R_x = 6 \Omega$

Wenn Sie zunächst einen Wert  $R_x = -30 \Omega$  ermittelt haben, hatten Sie die Stromrichtung von  $I_2$  falsch gewählt, Sie müssen dann mit negativem  $I_2$  die Berechnung von  $R_x$  wiederholen.

## 2.4. Elektrochemische Spannungsquellen

Gibt man in ein Lösungsmittel Säuren, Laugen oder Salze, werden deren Moleküle in paarweise positiv und negativ geladene Ionen gespalten (*dissoziiert*) und als solche gelöst. Ein sehr gutes Lösungsmittel stellt Wasser dar. Wegen der hohen relativen elektrischen Permittivität von  $\epsilon = 81$  verringert Wasser stark das elektrische Feld zwischen den Molekülbestandteilen und lockert somit die Bindung durch Verringerung der elektrostatischen Kräfte. Da die Ionen im Lösungsmittel beweglich sind wird die Lösung elektrisch leitfähig (*Elektrolyt*). Ionen haben gänzlich andere chemische Eigenschaften als Atome. So würde z.B. Na mit Wasser heftig zu NaOH reagieren, unter Freisetzung von Wasserstoff. Die bei Auflösung von Kochsalz gebildeten  $\text{Na}^+$ -Ionen verhalten sich dagegen äußerst friedfertig. Die Ursache hierfür ist, dass die chemischen Eigenschaften fast völlig von der äußersten Elektronenhülle bestimmt werden, diese ist bei  $\text{Na}^+$  die einer Edelgaskonfiguration. Neben Wasser gibt es viele andere Flüssigkeiten, die als Lösungsmittel für Elektrolyte geeignet sind, allerdings haben diese fast ausschließlich viel kleinere  $\epsilon$  mit entsprechend geringerer dissoziierender Wirkung. Geschmolzene Salze sowie einige Festkörper, bei denen bestimmte Ionen frei beweglich sind, eignen sich ebenfalls als Elektrolyte und sind für einige technische Anwendungen interessant.

Sobald man ein Metall in einen Elektrolyten eintaucht, gehen Metallionen in Lösung, an der Oberfläche bildet sich eine geladene Doppelschicht, bestehend aus positiven Metallionen und den im Metall verbliebenen Elektronen. Dieser Prozess dauert solange an, bis das Bestreben in Lösung zu gehen (*Lösungstension*) durch das anwachsende elektrische Feld in der Doppelschicht kompensiert wird. Um die mit diesem Feld verbundene Potentialdifferenz (*GALVANI<sup>19</sup>-Potential*) zwischen Metall und Ionen zu messen, benötigt man eine zweite Elektrode. Man wählt hierzu ein anderes Metall mit einer anderen Lösungstension. Auch an dessen Oberfläche bildet sich eine Doppelschicht. Da beide Sorten von Metallionen durch den gut leitenden Elektrolyten auf gleichem Potential liegen, misst man zwischen beiden Elektroden gerade die Differenz der Galvani -Potentiale. Diese Anordnung bildet eine elektrochemische Spannungsquelle (*Galvanisches Element*), die Quellenspannung bezeichnet man oft als *elektromotorische Kraft EMK*.

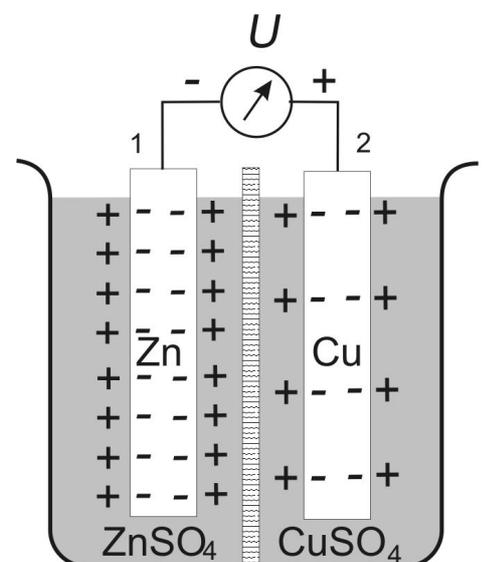
Praktisch ist die Verwendung einer standardisierten Referenzelektrode, auf die man die mit verschiedenen Elektrodenmaterialien gemessenen Spannungen bezieht. Üblich ist die Standard-Wasserstoff-Elektrode, bei der Wasserstoffgas, welches ein Platinblech umspült, die Funktion einer Metallelektrode ausübt. Einige der mit einer solchen Elektrode gemessenen Normalpotentiale sind in Tabelle 2.2 angegeben

Abb. 2.10: Galvanische Zelle (DANIELL<sup>20</sup>-Element)

Eine poröse Membran trennt die die  $\text{CuSO}_4$ -Lösung von der  $\text{ZnSO}_4$ -Lösung

Galvani beobachtete, dass frisch seziierte Froschschenkel zuckten, wenn man sie durch Elektrisiermaschinen, aufgeladene Leidener Flaschen oder bei Gewitter elektrisierte. Ebenfalls trat dieser Effekt auf, wenn man sie gleichzeitig mit Kupfer und Eisen berührte.

VOLTA erkannte, dass die Froschmuskeln mit ihren Nerven Elektrometer darstellen, mit denen man Kontaktspannungen nachweisen kann. Die Galvanische Zelle geht auf ihn zurück und nicht auf Galvani. Er entdeckte auch, dass sich durch Reihenschaltung von Galvanischen Zellen die abgreifbare Spannung bedeutend erhöhen lässt (*VOLTAsche Säule*)



<sup>19</sup> Luigi GALVANI (1737-1798), it. Anatom und Biologe; Froschschenkelversuche

<sup>20</sup> John Frederic DANIELL (1790-1846), engl. Chem. und Meteorologe; Taupunkt-Hygrometer; Pyrometer

Tabelle 2.2: Normalpotentiale (in V)

für einige Metalle und Gase bei Raumtemperatur, bezogen auf  $H_2$  (angegeben ist auch der Ionenzustand, in welchen das Metall übergeht)

$Li^+$	$Ca^{++}$	$Al^{+++}$	$Zn^{++}$	$Fe^{++}$	$Fe^{+++}$	$Cd^{++}$	$Ni^{++}$	$Pb^{++}$	$Cu^{++}$	$Cu^+$	$Ag^+$	$Hg^{++}$	$Au^{++}$	$OH^-$	$Cl^-$	$F^-$
/Li	/Ca	/Al	/Zn	/Fe	/Fe	/Cd	/Ni	/Pb	/Cu	/Cu	/Ag	/Hg	/Au	/O <sub>2</sub>	/Cl <sub>2</sub>	/F <sub>2</sub>
-3,02	-2,90	-1,66	-0,76	-0,44	-0,04	-0,40	-0,25	-0,13	+0,34	0,51	+0,81	0,86	+1,50	+0,40	+1,36	+2,87

Bestehen die Elektroden aus Kupfer und Zink, der Elektrolyt enthält Sulfationen (Daniell-Element, s. Abb. 2.10), so gehen  $Cu^{++}$ - und  $Zn^{++}$ -Ionen in Lösung. Die Spannung an den Klemmen beträgt dann  $+0,34\text{ V} - (-0,76\text{ V}) = 1,10\text{ V}$ . Sofern kein Strom entnommen wird, misst man diesen Wert auch im Experiment. Bei Stromentnahme fließt ein Elektronenstrom über den Verbraucher vom Zink zum Kupfer. Als Folge gehen neue Zinkionen in Lösung und Kupferionen treten aus der Kupfersulfatlösung auf das Kupfer über. Es läuft die Reaktion  $Zn + Cu^{++} \rightarrow Zn^{++} + Cu$  ab. Dieser Vorgang endet erst, wenn alles Zink aufgelöst und sich eine entsprechende Menge Kupfer auf der Kupferelektrode niedergeschlagen hat. Die von dem Daniell-Element als elektrische Energie gelieferte Arbeit stammt somit aus der chemischen Energie, die bei der Auflösung des Zinks und dem Niederschlag von Kupfer frei wird. Die Berechnung der Zellenspannung ist jedoch nicht immer so trivial. Die bekannte NiCd-Zelle liefert z.B. 1,3 V. Schaut man auf die Tabelle 2.2 käme man allerdings nur auf 0,15 V. Hier sorgt eine komplizierte Reaktion über Hydroxide für die höhere Zellenspannung.

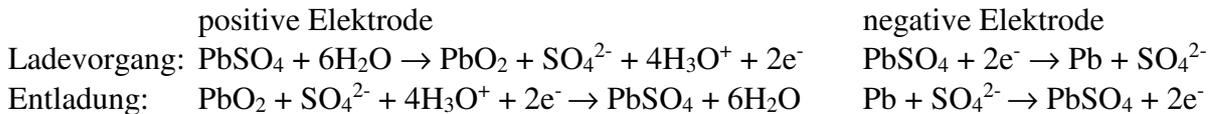
Wenn wie beim Daniell-Element ein Reaktionspartner beim Betrieb der Zelle verbraucht wird, spricht man vom *Primärelement*. Ist dieser Vorgang reversibel, kann somit durch umgekehrten Stromfluss der ursprüngliche Zustand wiederhergestellt werden (Aufladen), bezeichnet man diese Zelle als *Akkumulator* oder *Sekundärelement*. Sehr gebräuchlich als Primärelement ist die 1865 von LECLANCHÉ<sup>21</sup> erfundene *Kohle-Zink-Batterie*. Bei dieser dient als Zelle ein Zinkbecher, der in Ammonium- und Zinkchloridlösung als Elektrolyt einen Beutel mit Braunstein ( $MnO_2$ ) enthält. Als Kontakt (Pluspol) dient ein Graphitstab. Eine wichtige Variante dieses Elementes stellt die ebenfalls weit verbreitete *Alkali-Mangan-Zelle* dar. Diese enthält einen alkalischen Elektrolyten (KOH) anstelle  $ZnCl$  in der Elektrolytpaste der Zink-Braunstein-Zelle. Die Kapselung ist etwas aufwendiger, dafür ist die Energiedichte (Quotient aus entnehmbarer Energie und Masse, Wh/kg) etwa doppelt so hoch. Eine besonders hohe Energiedichte zeichnen *Lithium-Batterien* aus. Da Lithium am extrem negativen Ende der Spannungsreihe steht (s.Tab.2.2), unterscheiden sich die Standardpotentiale von Anoden- und Kathodenreaktion stark voneinander. So beträgt z.B. die EMK der *Lithium-Thionylchlorid-Batterie* etwa 3V. Das ist für die Anwendung beim Betrieb von Transistorschaltungen günstig, denn es erübrigt Serienschaltungen mehrerer Zellen. Neben der hohen Zellenspannung ist das geringe spezifische Gewicht von Lithium und der bei der Zellreaktion beteiligten Elemente Ursache für die hohe Energiedichte. Bei geringer Stromentnahme können Lithiumzellen viele Jahre als Spannungsquellen dienen (Betrieb von Armbanduhren, Stromquelle für das BIOS im Computer u.v.m.).

Der älteste Vertreter der Akkumulatoren, der sich auch heute noch großer technischer Aktualität erfreut, ist der 1859 von PLANTE<sup>22</sup> erfundene Bleiakкумуляtor. Der ungeladene Bleiakku besteht aus zwei Bleiplatten in verdünnter Schwefelsäure. An der Oberfläche der Bleiplatten bildet sich Bleisulfat. Schickt man einen Strom durch die Zelle, wird an der positiven Elektrode das Bleisulfat unter Abgabe von negativ geladenen Sulfationen zu Bleidioxid oxidiert und noch zwei Elektronen an die Elektrode abgegeben. An der negativen Elektrode wird das Bleisulfat dagegen unter Aufnahme zweier Elektronen zu metallischem Blei reduziert. Nach dem Aufladeprozess ist die Konzentration der Schwefelsäure angestiegen (einfache Prüfmöglichkeit über Dichtemessung mittels Aräometer) und einer reinen Bleiplatte steht eine Platte aus Bleidioxid gegenüber. Beide Platten wirken als

<sup>21</sup> Georges LECLANCHÉ (1839-1882), franz. Chemiker und Ing.

<sup>22</sup> Gaston PLANTE (1834-89), franz. Physiker

Elektroden eines galvanischen Elementes, das eine EMK von 2 Volt liefert. Werden sie leitend miteinander verbunden, laufen die gleichen chemischen Reaktionen, nur in umgekehrter Reihenfolge ab:



Beide Elektroden wandeln sich bei der Entladung wieder in Bleisulfat um, wobei die positive Elektrode zwei Elektronen abgibt und die negative zwei Elektronen aus dem Elektrolyten empfängt. Der Vorteil von Bleiakku liegt in ihrer Robustheit, einer hohen Zahl von Ladezyklen und der Möglichkeit einer sehr hohen Stromentnahme. Insbesondere die Starterbatterie eines Autos kann so kurzzeitig eine Leistung von mehreren kW an den Anlasser liefern.

Beim Aufladen eines Akkus wird mehr Energie benötigt, als man bei der Entladung entnehmen kann. Der Wirkungsgrad des Bleiakkus als Quotient beider Energien beträgt 70-75%. Die praktisch erreichbare Energiedichte beträgt etwa 0,03 kWh/kg. Ungefähr doppelt so hoch liegt die Energiedichte bei Ni-Cd-Zellen, diese kommen auf 0,04 kWh/kg, die modernen Ni-Hydridzellen auf 0,08 kWh/kg. Bei dieser schwermetallfreien (!) Zelle wird anstelle von Cadmium eine Wasserstoffelektrode verwendet. Der Wasserstoff befindet sich in einer Ti-Ni- oder La-Ni-Legierung atomar auf Zwischengitterplätzen gespeichert. Die Affinität ist so groß, dass in den knapp 5 cm<sup>3</sup> einer AA-Mignonzelle ohne Überdruck eine solche Menge Wasserstoffgas gespeichert ist, die 500 cm<sup>3</sup> Gas unter Normalbedingungen entspricht.

Neben der Spannung ist die Kapazität wichtigste Kenngröße einer Zelle. Die Spannung ist zwar mit der Bauart festgelegt, aber beileibe keine Konstante. Während der Entladung nimmt sie zunächst etwa ab, bleibt dann eine gewisse Zeit fast konstant, um dann gegen Ende rasch abzufallen. Dieses Zeitverhalten hängt noch stark von der Temperatur und von der Entladestromstärke ab. Um eine höhere Spannung als die Zellenspannung zu erhalten, werden mehrere Zellen in Reihe geschaltet. Dann spricht man von einer *Batterie*. Die gesamte Ladung  $Q$ , die einer Zelle entnommen werden kann, wird als *Kapazität* bezeichnet. Diese wird in Ah gemessen und ist keinesfalls mit der Kapazität eines Kondensators zu verwechseln. Das Produkt aus Zellenspannung und Kapazität, integriert über die gesamte Nutzungsdauer, ergibt die entnehmbare Energie

$$W = \int_0^{\infty} U(t)I(t)dt . \quad (2.16)$$

Dieser Wert hängt stark von den Entladungsbedingungen ab und ist insbesondere bei starkem Strom wegen des *Innenwiderstandes* geringer als bei niedrigerer Belastung. Näherungsweise kann man bei einer Strombelastung von 1/5h der Kapazität diese mit der Nennspannung multiplizieren. Bei einer Kapazität einer Ni-Cd-Zelle von 600 mAh und einer Nennspannung von 1,2 V kann man bei einem Strom von 120 mA mit etwa 0,720 Wh entnehmbarer Energie rechnen.

Die Energiedichte von Sekundärzellen ist stets geringer als die von Primärzellen vergleichbarer Bauart. Li-Primärzellen erreichen bis 0,5 kWh/kg. Vergleicht man diesen Wert mit dem von Benzin (12 kWh/kg), versteht man, worin das Hauptproblem bei der Entwicklung (und Akzeptanz) von Elektroautos besteht.

## 2.5. Innenwiderstand von Spannungsquellen

Verfolgt man die komplizierten Vorgänge in galvanischen Spannungsquellen wird klar, dass zunächst der Ladungstransport mittels Ionenstrom durch den Elektrolyten Energie verbraucht, wodurch sich die Zelle erwärmt. Die dabei ablaufenden chemischen Reaktionen sind dazu in hohem Maße temperaturabhängig. Diese Verluste kann man wie die an einem Ohmschen Widerstand behandeln und bezeichnet ihn als den *Innenwiderstand* der Spannungsquelle.

Ungeregelte Gleich- aber auch Wechselspannungsquellen (Generatoren, Transformatoren, s.u.) besitzen endliche Innenwiderstände.

Derartige "Innenwiderstände" bewirken ein Absinken (Zusammenbrechen) der Klemmenspannung  $U$  bei anwachsender Stromstärke  $I$ .

Die von der Spannungsquelle an einen Verbraucher übertragbare Leistung  $P = U I$  sollte daher (wenigstens) ein Maximum besitzen, denn sowohl im Leerlauf ( $I = 0$ ) als auch im Kurzschluss ( $U = 0$ ) ist sie jeweils gleich Null.

Die Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand  $R_i$  und der Ursprungspannung  $U_0$  wird, wie in Abb. 2.11 gezeigt, durch den Verbraucher  $R$  belastet.

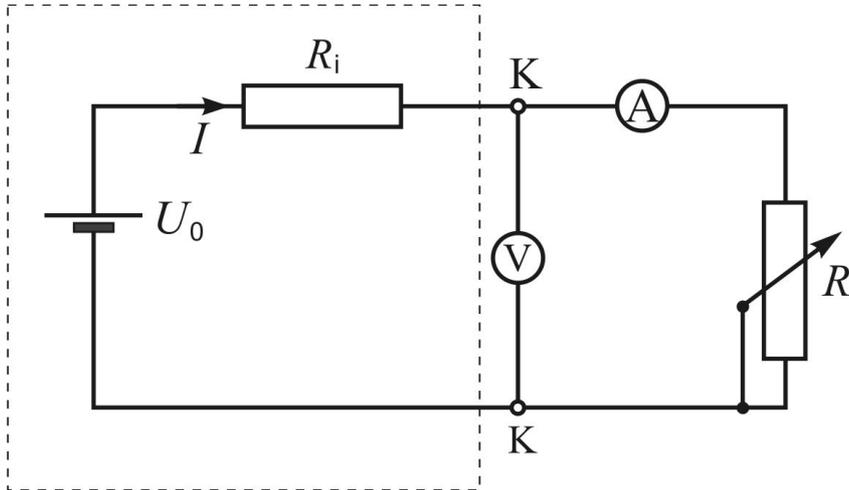


Abb. 2.11: Belastete Spannungsquelle

Die gestrichelte Linie verdeutlicht die eigentliche Spannungsquelle, welche die Ursprungspannung sowie den Innenwiderstand als Ohmschen Widerstand enthält. Mit der Außenschaltung können lastabhängig Strom und Klemmenspannung bestimmt werden.

Obwohl in der Abbildung räumlich getrennt dargestellt, sind  $U_0$  und  $R_i$  experimentell nicht trennbar. Misst man an den Anschlussklemmen  $K$ , so befindet sich  $R_i$  stets im Inneren der Spannungsquelle.

Die Messung der Klemmenspannung  $U$  der belasteten Spannungsquelle kann daher nur ein Ergebnis liefern, das um den inneren Spannungsabfall kleiner als die Ursprungspannung  $U_0$  ist. Es gilt

$$U = U_0 - I R_i \quad (2.17)$$

Wenn  $R_i$  konstant ist, stellt Glg. 2.17 eine Gerade mit dem Anstieg  $(-R_i)$  dar. Sie schneidet die Achsen bei der Leerlaufspannung  $U_0$  und dem Kurzschlussstrom  $I_K = U_0 / R_i$ .

Experimentell findet man jedoch meist eine Abhängigkeit  $R_i(I)$ , die nur in grober Näherung zu vernachlässigen ist. Dementsprechend weicht  $U(I)$  von einer Geraden ab. Aus (2.17) folgt mit dem Ohmschen Gesetz  $U = I R$  für die Stromstärke

$$I = U_0 / (R_i + R), \quad (2.18)$$

für die Klemmenspannung

$$U = (U_0 R) / (R_i + R) \quad (2.19)$$

und für die an den Verbraucher übertragene Leistung

$$P = I U = R U_0^2 / (R_i + R)^2 \quad (2.20)$$

Unterzieht man (2.20) einer Extremwertbetrachtung ( $\frac{dP}{dR} = 0$ ), so findet man, wie oben bereits vermutet, ein Leistungsmaximum bei  $R = R_i$ .

Eine Spannungsquelle überträgt die größtmögliche Leistung an den Verbraucher, dessen Widerstand ihrem Innenwiderstand gleich ist. Die Klemmenspannung ist in diesem sogenannten *Anpassungsfall* gleich der halben Leerlaufspannung, die Stromstärke gleich der halben Kurzschlussstromstärke. Die maximale Leistung beträgt  $P_{\max} = U_o^2 / (4R_i)$ . Diese Leistung fällt sowohl am Last- als auch am Innenwiderstand an.

Die am Innenwiderstand anfallende Leistung führt zur Erwärmung der Spannungsquelle. Wird diese so betrieben, dass sie maximale Leistung liefert (z.B. KFZ-Starterbatterie während des Anlassens), muss entweder die Betriebsdauer kurz sein, oder für eine entsprechende Kühlung gesorgt werden.

### Übungen

**2.10.\*** Gemessen wurde die Abhängigkeit der Klemmenspannung vom Strom in einer Schaltung nach Abb. 2.11, wie sie in der folgenden Grafik dargestellt ist. Es sollen sowohl Ursprung und Kurzschlussstrom als auch Innenwiderstand eines Akkupacks aus 4AA-NiMH-Zellen bei Anpassung aus dieser Grafik bestimmt werden.

*Lösung:* Wie aus der Grafik ersichtlich, liegen die Messpunkte, abgesehen von Streuungen infolge von Messungenauigkeiten, nicht auf einer Geraden, sondern auf einer leicht gekrümmten Kurve. Dies ist bedingt durch nichtlineare Transportprozesse im Elektrolyten, durch Erwärmung bei starker Stromentnahme,... Für die drei interessierenden Fälle Leerlauf, Kurzschluss und Leistungsanpassung orientiert man sich deshalb auf die jeweils in diesen Belastungsbereichen liegenden Messwerte und approximiert den Verlauf der Messkurve durch die Geraden 1, 2, 3. Die Schnittpunkte der Geraden 1 mit der Ordinate ergibt mit 4,75 V die Leerlaufspannung (dies ist auch die Ursprung), der Schnittpunkt der Geraden 3 mit der Abszisse bei 10,2 A entspricht dem Kurzschlussstrom. Den Innenwiderstand bei Leistungsanpassung erhält man aus der Bestimmung des Anstieges der Geraden 2, die den Kurvenverlauf im Bereich  $U_o/2$  approximiert. Das eingezeichnete Anstiegsdreieck mit den Werten  $\Delta U = -2,25$  V und  $\Delta I = 4,5$  A hat den Anstieg von  $-0,5$  V/A, was laut Glg. 2.17 einen Innenwiderstand von  $0,5 \Omega$  ergibt.

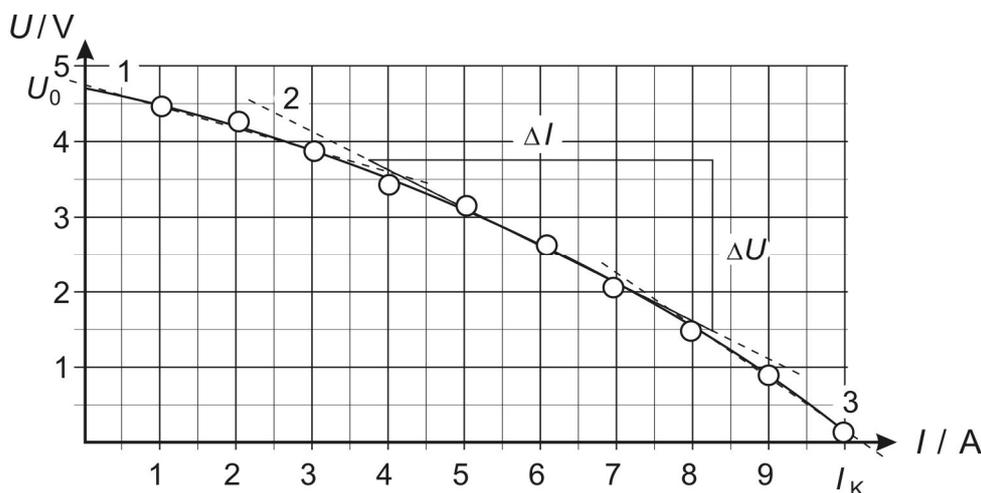


Abb. 2.12: Kennlinie einer Spannungsquelle

Die gestrichelte Linien 1, 2, 3 approximieren Bereiche der Kurve für die Lastfälle Leerlauf, Leistungsmaximum und Kurzschluss.

## 2.6. Arbeit und Leistung bei Gleichströmen

Elektrischer Stromfluss ist in der Regel verbunden mit der Umwandlung von Energie. Offensichtlich wird das z.B. an der Erwärmung eines stromdurchflossenen Leiters. Aus dem Stromkreis wird hierbei Energie in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben. Bei konstantem Strom wird diese Energie letztendlich von der Spannungsquelle geliefert, in welcher die Ladungen gegen die Ursprung auf ein höheres Potential gehoben werden. Der in der Elektrotechnik häufig verwendete Be-

griff der *Elektromotorischen Kraft EMK* für die Urspannung verdeutlicht diesen Vorgang bildhaft. Vom Pol der Spannungsquelle mit höherem Potential fließen die Ladungsträger über ein äußeres Netzwerk wieder zum Pol mit niedrigem Potential zurück. Da der Stromfluss stationär erfolgen soll, sind die Potentiale zeitlich konstant und die Verhältnisse entsprechen denen der Elektrostatik. Die von der Spannungsquelle mit der Spannung  $U$  an die Ladung  $Q$  abgegebene Energie ist laut 1.10 gerade gleich  $W = QU$ . Die während des Zeitintervalls  $t_2 - t_1$  geflossene Ladung ist gleich dem Integral des Stromes über die Zeit

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt, \quad (2.21)$$

bei konstantem Strom vereinfacht sich 2.21 zu  $\Delta Q = I \Delta t$ . In der Praxis wird gewöhnlich nicht die Ladung sondern der Strom gemessen. Die Umkehrung von 2.21 ergibt (s. 2.10)  $I = \frac{dQ}{dt}$ . Die von der EMK je Zeiteinheit verrichtete Arbeit wird in Analogie zur Mechanik als *elektrische Leistung* definiert

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U, \quad (2.22)$$

woraus man mit 2.21 die wichtige Formel zur Bestimmung der elektrischen Leistung erhält

elektrische Leistung  $P = UI$ ,  $[P] = \text{VA} = \text{W}$  (WATT<sup>23</sup>)

(2.23)

Diese Leistung wird durch die Spannungsquelle zugeführt und über die als Verbraucher agierenden Ohmschen Widerstände in Wärme umgewandelt, also abgegeben. Wenn man, wie es hierbei üblich ist, vom geänderten Vorzeichen absieht, findet 2.23 auch für die am Widerstand umgesetzte Leistung Anwendung. Maßgebend ist hier der *Spannungsabfall* am Widerstand. Mit dem Ohmschen Gesetz 2.9 erhält man

am Widerstand umgesetzte elektrische Leistung  $P = \frac{U^2}{R} = I^2 R$

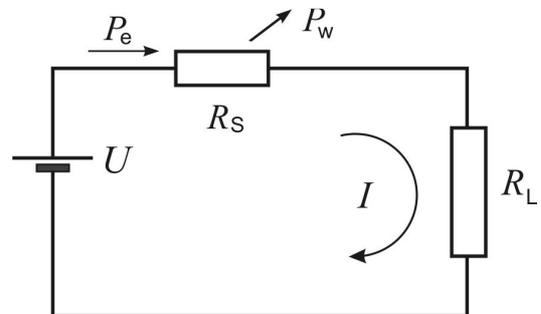
(2.24)

Die elektrische Leistung dient zur Definition der Spannung: Wenn durch einen Leiter ein Strom von 1A fließt und 1W Leistung (gleich 1Nm/s) umgesetzt wird, dann fällt im Leiter eine Spannung von 1V ab.

### Übungen

2.11. Erklären Sie die Wirkungsweise einer Schmelzsicherung.

*Lösung:* Die Schmelzsicherung stellt elektrisch einen kleinen Ohmschen Widerstand  $R_s$  dar (verglichen mit dem Lastwiderstand), der zum Lastwiderstand  $R_L$  in Reihe geschaltet ist. Durch den Stromfluss fällt an der Sicherung elektrische Leistung  $P_s$  an, die als Wärmeleistung zunächst den Widerstandsdraht in der Sicherung erwärmt, darüber hinaus die Sicherung selbst. Der Sicherungshalter führt die Wärme  $P_w$  an die Umgebung ab. Je nach Bauart der Sicherung unterschiedlich, wird hier ein sogenannter *Wärmewiderstand* wirksam. Letztendlich stellt sich ein Gleichgewicht zwischen zugeführter elektrischer Leistung und abgegebener Wärmeleistung ein, worauf sich die Temperatur des Widerstandsdrahtes nicht weiter erhöht. Übersteigt der Stromfluss dauerhaft einen



<sup>23</sup> James WATT (1736-1819), schott. Ing.; mod. Dampfmaschine, Pleuel; pVT-Untersuchungen an Wasserdampf

Grenzwert, wird dieses Gleichgewicht nicht erreicht, da der Draht vorher schmilzt, wodurch der Stromkreis unterbrochen wird.

Bei einer Serienschaltung addieren sich laut 2.10 die Einzelwiderstände, mit dem Ohmschen Gesetz 2.9 erhält man für den Strom

$$I = \frac{U}{R_S + R_L}.$$

Die an der Sicherung anfallende elektrische Leistung beträgt nach 2.24

$$P_S = \frac{U^2 R_S}{(R_S + R_L)^2}.$$

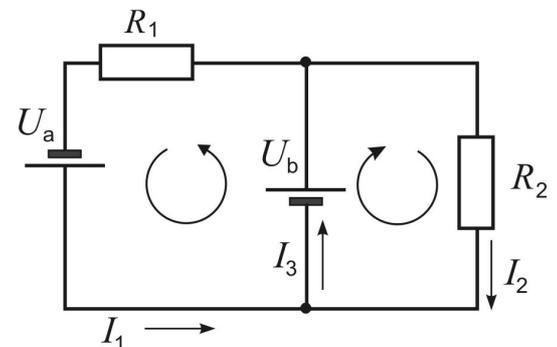
Da im Normalfall gilt  $R_S \ll R_L$  ergibt sich in guter Näherung

$$P_S \cong \frac{U^2 R_S}{R_L^2} = I^2 R_S.$$

Man erkennt sofort, dass bei einer Verkleinerung des Lastwiderstandes und entsprechender Zunahme des Stromes die an der Sicherung anfallende Leistung rasch anwächst. Bei einer Dauerüberlastung durch einen zu geringen Lastwiderstand bzw. bei Kurzschluss schützt somit die Sicherung die Schaltung sowie die Spannungsquelle vor Schäden.

**2.12.\*** Berechnen Sie für alle Bauelemente der nebenstehende Schaltung die elektrischen Leistungen.

Geg.:  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $U_a = 3 \text{ V}$ ,  $U_b = 4 \text{ V}$



*Lösung:* Unter Anwendung von Knoten- und Maschenregel erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 &= U_a + U_b, \\ R_2 I_2 &= U_b \end{aligned}$$

aus dem sich leicht die drei Ströme ergeben

$$I_1 = \frac{U_a + U_b}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_b}{R_2}, \quad I_3 = \frac{R_2(U_a + U_b) + R_1 U_b}{R_1 R_2}.$$

Die Leistung, die an den Widerständen abfällt, beträgt nach 2.24

$$P_1 = \frac{(U_a + U_b)^2}{R_1}, \quad P_2 = \frac{U_b^2}{R_2}.$$

Von beiden Spannungsquellen werden die Leistungen

$$P_a = \frac{(U_a + U_b)U_a}{R_1}, \quad P_b = \frac{R_2(U_a + U_b)U_b + R_1 U_b^2}{R_1 R_2}$$

entnommen. Mit den gegebenen Größen erhält man die Leistungen  $P_1 = 4,9 \text{ W}$ ,  $P_2 = 0,8 \text{ W}$ ,  $P_a = 2,1 \text{ W}$ ,  $P_b = 3,6 \text{ W}$ . Die Summe der von den Spannungsquellen gelieferten Leistung ist offensichtlich gleich der gesamten Verlustleistung an den Widerständen. Das sollte nicht überraschen, diese Betrachtung war ja Ausgangspunkt für die Ableitung der Maschenregel. Genauer betrachtet, haben beide Teilsummen unterschiedliches Vorzeichen: Ströme und Spannungen sind in den Widerständen stets parallel gerichtet, in den Spannungsquellen stets antiparallel. Die Summe über alle Leistungen ist somit gleich Null. Das ist typisch für ein abgeschlossenes System.

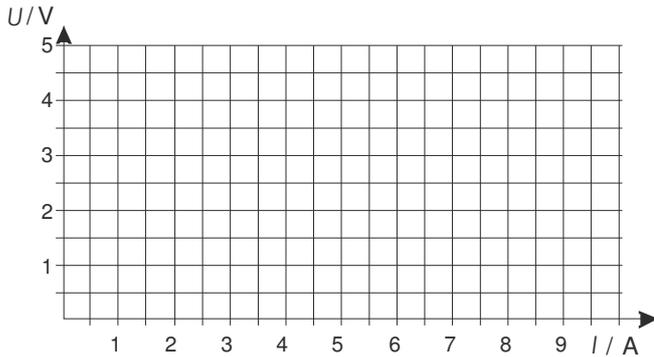
**2.13.** An die Klemmen einer Spannungsquelle wird ein variabler Lastwiderstand  $R_L$  angeschlossen. Strom  $I$  und Spannung  $U$  am Lastwiderstand werden für zwei verschiedene Werte von  $R_L$  gemessen.

a) Geben Sie eine Schaltung für diese Messung (mit Messgeräten) an, ersetzen Sie darin die reale Spannungsquelle durch eine solche mit der Ursprungung  $U_0$  und dem Innenwiderstand  $R_i$ !

b) Stellen Sie die Strom-Spannungs-Kennlinie als Funktion  $U(I)$  anhand der experimentellen Ergebnisse grafisch dar und entnehmen Sie hieraus die Ursprungung  $U_0$ , den Innenwiderstand  $R_i$  und den Kurzschlussstrom  $I_k$ !

c) Berechnen Sie  $U_0$ ,  $R_i$  und  $I_k$ !

d) Wie groß ist die maximal erreichbare Leistung  $P_L$ , die bei geeigneter Wahl von  $R_L$  am Lastwiderstand umgesetzt werden kann? Führen Sie hierzu eine formale Extremwertbetrachtung durch.



	Messung 1	Messung 2
$U$	3,5 V	500m V
$I$	2 A	8 A

## A 2 Die Cramersche Regel

### A2.1 Matrixschreibweise eines linearen Gleichungssystems

Wir gehen von der allgemein Gestalt eines linearen Gleichungssystems aus :

Gegeben seien  $m \cdot n$  (reelle oder komplexe) Zahlen  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ ) sowie  $m$  Zahlen  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Gesucht sind  $n$  Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so dass gilt

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Die Zahlen  $a_{ik}$  sind die Koeffizienten des Gleichungssystems, die gesuchten Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  werden auch als Unbekannte bezeichnet. Die Lösung des Gleichungssystems besteht in der Bestimmung der  $x_k$ .

Zur Illustration wollen wir das Gleichungssystem von Beispiel 2.4 betrachten:

$$\begin{array}{cccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U_1 - U_2 \\ & & -R_2 I_2 & + & R_3 I_3 & = & U_2 - U_3 \end{array}$$

Hier sind  $R_1, R_2, R_3$  die Koeffizienten  $a_{ik}$  und  $I_1, I_2, I_3$  stellen die Unbekannten  $x_k$  dar.

*Definition* : Ein rechteckiges Schema  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  von  $m \cdot n$  Zahlen  $a_{ij}$ , die in  $m$  Zeilen

und  $n$  Spalten angeordnet sind, heißt  $(m \times n)$ -*Matrix*. Die  $a_{ij}$  sind die Elemente der Matrix. Matrizen werden meist mit Großbuchstaben **A**, **B**, **C**,... bezeichnet.

Eine  $(1 \times n)$  - Matrix hat die Gestalt  $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ , man spricht von einem *Zeilenvektor*, eine

$(m \times 1)$ - Matrix hat die Gestalt  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ , man nennt diese auch *Spaltenvektor*.

Wir können Spalten- bzw. Zeilenvektoren in einer Matrix durch zusätzliche Klammern hervorheben. Für eine  $(2 \times 2)$ -Matrix erhalten wir  $\left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right)$  bzw.  $\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$ .

*Definition*: Sei  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) ein System linearer Gleichungen. Die  $(m \times n)$  - Matrix  $A = (a_{ij})$  heißt *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems.

Unser oben angegebenes Netzwerk hat z.B. die  $(3 \times 3)$  - Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}$ .

Für die Verknüpfung von Matrizen gibt es bestimmte Regeln. Uns interessiert das Produkt von Matrizen.

Sei  $A$  eine  $(m \times n)$  - Matrix ( $m$  Zeilen,  $n$  Spalten) mit den Elementen  $a_{ij}$  und  $B$  eine  $(n \times r)$  - Matrix mit den Elementen  $b_{kl}$ . Die Produktmatrix  $C = A \cdot B$  ist eine  $(m \times r)$  - Matrix mit den Elementen  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$  ( $1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq r$ ). Schreiben wir die einzelnen Elemente von  $C$  auf, erhalten wir

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jr} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{jr} \end{pmatrix}$$

Hieraus können wir eine Faustregel für die Matrizenmultiplikation erkennen: Zeile mal Spalte. Beachtet werden muss, dass i.a.  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , d. h. das Matrixprodukt ist nicht kommutativ.

Betrachten wir zur Übung einige Beispiele:

Seien  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  gegeben. Wir versuchen jetzt, alle möglichen

Produkte zu bilden.  $A$  ist eine  $(4 \times 2)$  - Matrix,  $B$  eine  $(3 \times 4)$ - und  $C$  eine  $(4 \times 1)$  - Matrix. Also sind nach der Regel zur Multiplikation von Matrizen (Spaltenzahl von  $A$  = Zeilenzahl von  $B$ ) nur die Kombinationen  $B \cdot C$  und  $B \cdot A$  erlaubt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Matrizenmultiplikation erlaubt uns jetzt eine rationelle Schreibweise für lineare Gleichungssysteme:

Sei  $A = (a_{ik})$  die Koeffizientenmatrix und  $X = (x_k)$  ein Spaltenvektor mit den Unbekannten als Matrixelemente.  $B$  sei ein Spaltenvektor, dessen Elemente  $b_k$  den 'rechten Teil' (die Konstanten) der Gleichungen enthalten. Dann gilt  $A \cdot X = B$ . Somit haben wir das Gleichungssystem durch eine einzige Gleichung ausgedrückt. In unserem Beispiel hat diese die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}.$$

## A2.2 Determinanten

Jeder quadratischen Matrix  $A$  (Zeilenzahl = Spaltenzahl) kann eine für die Lösung linearer Gleichungssysteme wichtige Größe zugeordnet werden, die Determinante  $\det A$ . Ohne Angabe der allgemeinen Definition der Determinante (das behandeln Sie in der Linearen Algebra) wollen wir zeigen, wie man diese berechnen kann. Der Wert einer zweireihigen Determinanten ergibt sich einfach aus der Differenz der Produkte der *Haupt-* und *Nebendiagonalelemente*. Eine dreireihige Determinante zu berechnen ist komplizierter. Es ergibt sich eine Summe aus 6 Produkten. Achtet man auf die Struktur der einzelnen Summanden (zyklische Vertauschung der Indizes), kann man sich auch noch diese Lösung merken (vergl. *SARRUSSche Regel*):

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1, \quad D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} u_1 \cdot (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \\ +u_2 \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) \\ +u_3 \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{matrix}$$

Noch größere Determinanten sollte man vor der expliziten Berechnung vereinfachen. Hierzu sind die für Determinanten charakteristischen Eigenschaften auszunutzen:

1. Die Determinante ist linear in jeder Zeile
  - a) man kann einen Faktor, der in allen Elementen einer Zeile auftritt, "herausziehen", d.h. als Faktor vor die Determinante schreiben;
  - b) lassen sich die Elemente einer Zeile als Summen darstellen, so lässt sich auch die Determinante als Summe darstellen, wobei alle anderen Zeilen ungeändert bleiben;

*Beispiel:*

- a) 
$$\begin{vmatrix} a \cdot u_1 & a \cdot u_2 & a \cdot u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$
- b) 
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + p_1 & v_2 + p_2 & v_3 + p_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2. Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen;
3. Durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten ändert sich die Determinante nicht;
4. Die Determinante ist gleich Null bei linearer Abhängigkeit ihrer Zeilen, d.h. speziell, wenn zwei Zeilen gleich sind (oder aus Nullen bestehen);
5. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem konstanten Faktor multiplizierten Elemente einer anderen Zeile addiert.
6. Eine Determinante lässt sich nach den Elementen einer Zeile oder Spalte *entwickeln*,  $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ . Die  $A_{ij}$  sind die sog. *Adjunkte* der Elemente  $a_{ij}$ , sie sind die mit einem Vorzeichen versehenen *Unterdeterminanten* der Ordnung  $(n-1)$ , die durch Streichen der Zeile  $i$  und der Spalte  $j$  aus der ursprünglichen entstehen. Diese wichtige Eigenschaft der Determinanten ermöglicht die sukzessive Rückführung auf einfachere Determinanten (niederer Ordnung)!

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Für die Determinante 3. Ordnung erhalten wir nach dieser Regel bei Entwicklung nach der

ersten Zeile:

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}, \text{ was mit dem}$$

oben angegebenen Ausdruck für die Determinante übereinstimmt, wenn man die 3 Unterdeterminanten explizit ausrechnet.

*Beispiel:* Die Determinante der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ist zu berechnen. Um es uns so

einfach wie möglich zu machen, wählen wir diejenige Zeile oder Spalte aus, die die meisten Nullen enthält und entwickeln nach dieser. Im betrachteten Fall ist es die zweite Zeile:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Beachten Sie, dass der erste Faktor  $(-1)$  vor der Unterdeterminante des ersten Summanden von der Vorzeichenregel  $(-1)^{i+j}$  herrührt, der zweite Faktor  $(-1)$  ist der Koeffizient  $a_{21}$  der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Unterdeterminanten dritter Ordnung lassen sich weiter aufspalten. Die erste dieser Determinanten berechnen wir durch Entwicklung nach der dritten Spalte und die zweite durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \left( 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = -56 + 11 - 14 + 15 = \underline{\underline{-44}}.$$

Jetzt wollen wir die Berechnung dieser Determinante noch einmal durchführen, wobei wir die ursprüngliche Struktur durch Umformen zunächst vereinfachen.

Wir addieren die letzte Spalte zur ersten:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  und subtrahieren die

zweite und dritte Spalte von der ersten:  $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-4)(8+3) = \underline{\underline{-44}}$

### A2.3 Die Cramersche Regel

**Satz:** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , wobei die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  quadratisch ist und es gilt  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Dann hat das Gleichungssystem die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ mit } x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

Dabei ist  $\mathbf{A}_i$  diejenige Matrix, die man erhält wenn man die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{A}$  durch  $\mathbf{B}$  ersetzt .

Wir ersehen aus der Cramerschen Regel, dass sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems auf die Berechnung von Determinanten reduzieren lässt. Dies soll an einfachen Beispielen geübt werden.

*Beispiele:*

Sie sollten zunächst versuchen, den Lösungsweg für das oben angegebene Beispiel **2.6.** nachzuvollziehen. Haben Sie dabei Schwierigkeiten, hilft Ihnen ein weiteres einfaches Beispiel.

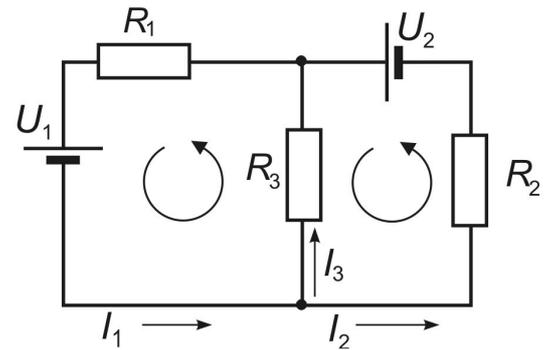
Wir wollen hierbei wieder die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen, das aus der Anwendung der Kirchhoffschen Regeln auf ein Netzwerk entstanden ist:

2.14.\* In der folgenden Schaltung sind die Werte von  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  gesucht.

$$\begin{aligned} U_1 &= 110\text{V} & R_1 &= 100\Omega \\ U_2 &= 220\text{V} & R_2 &= 100\Omega \\ & & R_3 &= 500\Omega \end{aligned}$$

Die Anwendung der Kirchhoffschen Regeln liefert

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 &+ R_3 I_3 = -U_1; \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= U_2 \end{aligned}$$



Das Gleichungssystem wird in Matrixschreibweise aufgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Determinante der Koeffizientenmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & R_3 \\ R_2 & -R_3 \end{vmatrix} - R_1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot (R_3 + R_2) = -R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2$$

Nun bestimmen wir die drei Matrizen  $A_i$ , indem wir die  $i$ -te Spalte der Koeffizientenmatrix durch den Spaltenvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$  ersetzen und berechnen dann deren Determinanten. Wir entwickeln die drei

Determinanten jeweils nach der ersten Zeile

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -U_1 & 0 & R_3 \\ U_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -U_1 & R_3 \\ U_2 & -R_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -U_1 & 0 \\ U_2 & R_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 + U_1 \cdot R_2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -U_1 & R_3 \\ 0 & U_2 & -R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -U_1 & R_3 \\ U_2 & -R_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_1 & -U_1 \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_1$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & -U_1 \\ 0 & R_2 & U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -U_1 \\ R_2 & U_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 & -U_1 \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = U_1 \cdot R_2 + U_2 \cdot R_1$$

und können jetzt nach der Cramerschen Regel die Lösungen des Gleichungssystems angeben:

$$I_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 + U_1 \cdot R_2}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110\text{V} \cdot 500\Omega - 220\text{V} \cdot 500\Omega + 110\text{V} \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{0.4\text{A}}}$$

$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{U_1 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_3 - U_2 \cdot R_1}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110\text{V} \cdot 500\Omega - 220\text{V} \cdot 500\Omega - 220\text{V} \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{0.7\text{A}}}$$

$$I_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{U_1 \cdot R_2 + U_2 \cdot R_1}{-R_3 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_2} = \frac{110\text{V} \cdot 100\Omega + 220\text{V} \cdot 100\Omega}{-500\Omega \cdot 100\Omega - 100\Omega \cdot 500\Omega - 100\Omega \cdot 100\Omega} = \underline{\underline{-0.3\text{A}}}$$

Das Minuszeichen von  $I_3$  zeigt, dass die Richtung des Stromes  $I_3$  entgegengesetzt zur willkürlich gewählten Stromrichtung verläuft.

### 3. Das Magnetfeld

#### 3.1. Das statische Feld eines Permanentmagneten

Magnetische Kraftwirkungen sind seit langem bekannt, so die Anziehungskräfte zwischen Eisen und bestimmten Steinen, wie Magnetit (31,03% FeO, 68,97% Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) und Magnetkies (Fe<sub>1-x</sub>S mit x = 0 bis 0,17). Eine erste praktische Nutzung der Eigenart, dass sich drehbar gelagerten Magneten selbstständig in die Nord-Süd-Richtung der Erde ausrichten, ist aus China im 4. Jh. bekannt (Orientierungshilfe bei Landreisen). In Europa wurde der Kompass im 13. Jhdt. eingeführt. PEREGRINUS<sup>24</sup> erkannte, dass magnetische Körper stets zwei Pole besitzen. Bei geeigneter Lagerung dreht sich der eine Pol nach Norden, der andere nach Süden. Der Magnet erfährt im Magnetfeld der Erde ein Drehmoment, welches von der gegenseitigen Orientierung abhängt. Genauer untersucht wurden Kompass und Magnetfeld für die Belange der englischen Seefahrt im 16. Jh. von GILBERT. Als viel später OERSTEDT<sup>25</sup> entdeckte, dass Magnetfelder auch durch elektrische Ströme verursacht werden können, wurde die Untersuchung des Magnetismus zu einem Hauptgegenstand von Naturforschern, Physikern und Technikern.

Bringt man zwei magnetische Körper in unmittelbare Nachbarschaft, bemerkt man Wechselwirkungen, die Analogien zu elektrischen Dipolladungen aufweisen.

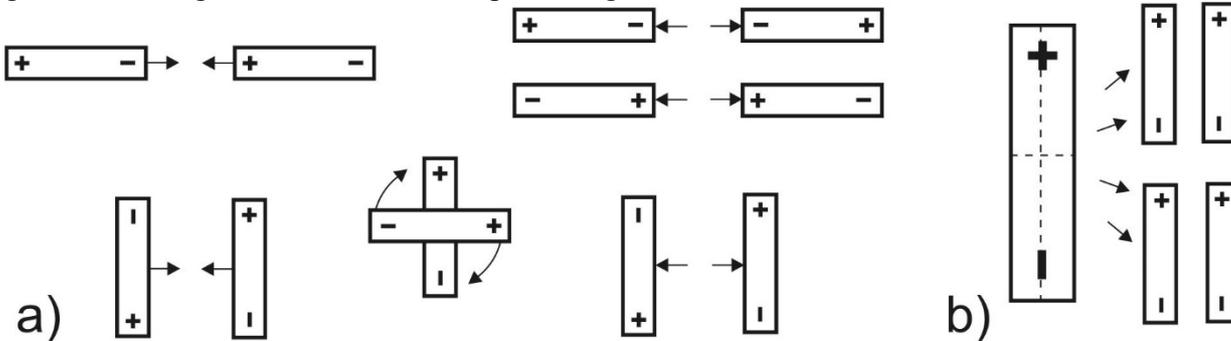


Abb. 3.1a) Wechselwirkung zwischen Dipolen b) Teilung von magnetischen Dipolen

Ähnlich wie elektrische Dipole üben benachbarte Magnete je nach ihrer Orientierung anziehende und abstoßende Kräfte sowie Drehmomente aufeinander aus. Da diese Eigenschaft gerichtet ist und den Raum um einen Magneten erfüllt, handelt es sich um ein Vektorfeld. Im Unterschied zu elektrischen Dipolen bewahren magnetische Dipole nach einer mechanischen Teilung stets ihren Dipolcharakter!

Ebenso wie bei elektrischen Ladungen addieren sich die Felder mehrerer Magneten. Wenn man einen Magneten teilt, reproduziert sich jedoch der Dipolcharakter, es entstehen zwei weitere Dipole. Letztendlich musste man erkennen, dass selbst Elementarteilchen wie Elektron, Proton und Neutron Miniaturmagnete darstellen, magnetische "Monopole" konnten trotz intensiver Suche bisher nicht beobachtet werden.

Das Drehmoment, welches ein Magnet im Feld eines anderen Magneten erfährt, erklärt das Prinzip eines Magnetkompasses. Die Erde ist nämlich von einem Magnetfeld umgeben, so, als enthielte sie im Innern einen gewaltigen Stabmagneten in Richtung ihrer Rotationsachse. Ein drehbar gelagerter Magnet zeigt deshalb auf der Erdoberfläche stets in die gleiche Richtung. Dasjenige Ende eines solchen Stabmagneten, der in Richtung geografischer Nordpol der Erde zeigt, wird deshalb als sein magnetischer Nordpol bezeichnet, das andere Ende als magnetischer Südpol. Da dieses in Richtung Südpol der Erde zeigt, befindet sich dort der magnetische Nordpol der Erde. Aus diesem Grund bezeichnet man beide Pole des Magneten mit "N" bzw. "S" und nicht mit "+" und "-" wie bei den elektrischen Ladungen. Erwähnt werden muss hier, dass die Ausrichtung der Magnetpole der Erde nicht genau mit der Erdachse übereinstimmt und darüber hinaus zeitlichen Schwankungen unterliegt. So praktisch die Einführung der Vorzeichen bei elektrischen Ladungen ist, so wenig stört der Verzicht hierauf beim Magneten. Die Bezeichnung mit Nord- und Südpol gibt nur eine Qualität an. Da man

<sup>24</sup> Petrus PEREGRINUS, frz. Gelehrter um 1269

<sup>25</sup> Hans Christian OERSTEDT (1777-1851), dän. Physiker und Chemiker; Elektromagnetismus; Kompression von Wasser

die Magnetpole nicht voneinander isolieren kann, gibt es auch keine Quantität von magnetischen Ladungen, wohl aber die des magnetischen Dipols.

Die Stärke und Ausrichtung eines Magneten wird durch sein Dipolmoment<sup>26</sup>  $\vec{m}_C$  dargestellt, das Magnetfeld selbst durch die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ . Eine Kompassnadel ist als Probemagnet geeignet, Betrag und Richtung der Feldstärke zu messen. Für das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld gilt nämlich (vergl. 1.2b)

$$\vec{M} = \vec{m}_C \times \vec{H}, \quad [\vec{m}_C] = \text{Vs m}, \quad [\vec{H}] = \text{A m}^{-1} \quad (3.1)$$

und für dessen Betrag  $M = m_C H \sin\alpha$ , wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{m}_C$  und  $\vec{H}$  ist. Wenn die Magnetnadel ausgependelt ist, zeigt sie folglich die Richtung von  $\vec{H}$  an, verdreht man sie darauf senkrecht, ist das rückdrehende Moment maximal und kann mit einer Torsionsfeder gemessen werden. Jedem Punkt im Raum, welcher von einem Magnetfeld durchsetzt wird, kann somit der Wert von  $\vec{H}$  in Betrag und Richtung zugeordnet werden.

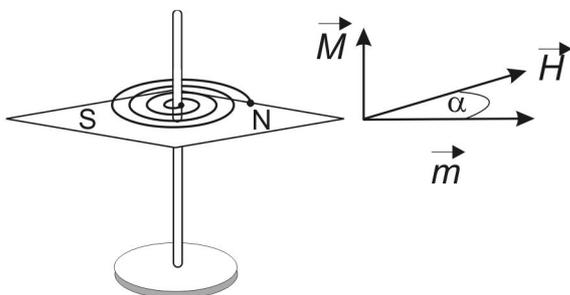


Abb. 3.2 Kompassnadel im Magnetfeld  
Ein Körper mit dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{m}_C$  erfährt im Magnetfeld  $\vec{H}$  ein Drehmoment  $\vec{M}$ . In Ruhelage zeigt der Nordpol des Permanentmagneten in Richtung des Magnetfeldes. Bei senkrechter Ausrichtung ist das Drehmoment maximal. Mit einer solchen Anordnung eines Probemagneten lässt sich somit das Magnetfeld in Betrag und Richtung messen.

Verschiebt man eine eingestellte Kompassnadel in Richtung N, folgt man damit einer magnetischen Feldlinie. Die Feldlinien quellen aus dem magnetischen Nordpol und enden im Südpol. Ganz analog zum elektrostatischen Feld ist das Magnetfeld eines Permanentmagneten ein Quellenfeld.

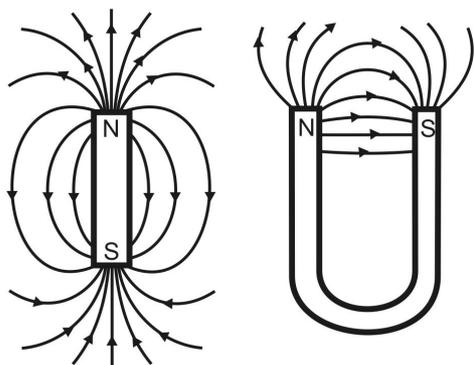


Abb. 3.3 Feldlinien von Permanentmagneten  
Die magnetischen Feldlinien verlaufen vom Nord- zum Südpol des Magneten. Das magnetische Feld eines Permanentmagneten ist analog zum elektrostatischen Feld ein wirbelfreies Quellenfeld.

Ähnlich wie das elektrostatische Feld ist auch das Magnetfeld um einen Permanentmagneten ein konservatives Feld, es gilt die Beziehung

$$\oint \vec{H}(\vec{s}) d\vec{s} = \oint H(s) \cos \alpha(s) ds = 0. \quad (3.2)$$

Hier stellt  $d\vec{s}$  einen infinitesimalen Verschiebungsvektor dar, welcher skalar mit dem Magnetfeldvektor  $\vec{H}$  zu multiplizieren ist;  $\alpha$  ist der Winkel zwischen beiden Vektoren. Wählt man den Integrationsweg so, dass er durch beide Magnetpole verläuft, wobei ein Teilweg außerhalb, der andere durch den Magneten führt, fordert (3.2), dass auch innerhalb des Magneten ein  $H$ -Feld vorhanden ist. Da bei einem Stabmagneten der äußere Weg länger ist als der innere, sollte das innere Feld stärker sein als das äußere.

<sup>26</sup> Wegen seiner Analogie zum elektrischen Dipolmoment bezeichnet man  $m_C$  auch als Coulombsches magnetisches Moment.

### 3.2. Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter

Fließt elektrischer Strom durch einen Leiter, kann man ähnliche Beobachtungen machen wie bei einem Permanentmagneten. Der Stromfluss erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien mit einem Probepol untersucht werden können. Im Fall eines langen geraden Leiters umgeben die Magnetfeldlinien als konzentrische Kreise den Leiter, s. Abb. 3.4. Da die Feldlinien geschlossen sind, handelt es sich hierbei aber um ein *Wirbelfeld*. Die Richtung der Feldlinien lässt sich leicht nach der *Rechte Hand Regel* ermitteln. Wenn man die rechte Hand so ausrichtet, dass der Daumen in Stromrichtung zeigt, umschließen die Finger den Leiter in Richtung der Feldlinien.

Es soll jetzt geprüft werden, ob die Anwendung der Gleichung 3.2 bei einem durch Stromfluss hervorgerufenen Magnetfeld ein sinnvolles Ergebnis liefert. Hierbei wird zur Integration ein Weg gewählt, der aus zwei konzentrischen Kreisbögen mit den Radien  $R_i$  und  $R_a$  sowie dem gleichen Öffnungswinkel  $\alpha$  besteht. Es ist zweckmäßig, die Integration um einen solchen Kreisringsektor in 4 Abschnitte aufzuteilen

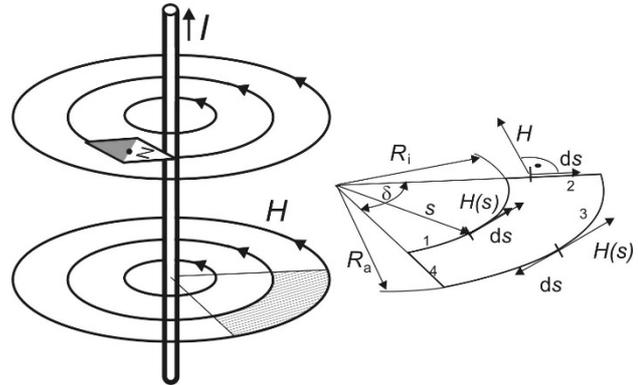
$$\oint H \cos \alpha \, ds = \int_1 H \cos \alpha_1 \, ds + \int_2 H \cos \alpha_2 \, ds + \int_3 H \cos \alpha_3 \, ds + \int_4 H \cos \alpha_4 \, ds. \quad (3.3)$$

Sofort wird ersichtlich, dass das Skalarprodukt auf den Teilstrecken 2 und 4 keinen Beitrag liefert, da Verschiebung und Magnetfeld senkrecht zueinander orientiert sind. Auf den Teilstrecken 1 und 3 beträgt der Winkel zwischen Verschiebung und Magnetfeld  $0^\circ$  sowie  $180^\circ$ , es folgt

$$\oint H(s) \cos \alpha \, ds = \int_1 H(R_i) \, ds - \int_3 H(R_a) \, ds. \quad (3.4)$$

Abb. 3.4 Magnetfeld um einen geraden stromdurchflossenen Leiter.

Die Feldlinien sind konzentrische Kreise um den Leiter. Mit einer Kompassnadel lässt sich die Richtung der Feldlinien bestimmen. Die schraffiert dargestellte Fläche eines Kreisringsektors mit einem Öffnungswinkel  $\delta$ , deren Begrenzung den Integrationsweg bildet, ist daneben vergrößert dargestellt. Der Integrationsweg besteht aus Teilstücken mit  $\vec{H}(\vec{s}) \perp \vec{s}$  sowie  $\vec{H}(\vec{s}) \parallel \vec{s}$ .



Hier ist zu bemerken, dass der Betrag des Magnetfeldes aus Gründen der Zylindersymmetrie der Anordnung nur vom Abstand zum Draht abhängt, nicht jedoch von der Integrationsvariablen  $s$ . Somit ist das Feld bezüglich  $s$  konstant und kann vor das Integral geschrieben werden. Die verbleibenden Integrale entsprechen den Längen der beiden Kreisbögen

$$\oint H \cos \alpha \, ds = H(R_i) R_i \delta - H(R_a) R_a \delta = 0. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung kann nur für eine Abhängigkeit  $H(R) \propto \frac{1}{R}$  erfüllt werden. Weiterhin muss gelten

$H \propto I$ . Als Proportionalitätskonstante wählt man den Vollkreiswinkel  $2\pi$ , so dass für den Betrag des Magnetfeldes um einen vom Strom  $I$  durchflossenen unendlich langen Leiter gilt

Magnetfeld um einen langen geraden Leiter  $H = \frac{I}{2\pi R}, \quad [H] = \frac{A}{m}$

(3.6)

Im Folgenden soll der Integrationsweg den Leiter umschließen. Aus Symmetriegründen wird ein zum Draht senkrechter Kreis gewählt. Durchstößt der Draht dessen Mittelpunkt, folgt bei einem rechten Umlauf der Integrationsweg einer Feldlinie. Eine differentielle Verschiebung  $d\vec{s}$  hat dann stets die gleiche Richtung wie der Feldvektor  $\vec{H}(\vec{s})$ . Somit ist das Skalarprodukt beider Vektoren gleich dem

Produkt ihrer Beträge. Beachtet man, dass aus Symmetriegründen der Betrag des Magnetfeldes nur vom Radius  $R$  des Kreises abhängt, nicht aber von der Integrationsvariablen  $s$ , folgt

$$\oint \vec{H} \, d\vec{s} = \oint H \cos \alpha \, ds = H(R) \oint ds = 2\pi R H(R). \tag{3.7}$$

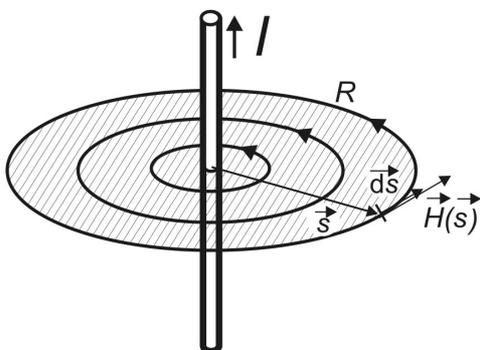


Abb. 3.5 Magnetfeld um einen geraden stromdurchflossenen Leiter

Der Integrationsweg ist ein Kreis vom Radius  $R$ , dessen Fläche hier schraffiert ist. Bei rechtem Umlauf haben infinitesimaler Verschiebungsvektor  $d\vec{s}$  und Feldvektor  $\vec{H}(\vec{s})$  die gleiche Richtung. Der Strom  $I$  fließt senkrecht zur Kreisfläche durch deren Mittelpunkt.

Benutzt man die Beziehung 3.6, erhält man die verblüffend einfache Gleichung

$$\oint \vec{H} \, d\vec{s} = \oint H \, ds \cos \alpha = \oint H_{\parallel} \, ds = I. \tag{3.8}$$

Die hier aufgezeigte Betrachtung lässt sich noch allgemeiner durchführen. Möge der Stromfluss nicht durch einen dünnen Draht erfolgen, sondern ein Raum von bewegten Ladungsträger durchsetzt sein, die sich mit der mittleren Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen. Die Ladung je Raumvolumen bezeichnet man als *Ladungsdichte*  $\rho$ . Der *Stromdichtevektor*  $\vec{j}$  ergibt sich damit zu

$$\boxed{\text{Stromdichtevektor } \vec{j} = \rho \vec{v}. \tag{3.9}}$$

Das Skalarprodukt eines Flächenelementes  $d\vec{A}$  mit dem Stromdichtevektor gibt an, welche Ladung pro Zeiteinheit durch diese Fläche fließt (vergl. 2.5)

$$dI = \vec{j} \, d\vec{A}. \tag{3.10}$$

Integriert man (3.10) über eine Fläche, erhält man den Strom durch diese. Wenn die Integrationsfläche durch den Querschnitt eines Drahtes gebildet wird, handelt es sich um den Strom  $I$  durch den Draht. Mit Hilfe des Stromdichtevektors lassen sich auch räumlich ausgedehnte Bewegungen von Ladungsträgern beschreiben. Insbesondere gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Amperesches Gesetz oder Durchflutungsgesetz } \oint \vec{H} \, d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} = I \\ \text{in skalarer Form } \oint H_{\parallel} \, ds = \iint_A j_{\parallel} \, dA = I \end{array}. \tag{3.11a}}$$

Das Durchflutungsgesetz ist ein weiteres *Grundgesetz* der Elektrodynamik und gilt ganz allgemein:

*Das Integral des Magnetfeldes über einen geschlossenen Weg ist gleich dem Gesamtstrom durch die vom Weg umschlossene Fläche.*

Dabei gibt es keinerlei Einschränkungen bezüglich Strukturen des Feldes sowie der Fläche und ihrer Begrenzung! Für den Spezialfall konstanter Stromdichte für den Bereich der stromdurchflossenen Fläche gilt die skalare Form des Durchflutungsgesetzes:

$$\oint H \cos \alpha \, ds = \oint H_{\parallel} \, ds = j \cdot A_n = I. \tag{3.11b}$$

Hierbei beschreibt  $A_n$  die senkrechte Flächenprojektion auf die Stromrichtung.

**Übungen**

**3.1.** Durch einen unendlich langen geraden Leiter fließt ein Strom von 6 A. Wie groß ist das Magnetfeld in einem Punkt, der 2,5 cm von ihm entfernt ist?

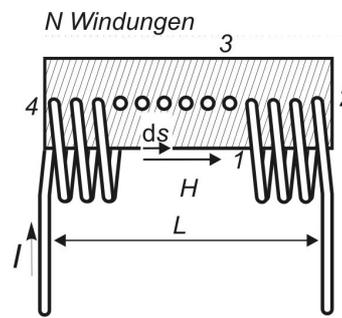
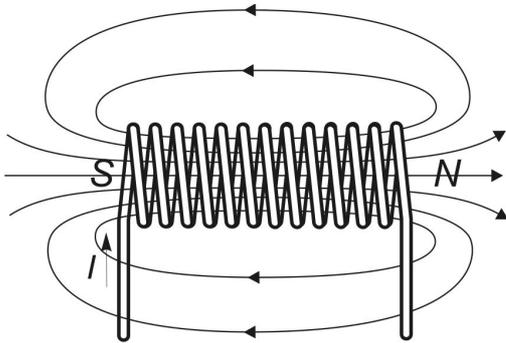
**3.2.** Durch zwei parallele unendlich lange gerade Leiter im Abstand von 10 cm fließen in entgegengesetzten Richtungen Ströme von  $I_1 = 15 \text{ A}$  und  $I_2 = 25 \text{ A}$ . Wie groß ist das Magnetfeld in einem Punkt in der von beiden Leitern aufgespannten Ebene, der a) von beiden Leitern gleich weit entfernt ist, b) 2 cm von Leiter 1 und 8 cm von Leiter 2 entfernt ist, c) In welchen Punkten ist die magnetische Feldstärke gleich Null?

**3.3.\*** Berechnen Sie unter Anwendung des Durchflutungsgesetzes das Magnetfeld im Innern einer aus Draht mit  $N$  Windungen gewickelten langen und dünnen Spule.

*Lösung:* Auf der Abbildung 3.6 ist links der Verlauf der Feldlinien skizziert. Da diese bei der gewählten Stromrichtung sowie dem Wickelsinn der Spule nach rechts aus der Spule austreten, wirkt diese nach außen wie ein Stabmagnet mit dem Nordpol rechts und dem Südpol links. Auf der rechten Abbildung umschreibt der Integrationsweg die schraffierte Rechteckfläche, bei der eine Seite durch die Mitte der gleich langen Spule verläuft, wobei alle Drahtwindungen jeweils einmal die Fläche durchdringen.

Abb. 3.6  
um eine  
strom-

sene Spule  
Der  
weg bei der  
des Durch-  
setzes



Magnetfeld  
lange

durchflos-

Integrations-  
Anwendung

flutungsgesetz  
verläuft  
zweckmäßig

innerhalb der Spule entlang einer Feldlinie. Außerhalb der Spule ist er willkürlich, im aktuellen Beispiel bildet er ein Rechteck. Das Umlaufintegral liefert unterschiedliche Beiträge je differentieller Verschiebung  $ds$ . Innerhalb der Spule (Wegabschnitt 1) ist das Feld sehr stark und in guter Näherung homogen. Außerdem sind Verschiebungsvektor und Feldstärke parallel zueinander. Auf den Abschnitten 2 und 4 erfolgt die Verschiebung annähernd senkrecht zu den Feldlinien, so dass das Skalarprodukt sehr kleine Beiträge liefert. Auf dem äußeren Abschnitt 3 ist das Feld sehr gering. Bei einer Spule, deren Länge  $L$  groß ist gegen den Durchmesser  $d$  ("lange" Spule), kann man in vertretbarer Näherung die Beiträge des Integrationsweges außerhalb der Spule vernachlässigen.

$$\oint H \cos \alpha \, ds = \int_1 H_1 \cos \alpha_1 \, ds + \int_2 H_2 \cos \alpha_2 \, ds + \int_3 H_3 \cos \alpha_3 \, ds + \int_4 H_4 \cos \alpha_4 \, ds \cong \int_1 H \, ds = H \cdot L. \quad (3.12)$$

Hierbei ist bereits die weitgehende Parallelität der Feldlinien innerhalb der Spule und damit Konstanz des Magnetfeldes über den inneren Integrationsweg berücksichtigt. Das Integral des Stromdichtevektors über die vom Integrationsweg umschlossene Fläche liefert Beiträge nur an den Stellen, an denen der Leiter durch die Fläche verläuft, bei  $N$  Windungen ist dies der Gesamtstrom  $N \cdot I$ . Somit folgt aus (3.11) und (3.12)

Feldstärke im Innern einer langen Spule	$H = \frac{NI}{L}$	(3.13a)
---	--------------------	---------

Die Formel (3.13a) ist natürlich nur eine Näherung, die bei kurzen und dicken Spulen versagt. Eine genauere Berechnung unter Berücksichtigung einer beliebigen Leiteranordnung ermöglicht das differentielle Herangehen von BIOT<sup>27</sup> und SAVART<sup>28</sup>. Nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz berechnet sich der Beitrag  $d\vec{H}$  eines kleinen Leiterstücks  $d\vec{l}$ , das vom Strom  $I$  durchflossen wird, nach

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}), \quad (3.14)$$

wobei  $\vec{r}$  der Ortsvektor vom Leiterstück zu dem Raumpunkt P ist, an welchem das Magnetfeld bestimmt werden soll. Man muss lediglich über die Beiträge  $d\vec{H}$  aller Leiterstücke integrieren. In nur wenigen Fällen ist das analytisch möglich. Eine solch ganz einfache Aufgabe ist die Bestimmung des Magnetfeldes im Mittelpunkt einer Kreisschleife. Die Abstände sind nämlich alle gleich dem Kreisradius  $R$  und die Winkel zwischen  $d\vec{l}$  und  $\vec{r}$  sind alle gleich  $90^\circ$ . Somit reduziert sich (3.14) auf  $dH = I dl / (4\pi R^2)$ . Das Leiterstück  $dl$ , integriert über den gesamten Kreis, liefert lediglich den Kreisumfang. Das Magnetfeld ist senkrecht zum Kreis ausgerichtet und vom Betrag

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (3.15)$$

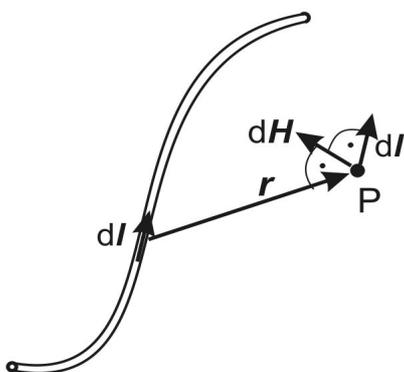


Abb. 3.7 Zum Biot-Savart-Gesetz

Jedes vom Strom  $I$  durchflossene Leiterstück  $d\vec{l}$  liefert laut (3.14) einen kleinen Beitrag  $d\vec{H}$  zum Magnetfeld  $\vec{H}$  am Punkt P. Über solche Beiträge aller Leiterstücke (genau genommen die des gesamten Stromkreises) ist zu integrieren.

Wenn man  $N$  Windungen zu einer sehr kurzen Spule ( $L \ll d$ ) aufwickelt, erhält man für deren Mitte

$$H = \frac{NI}{2R}. \quad (3.16)$$

Für die lange Spule ist eine genaue analytische Rechnung nach Biot-Savart auch möglich und liefert für deren Mittelpunkt

$$H = \frac{NI}{L\sqrt{1 + d^2/L^2}} \quad (3.13b)$$

und für einen Punkt auf der Spulenachse am Ende der Spule

$$H = \frac{NI}{2L\sqrt{1 + d^2/L^2}} \quad (3.13c)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass für  $d \ll L$  der Ausdruck (3.13a) eine gute Näherung an (3.13b) darstellt, während aus (3.13c) hervorgeht, dass in diesem Fall das Magnetfeld am Spulenende nur etwa den halben Wert von (3.13a) erreicht!

Gut zu wissen, dass auch für beliebig komplizierte Leiteranordnungen sehr genaue Rechnungen nach (3.14) leicht mit dem Computer durchführbar sind.

### 3.3. Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

<sup>27</sup>Jean-Baptiste BIOT (1774-1862), frz. Physiker; Ballonaufstieg zur Messung des Erdmagnetfeldes; Magnetismus der Ströme; Akustik; Polarisiertes Licht

<sup>28</sup>Felix SAVART (1791-1841), frz. Physiker und Arzt; Akustik, Optik, Elektromagnetismus

Bewegt man Ladungen in Magnetfeldern, so beobachtet man eine an der Ladung angreifende Kraft, die LORENTZ<sup>29</sup>kraft, welche stets senkrecht sowohl zur Bewegung als auch zum Feld gerichtet ist. Da Teilchengeschwindigkeit  $\vec{v}$  und Magnetfeld  $\vec{H}$  Vektoren sind, liefert ein Vektorprodukt beider Größen just einen solchen senkrechten Vektor, der auch noch zu den Beträgen  $v$  und  $H$  proportional ist. Weiterhin ist die Lorentzkraft proportional zur bewegten Ladung. Somit gilt

$$\vec{F}_L = Q\mu_r\mu_0[\vec{v} \times \vec{H}], \quad (3.17)$$

mit den Konstanten  $\mu_r$  und  $\mu_0$ . Hierbei heißt der Proportionalitätsfaktor  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am *magnetische Feldkonstante* oder *Induktionskonstante*. Eine weitere dimensionslose Konstante, die *relative Permeabilität* oder *Permeabilitätszahl*  $\mu_r$  hängt vom Material ab, im Vakuum ist  $\mu_r=1$ .

<i>magnetische Flußdichte</i> oder <i>Induktion</i> $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$ $[\vec{B}] = \frac{1\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1\text{T (Tesla)}$	(3.18)
---	--------

Die nach dem kroatischen Physiker TESLA<sup>30</sup> benannte Maßeinheit Tesla stellt eine recht große Einheit dar. In der Technik werden Felder bis zu einigen T angewendet, auch in Forschungslabors nur wenig mehr. Andererseits werden Gehirnströme über deren Magnetfelder detektiert mit Werten im Bereich von nT. Eine veraltete Einheit der magnetischen Induktion ist das *Gauss* (1 G = 10<sup>-4</sup> T). Mit der Flussdichte lautet die Formel 3.17

<i>Lorentzkraft</i> $\vec{F}_L = Q[\vec{v} \times \vec{B}]$ $F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$	(3.19)
--	--------

Der Vorteil dieser Form liegt darin, dass man ganz analog zur Definition der elektrischen Feldstärke als Quotienten aus elektrostatischer Kraft und Ladung die magnetische Flussdichte als Quotienten aus magnetischer Kraft (Lorentzkraft) und dem Produkt  $Qv$  definieren kann.

Die Lorentzkraft lässt sich über eine relativistische Rechnung aus der elektrischen Kraft zwischen ruhenden Ladungen ableiten. Betrachten wir hierzu einen geraden Leiter. Da dieser elektrisch neutral ist, gibt es im stromlosen Leiter neben der Kette von Leitungselektronen mit der linearen Ladungsdichte  $-\lambda^-$  eine betragsmäßig gleiche positive Ladungsdichte  $+\lambda^+$  von unbeweglichen Ionen. Bei Stromfluss ist die Driftgeschwindigkeit  $v_d$  der Elektronen der Stromrichtung  $I$  entgegengesetzt gerichtet und beträgt je nach Elektronendichte und Stromstärke einige mm/s. Wird eine positive Ladung  $Q$  parallel zum Leiter in Stromrichtung mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, erfährt diese eine zum Leiter hin gerichtete Kraft  $F$ , s. Abb.3.8a. Von einem mit der Geschwindigkeit  $v$  der Ladung  $Q$  mitbewegten Beobachter betrachtet, bewegen sich die Ionen mit der Geschwindigkeit  $v$  und die Elektronen mit der etwas größeren Geschwindigkeit  $v_d$  in die negative  $x'$ -Richtung. Nun gilt für Längen, die von einem bewegten Beobachter registriert werden, die *Lorentzkontraktion*, eine Folgerung aus der Forderung nach Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit, welche die Grundlage für EINSTEIN<sup>31</sup>s *Spezielle Relativitätstheorie* bildet. Eine Länge  $l$ , gemessen im ruhenden Bezugssystem, nimmt im mit  $v_0$  bewegten System den Wert  $l' = l / \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}$  an ( $c$ -Lichtgeschwindigkeit). Da die Relativgeschwindigkeit der Elektronen im betrachteten Beispiel größer ist als die der positiven

<sup>29</sup> Hendrik Anton LORENTZ (1853-1928), holl. Theoret. Physiker; Kin. Gastheorie; Lorentz-Transformation (bewegte Bezugssysteme); Lorentzkraft in der Elektrodynamik

<sup>30</sup> Nikola TESLA (1856-1943) serb. Physiker, ab 84 Mitarbeiter von Edison in USA; Drehstromtechnik; Hochfrequenzströme (Tesla-Transformator)

<sup>31</sup> Albert EINSTEIN (1879-1955) dt. Physiker, sicher der bedeutendste Physiker des 20. Jhdts. 1902-9 Ing. Patentamt Bern, danach Prof. in Zürich, Prag, 13 Direktor am Kaiser-Wilhelm Institut Berlin, 33 nach Princeton ausgewandert, Warnung vor dt. Atombombe, polit. Eng.; Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie; Photoeffekt (1921 Nobelpreis); Lichtemission (Laserprinzip); Diffusion; Kosmologie

Ionen, ergibt sich für die Elektronen eine größere Lorentzkontraktion als für die Ionen. Das bedeutet, dass der Abstand aufeinanderfolgender Elektronen kleiner ist, als derjenige der Ionen s. Abb.3.8b. Folglich wird vom bewegten Bezugssystem aus  $\lambda^{-'} > \lambda^{+'}$  gemessen, die Ladung des Leiters ist somit negativ und die Ladung  $Q$  wird elektrostatisch angezogen.

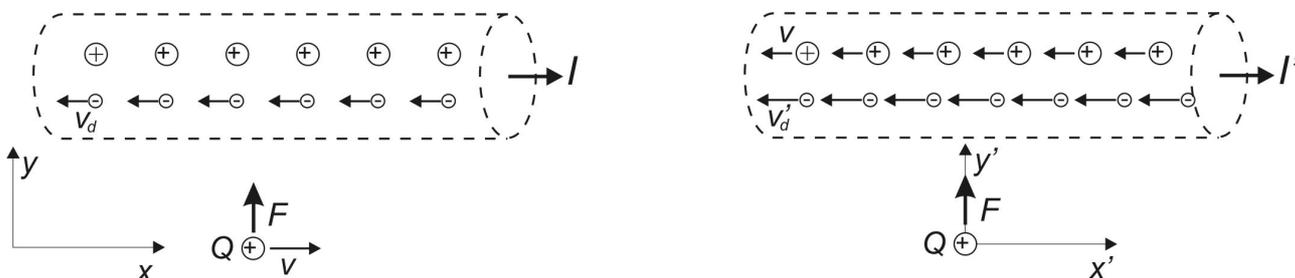


Abb. 3.8 Bewegte Ladung neben einem stromdurchflossenen Leiter  
 Betrachtet a) vom ruhenden Bezugssystem b) vom mitbewegten Bezugssystem

Eine quantitative Betrachtung (s. z.B. "Physik" von Jay Orear, Hanser-Verlag 1982) führt zur Beziehung 3.19. Der sich hier offenbarende tiefe innere Zusammenhang von elektrischen und magnetischen Erscheinungen mag zunächst verblüffen, er findet seinen Ausdruck auch in Konstanten, mit denen physikalischen Gesetzen eine gefälligere Form gegeben wird. So gilt für die Lichtgeschwindigkeit im Medium mit  $\mu_r, \epsilon_r$

$$c'^2 = 1 / \mu_r \eta_0 \epsilon_r \epsilon_0 \tag{3.20}$$

Für die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist  $\mu_r = \epsilon_r = 1$  und folglich  $c^2 = 1 / \eta_0 \epsilon_0$ , wovon man sich leicht überzeugen kann.

Wenn sich eine Ladung bewegt, erfährt sie sowohl eine elektrostatische Kraft als auch eine magnetische Kraft. Somit lautet der Ausdruck für die elektrische Gesamtkraft oder elektromagnetische Kraft

$$\boxed{\text{elektromagnetische Kraft} \quad \vec{F} = Q \vec{E} + Q[\vec{v} \times \vec{B}]} \tag{3.21}$$

**Übungen**

3.4. Bestimmen Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte im Innern der folgenden „langen“ Spulen:

- a)  $n = 340, l = 0,7 \text{ m}$  und  $I = 3 \text{ A}$
- b)  $n = 8550, l = 52 \text{ mm}$  und  $I = 120 \text{ mA}$

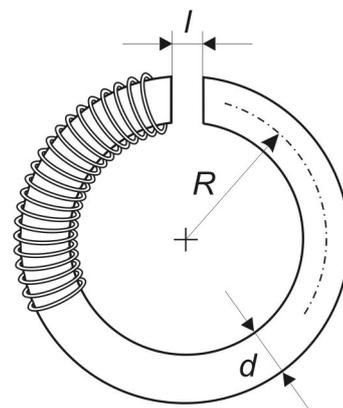
3.5. In einer „langen“ Spule ( $n = 300, l = 0,7 \text{ m}$  und  $I = 1,5 \text{ A}$ ) wird eine magnetische Induktion von  $B = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$  gemessen. Berechnen Sie daraus die magnetische Feldkonstante.

3.6. Zwischen den Enden einer 15 cm langen eisenfreien Zylinderspule von 850 Windungen aus 0,3 mm dickem Cu-Draht ( $\rho = 0,0175 \Omega \text{ mm}^2 / \text{m}$ ) mit dem Durchmesser von 2 cm liegt eine Spannung von 20 V an. Welche Induktion herrscht im Innern der Spule?

Ergebnis: 10,7mT

3.7.\* Berechnen Sie für einen Ringmagneten mit N Windungen und einem Eisenkern der Permeabilität  $\mu_{Fe}$  die Induktion  $B$  im kleinen Luftspalt der Breite  $l$ !

*Hinweis:* Wenden Sie das Durchflutungsgesetz an (Integrationsfläche wird durch „Seele“ des Ringkernes begrenzt), wobei der geschlossene Integrationsweg in je einen Anteil über den Luftspalt (nicht vernachlässigbar!) und über den Spulenkern aufgeteilt wird. Nutzen Sie bei der Integration den Umstand, daß die Feldlinien der magnetischen Induktion  $B$  geschlossen sind, also gilt im Bereich des Luftspaltes die Näherung  $B_{Luft} = B_{Eisen}$



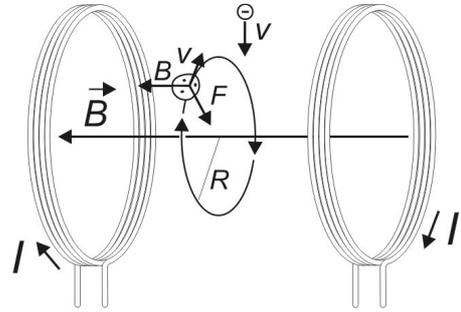
**3.8.\*** Im Vorlesungsversuch *Fadenstrahlrohr* wird ein Elektronenstrahl senkrecht zu den Feldlinien zweier paralleler Spulen (sogen. HELMHOLTZ<sup>32</sup>-Spulen) ausgerichtet. Bei Anlegen einer Beschleunigungsspannung von 600 V beträgt der Radius der Kreisbahn 20 mm. Wie groß ist der Wert der magnetischen Flussdichte?

*Lösung:* Wie aus der Abbildung ersichtlich, erfolgt die Bewegung von Elektronen, die senkrecht zu den Feldlinien in ein magnetisches Feld geschossen werden, wegen der stets zur Bewegungsrichtung senkrechten Kraft auf einer Kreisbahn. Die Lorentzkraft wirkt also als Radialkraft

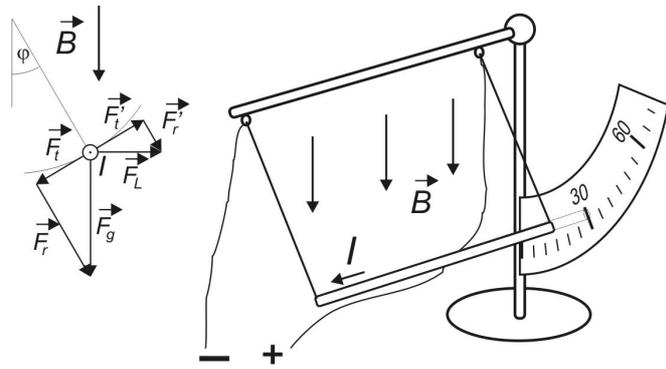
$\vec{F}_R = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_R$  einer Kreisbewegung mit dem Radius  $R$ . Die Elektronenquelle verleiht den Elektronen eine kinetische Energie über die Beschleunigungsspannung. Es gilt  $\frac{m}{2} v^2 = eU$  und somit  $v = \sqrt{2eU/m}$ .

Aus der Lorentzkraft folgt  $B = mv/eR$  und letztlich  $B = \frac{1}{R} \sqrt{2U} \frac{m}{e}$ .

Mit den gegebenen Werten berechnet man  $B = 4,13 \text{ mT}$ .



**3.9\*** Im Vorlesungsversuch LORENTZschaukel wird ein horizontaler Leiter einem senkrecht gerichteten Magnetfeld ausgesetzt. Der Leiter besteht aus einem Stab von 10 cm Länge mit einem Gewicht von 5 g und ist ähnlich einer Schaukel mit dünnen, flexiblen Zuleitungen so aufgehängt, dass er unter dem Einfluss seiner Gewichtskraft als Schwebependel betrachtet werden kann. Sobald man einen Strom fließen lässt, wird der Stab durch die Lorentzkraft aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Ein Auslenkungswinkel von  $\varphi = 30^\circ$  wird bei einem Strom von 1 A gemessen. Wie groß ist der Betrag der magnetischen Induktion?



*Lösung:*

Da die Induktion senkrecht gerichtet ist und der Strom horizontal in Richtung des Leiters fließt, wirkt die Lorentzkraft horizontal und senkrecht zum Leiter. Dieser wird dadurch aus der Ruhelage ausgelenkt, wie aus der Abbildung ersichtlich. Mit der Auslenkung des Pendels um den Winkel  $\varphi$  entsteht eine rücktreibende Kraft  $\vec{F}_t$ , die Tangentialkomponente der Gewichtskraft  $\vec{F}_g$  ( $\vec{F}_t$  entspricht vom Wesen her einer Hangabtriebskraft).

Dieser rücktreibenden Komponente entgegen steht die auslenkende Tangentialkomponente  $\vec{F}_t'$  der Lorentzkraft  $\vec{F}_L$ . Im Gleichgewicht heben sich beide Tangentialkomponenten auf:

$$F_t = m g \sin \varphi = F_t' = Q v B \cos \varphi. \text{ Somit gilt für den Betrag der magnetischen Induktion } B = \frac{m g}{Q v} \tan \varphi.$$

Für den Leiter mit dem Querschnitt  $A$  und dem Volumen  $V$  gilt  $j = n e v = \frac{Q}{V} v = \frac{I}{A}$  und somit für das Produkt

der im Stab enthaltenen Ladung und deren Geschwindigkeit  $Q v = \frac{I}{A} V = l I$ . Hieraus folgt  $B = \frac{m g}{l I} \tan \varphi$

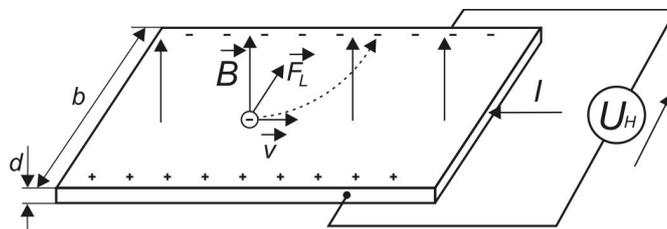
$$\text{und mit den aktuellen Werten } B = \frac{0,005 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ m} \cdot 1 \text{ A}} 0,577 = 0,283 \text{ T}.$$

<sup>32</sup> Herrmann von HELMHOLTZ (1821-1894), dt. Arzt und Physiker; Energiesatz; physiologische Optik und Akustik; Wirbelströmungen; Elektrodynamik; Physik der Musikinstrumente

**3.10.\*** Die auf die Leitungselektronen im stromdurchflossenen Leiter unter dem Einfluss eines senkrechten Magnetfeldes wirkende Lorentzkraft drängt diese an eine Seite des Leiters. Dort entsteht ein Überschuss an negativen Ladungen, während die gegenüberliegende Seite positiv geladen wird. Die Ladungstrennung erzeugt ein elektrisches Feld senkrecht zum Stromfluss und zum Magnetfeld, es kann eine sogenannte HALL<sup>33</sup>spannung abgegriffen werden. Diese Erscheinung wird als Halleffekt bezeichnet.

*Aufgabe:* Ein flacher Leiter (0,1mm dick, 10mm breit) wird bei 1A Strom einem Feld der Induktion 0,1 T ausgesetzt. Wie groß ist die Hallspannung bei einer Elektronenkonzentration von

- $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (Kupfer)
- $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$  (n-dotiertes Silizium)



*Lösung:* Unter Beachtung der negativen Ladung von Elektronen mit Bewegungsrichtung entgegengesetzt zur Stromrichtung und einer senkrechten Orientierung des Leiters im Magnetfeld wie in nebenstehender Abbildung, ergibt sich eine maximale Hallspannung in der dargestellten Richtung. Im Gleichgewicht kompensieren sich Lorentzkraft und elektrische Feldkraft,  $e v B = e E$ . Aus (2.4) und (2.5) sowie (1.15) folgen

$$I = jA = n e v b d \text{ und } E = U_H / b, \text{ für die Hallspannung ergibt sich } U_H = b E = b B v = \frac{b B I}{n e b d} = \frac{B I}{n e d}.$$

Offensichtlich hängt die Hallspannung gar nicht von der Breite des Leiters ab. In einem schmalen Leiter ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen bei gleichem Stromfluss wegen des geringeren Leiterquerschnitts größer und die Lorentzkraft gleichermaßen. Dadurch ist zwar auch das elektrische Feld größer, wirkt aber nur über die geringere Leiterbreite. Setzt man die gegebenen Werte für Kupfer ein, ist man über den kleinen Wert

$$\text{der Hallspannung erstaunt: } U_H = \frac{0,1 \text{Vs} \cdot 1 \text{A}}{\text{m}^2 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 74 \text{ nV}. \text{ Bei Silizium sieht es bes-}$$

ser aus, man erhält  $U_H = 62,5 \text{ mV}$ , ein Wert, welcher messtechnisch zur Detektion von Magnetfeldern problemlos ausgewertet werden kann. Ein weiterer Vorteil der *Hallsensoren* besteht in der Möglichkeit, sie in Halbleiterchips zu integrieren.

**3.11.\*** Die Beschleunigungsspannung  $U_B$  für den Elektronenstrahl in einer Vakuumröhre beträgt 3 kV. Die Ablenkung des zunächst horizontalen Strahls erfolgt durch ein zusätzliches elektrisches Feld  $E$ . Dieses wird durch einen Plattenkondensator mit der Ablenkspannung  $U_A = 1,8 \text{ kV}$  und dem Plattenabstand  $d = 4 \text{ cm}$  erzeugt. Näherungsweise ist das Feld innerhalb des Kondensators homogen, außerhalb des Raumes zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigbar klein. Außerhalb der Elektronenstrahlröhre sind zusätzlich zwei große Leiterschleifen angebracht (sog. Helmholtzspulen). Hierdurch wird ein näherungsweise konstantes Magnetfeld im Bereich der Ablenkplatten erzeugt.

a) Fertigen Sie die (evtl. perspektivische) Prinzipskizze eines vertikalen Schnittes durch eine Elektronenstrahlröhre an, welche die Elektronenquelle mit Beschleuniger sowie die für die Vertikalablenkung notwendigen Elektroden (analog Plattenkondensator) enthält. Zeichnen Sie die für eine Ablenkung nach oben notwendige Richtung des Elektrischen Feldes ein sowie die hierzu notwendige Polung der Ablenkspannung  $U_A$  (Begründung)!

b) Die Richtung des zusätzlich wirkenden Magnetfeldes  $B$  ist so zu wählen, dass die dadurch auf das Elektron wirkende Kraft nach unten gerichtet ist. Zeichnen Sie eine der beiden Spulen ein sowie die Stromrichtung bei rechts gewickelter Spule (Begründung)!

c) Berechnen Sie die Elektronengeschwindigkeit infolge der Beschleunigungsspannung!

d) Die zwischen den Ablenkplatten auf das Elektron wirkende elektrostatische Feldkraft und die gleichzeitig durch das Magnetfeld wirkende Lorentzkraft sind zueinander entgegengesetzt gerichtet. Bei welchem Wert der magnetischen Flussdichte  $B$  kompensieren sich beide Feldkräfte völlig, so dass die Flugbahn der Elektronen linear verläuft?

Ergebnis:  $v = 32500 \text{ km/s}$ ;  $B = 1,38 \text{ mT}$

<sup>33</sup> Edwin Herbert HALL (1855-1938), am. Physiker; metallische Leitfähigkeit

### 3.4. Das Induktionsgesetz (1831 FARADAY)

Faraday war bekannt, dass bewegte Ladungen magnetische Wirkungen hervorrufen (Magnetfeld um stromdurchflossene Leiter, Spulen) und suchte zielstrebig nach einem analogen Rückschluss: Werden bewegte (zeitlich veränderliche) Magnetfelder von elektrischen Wirkungen begleitet? Als Antwort hierauf fand er das Induktionsgesetz.

Zunächst betrachten wir ein homogenes und zeitlich konstantes Feld  $\vec{B}$ , welches eine U-förmige ruhende Leiterschleife durchsetzt (Fall 1). Diese enthält ein Voltmeter, weiterhin ist ein Leiterstück der Länge  $l$  mittels zweier Schleifkontakte verschiebbar angeordnet, das mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  parallel verschoben wird (s. Abb. 3.9).

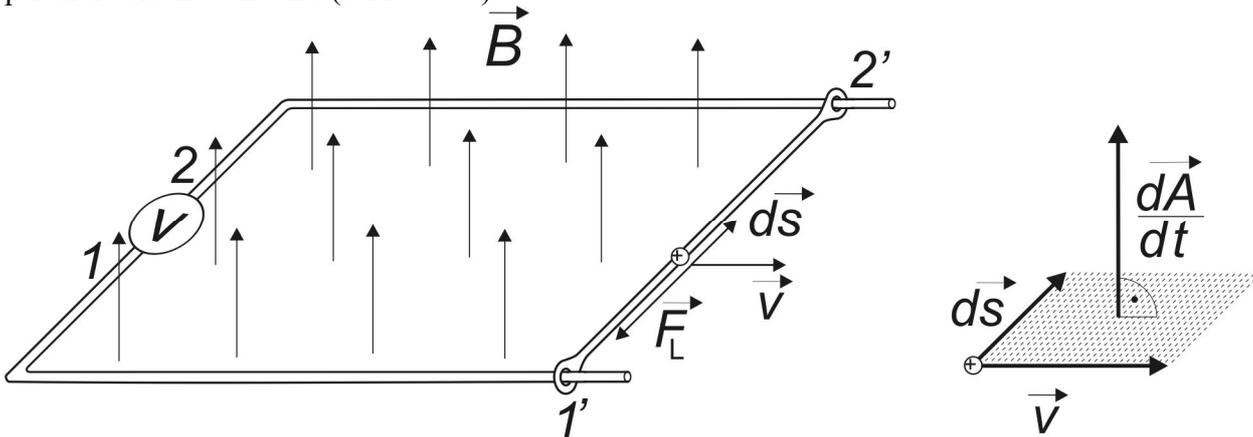


Abb. 3.9: Leiterschleife

Der die Leiterschleife durchsetzende magnetische Fluss (s.u.) ist durch Veränderung der Schleifenabmessung einer zeitlichen Veränderung unterworfen. Offensichtlich wirkt auf die im Schleifer enthaltenen Ladungsträger die Lorentzkraft.

Bewegt man den Schleifer in Abb.3.9, registriert man im Experiment einen Ausschlag des Voltmeters, dessen Betrag von der Stärke des  $B$ -Feldes, der Länge des bewegten Schleifers und dessen Geschwindigkeit abhängt. Ändert man die Richtung einer dieser Größen, ändert sich die Polarität der gemessenen Spannung.

Ursache dieser Spannung ist die Lorentzkraft, die auf die Leitungselektronen im bewegten Leiterstück wirkt. Da diese senkrecht zur Bewegungsrichtung  $v$  wirkt, also in Längsrichtung des Schleifers, sammeln sich an dessen einem Ende Elektronen im Überschuss, während ein Elektronenmangel am anderen Ende zu verzeichnen ist. Dieser Vorgang erzeugt einen Ladungsunterschied, folglich ein elektrisches Feld und eine Potentialdifferenz beider Schleifkontakte. Im Gleichgewicht halten sich elektrische Feldkraft und Lorentzkraft die Waage, sind also in der Summe gleich Null. Für die Beträge gilt somit

$e \cdot v \cdot B = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{l}$ . Stellt man nach der Spannung um, erhält man

$$\boxed{\text{Induzierte Spannung im bewegten Leiter : } U = B \cdot l \cdot v} \quad (3.22)$$

Diese Beziehung gilt nur für den Fall zueinander senkrechter Orientierungen von Schleifer, Feld und Bewegungsrichtung! Sie sagt weiterhin nichts aus bezüglich der Polarität der induzierten Spannung. Solche Spannungen treten auch auf, wenn man die Stärke oder Richtung der magnetischen Induktion ändert, welche die Leiterschleife durchsetzt.

Die Erscheinung, dass zwischen den Enden eines Leiters bei dessen Bewegung in einem Magnetfeld oder bei einer Änderung des Magnetfeldes eine Spannung entsteht, nennt man *elektromagnetische Induktion*, die Spannung wird *Induktionsspannung* genannt, der dadurch im Stromkreis hervorgerufenen Strom *Induktionsstrom*.

Im Folgenden wird in einer detaillierteren Betrachtung das Induktionsgesetz hergeleitet. Falls dem geneigten Leser die Zeit oder Lust abgeht, die einschlägigen Umformungen nachzuverfolgen – ein Sprung ans Ende des Abschnittes zu Glg. 3.30 sei hier erlaubt. Das Induktionsgesetz kann man auch anwenden, ohne über die Ableitung Bescheid zu wissen!

Zunächst soll die Verschiebungsarbeit berechnet werden, die vom System aufgewendet werden muss, um eine positive Probeladung  $q$  um die Schleife zu transportieren, also von  $1 \rightarrow 1' \rightarrow 2' \rightarrow 2$ . Auf bewegte Ladungen im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ .

Da die Lorentzkraft senkrecht zur Verschiebung gerichtet ist, liefert die Verschiebung der Probeladung innerhalb der Leiterschleife keinen Beitrag zur Verschiebungsarbeit (infolge der Lorentzkraft ist lediglich die Konzentration der Ladungsträger über dem Leiterquerschnitt etwas ungleichmäßig - *Hall-Effekt*). Anders bei der Verschiebung von  $1' \rightarrow 2'$ , da in diesem Abschnitt die Ladungsträgergeschwindigkeit durch den bewegten Leiterabschnitt bestimmt wird. Hier hat die Lorentzkraft eine Komponente in Verschiebungsrichtung (entlang des Leiters) und leistet die Verschiebungsarbeit

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{1' \rightarrow 2'} = \int_1^2 \vec{F}_L d\vec{s} = q \int_1^2 [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{s} \tag{3.23}$$

Dabei ist berücksichtigt, dass bei den Verschiebungen  $1 \rightarrow 1'$  und  $2' \rightarrow 2$  keine Arbeiten geleistet werden. Wendet man auf (3.23) die Vertauschungsrelation  $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]$  an (das sogenannte Spatprodukt ist gleich dem Volumen eines Parallelepipeds, welches von den drei Vektoren aufgespannt wird), erhält man nach einer weitere Vertauschung der Faktoren des Vektorproduktes

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \int_1^2 \vec{B} \cdot [\vec{v} \times d\vec{s}] \tag{3.24}$$

Das Vektorprodukt in (3.24) ist gerade gleich dem Flächenstück  $d\vec{A}$ , welches vom Verschiebungsvektor  $d\vec{s}$  je Zeiteinheit  $dt$  überstrichen wird (s. rechter Teil der Abbildung 3.9). Hiermit erhält man

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \int_1^2 \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \tag{3.25}$$

*Definition:* Das Produkt aus Flussdichte und Fläche, welche davon durchsetzt wird, ist eine wichtige physikalische Größe, der *magnetische Fluss*  $\Phi$

$Magnetischer\ Fluss \quad \Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [\Phi] = Vs, \text{ Wb, WEBER}^{34}$

(3.26a)

Wenn die Flussdichte im Bereich der durchsetzten Fläche konstant ist, gilt der vereinfachte Ausdruck

$$\Phi = B \cdot A_n \tag{3.26b}$$

Wobei  $A_n$  die vom Fluss durchsetzte auf  $B$  senkrechte Flächenprojektion darstellt ( $A_n = \vec{A} \cdot \vec{B} / B$ ).

Die Verschiebungsarbeit ergibt sich somit zu

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{3.27}$$

Eine solche Verschiebungsarbeit je Ladung ist aber einer Potentialdifferenz gleichzusetzen. Man bezeichnet diese als *induzierte Spannung*  $U_{ind}$  oder *elektromotorische Kraft*  $EMK$ .

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt} = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{3.28}$$

---

<sup>34</sup> Wilhelm Eduard WEBER (1804-1891), baute zusammen mit Carl Friedrich GAUSS 1833 den ersten elektrischen Telegrafen.

Da wie im auf Abb. 3.9 dargestellten Beispiel  $\vec{B} \parallel d\vec{A}/dt$ , ist offensichtlich das Potential an 1 höher als an 2 und  $U_{\text{ind}} = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$ . Die Lorentzkraft wirkt hier als *EMK* und treibt innerhalb dieser wie eine Spannungsquelle zu betrachtenden Anordnung die positiven Ladungsträger nach 1 und die negativen Ladungsträger nach 2. Die Potentialdifferenz ist als eingeprägte Spannung (Urspannung) direkt am Voltmeter ablesbar und bewirkt einen Stromfluss, wenn parallel zum Voltmeter noch ein Widerstand angeschlossen wird.

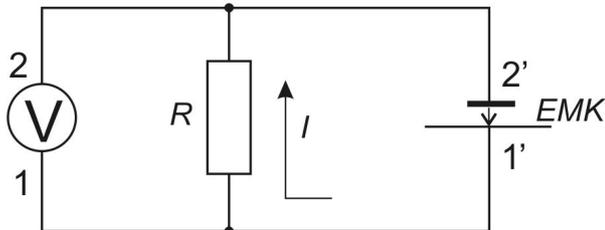


Abb. 3.10 Bewegte Leiterschleife als Spannungsquelle

Die Bezeichnung der Anschlüsse wie in Abb.3.9. Durch die Lorentzkraft werden die positiven Ladungsträger innerhalb der Schleife nach 1' getrieben und fließen von dort außen über den Widerstand nach 2'.

Beim Übergang von Glg.3.25 nach Glg.3.27 wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die Leiterschleife in einem homogenen und auch zeitlich konstanten Feld bewegt (nur dann darf man den Differentialoperator vor das Produkt ziehen). Das ist natürlich nicht immer der Fall, aber diese Voraussetzung ist auch gar nicht nötig! Es lässt sich an einem ähnlichen Experiment, wenn die Fläche der Leiterschleife konstant ist, aber das Magnetfeld veränderlich (in Betrag sowie Richtung) zeigen, dass auch hier die Beziehung 3.27 gültig ist.

Die Punkte 1 und 2 in Abb.3.9 sind Anfang und Ende einer geschlossenen Verschiebungstrajektorie. Da entlang dieser Verschiebung Arbeit geleistet wird, gilt

$$U_{\text{ind}} = -\oint \vec{E} \, d\vec{s} \neq 0. \quad (3.29)$$

Damit erhalten wir eine schöne Formulierung für das Induktionsgesetz:

$$\boxed{\text{Induktionsgesetz} \quad U_{\text{ind}} = -\oint \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \, d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad (3.30a)$$

Bezeichnet man mit  $A_n$  die zum  $B$ -Feld senkrechte Flächenprojektion, ergibt sich für die induzierte Spannung bei einer Spule mit  $N$  Windungen in einem homogenen Feld folgender Ausdruck:

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \left( \frac{dB}{dt} A_n + B \frac{dA_n}{dt} \right). \quad (3.30b)$$

Verbal lässt sich dieses Gesetz wie folgt ausdrücken:

Unterliegt der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife einer zeitlichen Änderung, wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert. Dabei ist es unerheblich, ob dies durch eine Änderung des Betrages der Flussdichte, der relativen Orientierung von Flussdichte und der vom Leiter umschlossenen Fläche zueinander, oder einer Änderung des Betrages dieser Fläche geschieht.

Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen geschlossene (!!) Feldlinien des elektrischen Feldes (Wirbelfeld). Dieses Wirbelfeld existiert auch ohne Leiter. An einer in dieses Feld gebrachten Leiterschleife kann jedoch als *Antenne* diese Umlaufspannung abgegriffenen und dem Feld Energie entnommen werden.

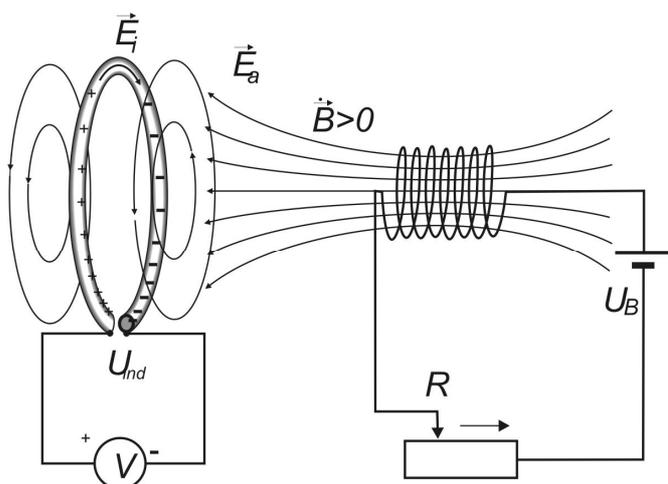


Abb. 3.11 Elektrisches Wirbelfeld um ein zeitlich veränderliches Magnetfeld

Ein Anwachsen des Stromflusses durch die Spule erzeugt ein veränderliches Magnetfeld und damit ein elektrisches Wirbelfeld  $\vec{E}_a$ . Befindet sich in dessen Bereich ein Leiter, erfahren die in ihm enthaltenen Ladungen eine Feldkraft und verschieben sich entsprechend. Durch diese Influenz entsteht im Leiter ein zusätzliches Gegenfeld  $\vec{E}_i$ , welches das äußere kompensiert. Dadurch liegt an den Leiterenden die volle Umlaufspannung  $U_{ind}$  an.

Wie in Abb. 3.11 ersichtlich, bewirkt ein im elektrischen Wirbelfeld befindlicher Leiter durch *Influenz*, dass das ihn durchsetzende Feld verschwindet. Da sich laut Glg.3.30 die Umlaufspannung über eine *geschlossene* Verschiebung ergibt, muss die Integration über das offene Kurvenstück (zwischen den Leiterenden) die gesamte Spannung ergeben. Hier ist durch die influenzierten Ladungen das resultierende elektrische Feld stark.

Ein ganz analoges Bild ergibt sich, wenn man den Magnetstrom konstant lässt, aber den Abstand zwischen Leiterschleife und Spule verringert.

Wenn die Leiterschleife geschlossen wird, fließt in ihr ein Strom, der durch die Umlaufspannung und den Widerstand der Schleife bestimmt wird. Hierbei ist allerdings die Rückwirkung des Stromes durch die Schleife auf das ihn verursachende veränderliche Magnetfeld zu beachten (s. unten im Abschnitt Selbstinduktion). Das induzierte Magnetfeld ist nämlich dem verursachenden Magnetfeld entgegengerichtet. Folglich sind diese *Wirbelströme* selbst in sehr guten Leitern von begrenzter Stärke. Die durch die Wechselwirkung beider Felder entstehenden (abstoßenden) Kräfte können erheblich sein. Hierauf beruht das Prinzip des *Magnetkissens*, welches nicht nur bei der Magnetschwebebahn, sondern z.B. auch in Magnetlagern angewendet wird. Sehr praktisch ist die LENZ<sup>35</sup>sche Regel:

**LENZsche Regel:** Induzierte Spannungen, Ströme, Felder, Kräfte,... sind stets ihrer Ursache entgegengesetzt gerichtet.

Man könnte die Lenzsche Regel auch so formulieren: Das System versucht unter Ausschöpfung aller Möglichkeiten den Anfangszustand beizubehalten, der durch den magnetischen Fluss gesetzt wurde.

Ändert sich z.B. das Magnetfeld, welches eine Leiterschleife durchsetzt, so wird in dieser eine Spannung induziert. Die induzierte Spannung treibt einen Strom durch die Leiterschleife, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt. Dieses durchsetzt zusätzlich zum äußeren Feld die Leiterschleife und kompensiert so gerade die primäre *Änderung des Flusses* durch die Leiterschleife. Würden keine ohmschen Verluste auftreten, bliebe der magnetische Fluss konstant. Aus diesem Grunde ist in Supraleitern der magnetische Fluss stets gleich Null.

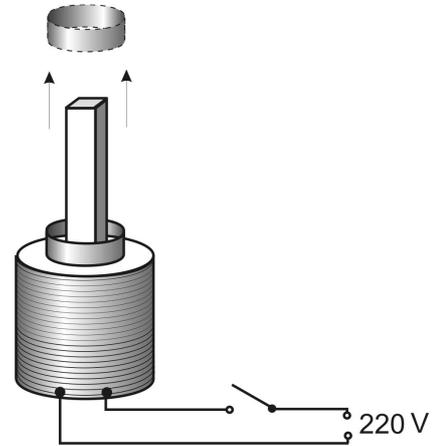
**Experiment:** Eine Reihe von Materialien besitzen die Eigenschaft, bei ausreichend tiefen Temperaturen ihren elektrischen Widerstand vollständig zu verlieren. Auf diese *Supraleiter* werden wir später noch genauer eingehen. An dieser Stelle soll der *Meißner-Ochsenfeld-Effekt* erwähnt werden. Bringt man nämlich einen solchen Supraleiter in die Nähe eines Magnetfeldes, wird sofort innerhalb des Supraleiters ein Wirbelstrom induziert, der ein Gegenfeld erzeugt, so dass das Innere des Supraleiters stets völlig feldfrei bleibt. Die Feldlinien der magnetischen Induktion werden aus dem Supraleiter herausgedrängt. Die Abstoßung kann leicht so groß werden, dass supraleitendes Material in einem Magnetfeld dauerhaft schwebt.

<sup>35</sup> Emil Heinrich Friedrich LENZ (1804-1865), dt. Physiker, ab 34 Petersburg; Elektromagnetismus; Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

**Experiment:** Ein eindrucksvolles Beispiel für die Lenzsche Regel ist der THOMSON-Ring. Eine Spule wird mit einem langen Eisenkern versehen. Über den Eisenkern wird ein Ring aus gut leitfähigem Material (Aluminium) gestülpt (s. Abb.3.12). Wird daraufhin das Magnetfeld eingeschaltet, durchsetzt das sich rasch aufbauende Magnetfeld den Ring, wodurch in diesem ein starker Wirbelstrom induziert wird, welcher seinerseits ein dem primären Feld entgegen gesetztes Magnetfeld erzeugt. Beide stoßen einander ab, so dass bei geeigneter Dimensionierung der Ring nach oben geschleudert wird.

Abb. 3.12 Thomson-Ring

Bei Einschalten des Magnetstromes erzeugt der induzierte Ringstrom ein entgegen gerichtetes Magnetfeld, welches den Ring fortschleudert. Dieser Effekt funktioniert besonders gut mit Wechselstrom. Durch den nach Einschalten der Spannung permanenten Wechsel des Magnetfeldes ist die Abstoßung nicht nur auf einen kurzen Impuls begrenzt sondern zeitlich konstant. Der Ring kann so leicht zum Schweben gebracht werden. Der Wirbelstrom innerhalb des Ringes bewirkt eine rasche Erwärmung desselben. Auf diesem Effekt beruht die *Induktionsheizung*. Wird ein aufgeschlitzter Ring verwendet, kann kein Wirbelstrom fließen, der Ring bleibt unbeeindruckt vom Brummen des eingeschalteten Magneten auf ihm liegen.



### Übungen

**3.12.** In einer Spule mit 1250 Windungen befindet sich ein Stabmagnet (s. Abb.). Sobald dieser aus der Spule herausgezogen wird, fließt für die Dauer von 0,5s ein (annähernd konstanter) Strom von 10mA. Wie stark ist der magnetische Fluss des Stabmagneten?

*Lösung:*

Die induzierte Spannung  $U_{ind}$  bewirkt einen Strom  $I$  über den Widerstand  $R$ . Nach Glg.3.34 gilt somit für eine Induktionsspule mit  $N$  Windungen

$$U_{ind} = R I = N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Da die Zeitabhängigkeit des Stromes bekannt ist, kann man über den gesamten Zeitraum, in dem der Strom von 0 verschieden ist, integrieren:

$$\int_0^t R I(t') dt' = N \int_0^{\Phi} d\Phi' = R \int_0^t I(t') dt' = N\Phi.$$

Damit ergibt sich für den Fluss des Stabmagneten ein Wert von  $\Phi = 5 \frac{V}{A} \cdot 0,01A \cdot 0,5s / 1250 = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}}}$ .

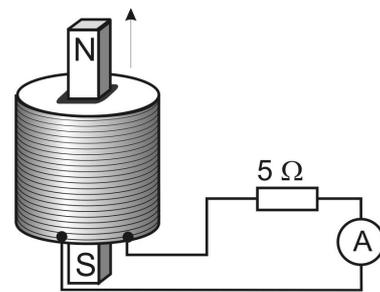
**3.13.** Wie groß ist die Induktionsspannung zwischen den Enden einer Spule mit 750 Windungen, die sich in einem Magnetfeld mit einer Flussdichte von 30mT befindet? Die Spule hat eine Länge von 15cm und einen Durchmesser von 4cm. Das Magnetfeld wird innerhalb von 0,1 s gleichmäßig auf null verringert. Die Längsachse der Spule schließt mit den Feldlinien einen Winkel von  $30^\circ$  ein.

**3.14.** Ein Stabmagnet wird in eine Spule hineingeführt. Bestimmen Sie (für alle Möglichkeiten) die Richtung des Induktionsstromes a) nach der Lenzschen Regel und b) mit Hilfe der Lorentzkraft.

**3.15.** Eine Spule wird in axialer Richtung auf eine stromdurchflossene Spule gleicher Bauart zu bewegt. Fließt der in ihr induzierte Strom in gleicher oder in entgegen gesetzter Richtung wie der Strom in der ersten Spule?

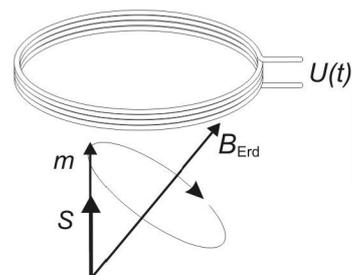
**3.16.** Ein Flugzeug mit einer Spannweite von 45 m fliegt mit einer Geschwindigkeit von 900km/h über einen Ort, an welchem die senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes  $44 \mu\text{T}$  beträgt. Wie groß ist die zwischen beiden Flügelspitzen induzierte Spannung?

**3.17.\*** Die 6 m langen Rotorblätter eines Hubschraubers drehen sich im Magnetfeld der Erde über einen Ort, an welchem die senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes  $44 \mu\text{T}$  beträgt. Wie groß ist die zwischen Drehachse und Flügelspitzen induzierte Spannung?



### Exotisch: Kerninduktion

Die magnetischen Momente der Elementarteilchen sind nicht nur für die Physiker interessante Untersuchungsobjekte, sondern auch Grundlage für höchst praktische Anwendungen. Protonen, Elektronen und Neutronen besitzen neben den magnetischen Momenten auch einen Eigendrehimpuls (Spin). Der Spin verleiht ihnen Eigenschaften eines Kreisels, das magnetische Moment gibt die Möglichkeit, durch äußere Magnetfelder Drehmomente auszuüben. Eine Erfindung von Physikern aus Novosibirsk gestattet es, unter einer dicken Permafrostschicht Bodenschichten mit flüssigem Wassers aufzuspüren. Das *Hydroskop* funktioniert wie folgt: Eine Leiterschleife von gut 100m Durchmesser wird wie eine riesige flache Spule auf den Boden ausgelegt. Ein starker Stromstoß von einigen Sekunden Dauer sorgt dafür, dass bis in eine Tiefe von ca. 70m das künstliche Magnetfeld viel stärker ist als das natürliche Erdfeld, worauf sich die magnetischen Momente  $m$  der Protonenspins  $S$  der im Erdreich enthaltenen Wassermoleküle nach kurzer Zeit senkrecht zur Erdoberfläche ausrichten. Nach Abschalten des Spulenstroms wirkt nur noch das Erdfeld und erzeugt ein Drehmoment auf die jetzt quer zu ihm gestellten Protonenspins. Ähnlich wie ein schief stehender Brummkreisel unter dem Einfluss der Gewichtskraft beginnen die Protonenspins um die Richtung des Erdmagnetfeldes mit der sog. LARMOR<sup>36</sup>frequenz zu präzedieren. Da alle Protonenspins mit der gleichen Frequenz und dazu in der gleichen Phase präzedieren, addieren sich die einzelnen magnetischen Momente zu einem magnetischen Wechselfeld, welches in der jetzt als Detektor geschalteten Spule eine Induktionsspannung  $U(t)$  hervorruft. Die Unterscheidung zwischen gefrorenem und flüssigem Wasser wird dadurch ermöglicht, dass die Protonenspins von Eis schon nach sehr kurzer Zeit (einige  $\mu\text{s}$ ) wieder in die Erdfeldrichtung zeigen, während die magnetischen Momente der Protonen von flüssigem Wasser eine vergleichsweise sehr lange *Relaxationszeit* aufweisen.



Eine ähnlichem Methode, bei dem man aber zusätzlich zu einem starken konstanten Magnetfeld noch hochfrequente Wechselfelder eingestrahlt, mit denen die Kernspins beeinflusst werden, heißt *NMR (nuclear magnetic resonance)*. Die *Kernspintomografie*, das modernste und sicher aussagekräftigste Verfahren der Bildgebung in der Medizin, beruht darauf, dass die Relaxationszeit der Protonenspins so stark von ihrer chemischen Umgebung abhängt, dass man hierdurch zwischen unterschiedlichen Gewebearten sehr fein differenzieren kann. Der zu untersuchende menschliche Körper wird in einen sehr starken Magneten (*supraleitende* Luftspule mit einer Induktion von mehreren Tesla) geschoben. Spezielle Impulsmethoden gestatten es, jedem Volumenelement u.a. eine spezielle Relaxationszeit zuzuordnen. Auf einem Schnittbild in unterschiedlichen Grauwerten dargestellt, ergeben sich verblüffend scharfe Abbildungen der Organe und deren pathologische Veränderungen. Wichtig ist hierbei, dass ohne jede Belastung durch ionisierende Strahlung sehr wohl Weichteile differenziert werden, ein erheblicher Vorteil gegenüber der RÖNTGEN<sup>37</sup>-Tomografie.

Abb. 3.13 NMR-Tomografische Aufnahme eines Schädels

Die Auswertung der NMR-Daten und die Bilderzeugung sind nicht nur eine Herausforderung an die Computertechnik, sondern stellen auch einen intensiv bearbeiteten Forschungsgegenstand dar<sup>38</sup>



<sup>36</sup> Sir Joseph LARMOR (1857-1942), engl. Physiker; Elektrodynamik; Thermodynamik; Atomphysik; Relativitätstheorie

<sup>37</sup> Wilhelm Conrad RÖNTGEN (1845-1923), dt. Physiker; Entdeckung der X-Strahlen (Bremsstrahlung aus Kathodenstrahlröhren) 1. Nobelpreis für Physik

<sup>38</sup> Bildquelle: <http://www.mpibpc.gwdg.de/abteilungen/NMR/images/nmr.gif>

### 3.5. Selbstinduktion

Wenn eine Spule von einem zeitlich veränderlichen Strom durchflossen wird, ist damit auch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld verbunden, das sie durchsetzt. Hierdurch wird eine Spannung induziert, die *Selbstinduktionsspannung*.

Bei einer Spule mit  $N$  Windungen gilt für die induzierte Spannung laut (3.28)

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Ändert sich der Fluss durch die Spule infolge einer Änderung des Spulenstromes, wird in dieser eine Selbstinduktionsspannung erzeugt, die zur zeitlichen Änderung des Stromes proportional ist:

*Selbstinduktionsspannung*  $U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$   $L$  – Induktivität [L] = Vs/A = H (HENRY<sup>39</sup>)

(3.31)

Vergleicht man beide Gleichungen, erhält man für die Induktivität einer Spule

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (3.32)$$



Die Selbstinduktionsspannung ist einer Ursprungspannung vergleichbar und somit wie eine zusätzliche Spannungsquelle im Stromkreis zu behandeln.

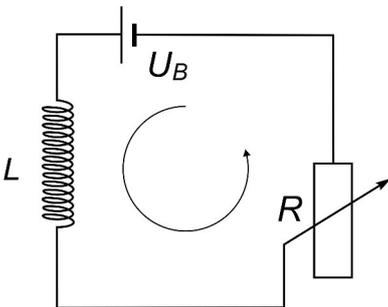


Abb. 3.14 Stromkreis mit Potentiometer und Induktivität

Bei Veränderung der Stellung des Potentiometers ändert sich der Strom durch die Spule. In einem solchen Fall muss die Selbstinduktionsspannung berücksichtigt werden. Im Übrigen gelten auch hier die Kirchhoffschen Regeln.

In einer elektronischen Schaltung wird die Induktivität wie in der Abbildung durch eine stilisierte Leiterschleife dargestellt oder durch ein schwarz gefülltes Rechteck.

Wendet man auf den in Abb.3.14 dargestellten Stromkreis die Maschenregel an, folgt

$$RI = U_B + U_{ind}, \quad (3.33)$$

denn  $U_{ind}$  gehört auf die rechte Seite der Gleichung. Gewöhnlich wird die von der Spule induzierte Spannung jedoch so behandelt, wie ein Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand und dann (natürlich unter Beachtung des Vorzeichens) auf die linke Seite der Maschengleichung geschrieben. Man betrachtet somit die Selbstinduktionsspannung wie eine Spannung, gegen welche die Batteriespannung  $U_B$  antreten muss

$$RI + L \frac{dI}{dt} = U_B. \quad (3.34)$$

Ganz analog ist zu verfahren, wenn mehrere Induktivitäten in einer Masche enthalten sind, allge-

mein gilt

$$\sum_i R_i I_i + \sum_j L_j \frac{dI_j}{dt} = \sum_k U_k. \quad (3.35)$$

<sup>39</sup> Joseph HENRY (1797-1878), am. Physiker, Entdecker der Selbstinduktion und des Elektromagneten mit Eisenkern, Erfinder des Relais als Grundlage der Telegrafie

### Parallel- und Reihenschaltung von Induktivitäten

Zwei Spulen in Reihe geschaltet können betrachtet werden wie eine einzige mit entsprechend höherer Windungszahl. Somit addieren sich die Induktivitäten bei Reihenschaltung. Schaltet man zwei Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  parallel, so gilt nach Glg. 3.31 für die Ersatzinduktivität  $L_g$

$$U = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} = L_g \frac{dI_g}{dt} = L_g \frac{dI_1 + dI_2}{dt}$$

$$\frac{U}{L_g} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2}$$

Woraus folgt:

Induktivität bei Parallelschaltung $L_g^{-1} = \sum L_i^{-1}$	(3.36)
Induktivität bei Reihenschaltung $L_g = \sum L_i$	

### 3.6. Energie des Magnetfeldes

Beim Einschalten des Stromflusses durch eine Spule werden Ladungsträger gegen die Selbstinduktionsspannung verschoben. Folglich wird hierbei Arbeit verrichtet, die als Energie des durch die Spule erzeugten Magnetfeldes in diesem gespeichert ist. Sei während des Einschaltens die Stromstärke auf den Zwischenwert  $I'$  angestiegen. Im darauf folgenden Zeitintervall  $dt$  steigt die Stromstärke um  $dI'$  und der magnetische Fluss um  $d\Phi$ . Dabei wird eine Spannung  $U_{ind}$  induziert. Die hierzu benötigte Energie  $dW$  wird von der äußeren Spannungsquelle geliefert ( $U_B$  tritt gegen  $U_{ind}$  an) und als Feldenergie gespeichert. Man erhält

$$dW = -I'(t)U_{ind}(t)dt = I' L \frac{dI'}{dt} = L I' dI'$$

und nach Integration

$$W_{mag} = \int_0^I L I' dI' = \frac{1}{2} L I^2 \quad . \quad (3.37)$$

Setzt man in (3.37) die Beziehungen (3.26, 3.32) sowie  $B = \mu_r \mu_0 H$  für eine lange Spule mit  $H = NI/l$  ein, erhält man für den Energieinhalt des Magnetfeldes in der langen Spule

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 l A \quad (3.38)$$

mit  $l$  der Spulenlänge und  $A$  dem Spulenquerschnitt, deren Produkt das Volumen des felderfüllten Raumes darstellt. Dividiert man die Energie  $W_{mag}$  durch diesen Term, erhält man die Energiedichte

Energiedichte des Magnetfeldes $w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} H B \quad [w] = \text{Ws m}^{-3}$	(3.39)

Die Analogie dieser Formel zur Energiedichte des elektrischen Feldes ist unverkennbar. Die Beziehung 3.39 wurde hier für das Magnetfeld in einer langen Spule abgeleitet, sie gilt in dieser Form aber auch für jegliches Magnetfeld!

### Übungen

**3.18.** Eine quadratische Spule ( $l = 20\text{cm}$ , Kantenlänge  $a = 5\text{cm}$ ) hat  $N = 1000$  Windungen und eine Eisenkern  $\mu_r = 3000$ . Wie groß ist die Induktivität  $L$  dieser Spule?

*Lösung:* Wir verwenden die Ergebnisse aus Glg. 3.34:  $L I^2 = \mu_r \mu_0 H^2 l A$  und setzen für die „lange“ Spule die Beziehung  $H = NI/l$  für das Magnetfeld ein:  $L = \mu_r \mu_0 N^2 A/l$ . Diese Formel kann zur Berechnung der Induktivität einer jeden langen Spule dienen.

Einsetzen der Werte ergibt

$$L = \frac{3000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs} \cdot 1000^2 \cdot 0,05^2 \text{m}^2}{\text{Am} \cdot 0,2\text{m}} = \underline{\underline{47 \text{ H}}}$$

**3.19.** Um einen ringförmigen Spulenkörper (Radius der Mittellinie des Torus beträgt 50mm, Querschnittsfläche  $1\text{cm}^2$ ) aus einem Ferritwerkstoff mit  $\mu_r = 300$  sind 1000 Windungen angebracht. Der Spulenstrom beträgt 0,1A. Berechnen Sie Flussdichte und Energieinhalt im Spulenkörper.

*Lösung:* Man geht von der Formel für das Magnetfeld einer Ringspule aus und nimmt an, dass sein Betrag innerhalb des Spulenkörpers konstant sei:  $H=NI/2\pi R$ ;  $B=\mu_r \mu_0 H$ . Für die magnetische Induktion im Spuleninneren erhält man

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R} = \frac{300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs} \cdot 1000 \cdot 0,1\text{A}}{\text{Am} \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{m}} = 0,12 \text{ T}$$

und für die gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{B^2 l A}{2\mu_r \mu_0} = \frac{0,12^2 \text{V}^2 \text{s}^2 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot \text{Am}}{\text{m}^4 \cdot 2 \cdot 300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Vs}} = 0,6 \text{ mWs}$$

**3.20.** Mit einem Supraleitungsmagneten wird bei  $\mu_r=1$  ein Magnetfeld der Flussdichte  $B=2\text{T}$  erzeugt. Welche Energie ist im Spulenvolumen von  $V=1\text{m}^3$  gespeichert? Welches Volumen müsste ein Eisenkern mit  $\mu_r=4000$  und  $B=1\text{T}$  haben, um die gleiche Energie zu speichern?

---

### 3.7. Magnetfeld in Materie

Wir haben zwei wichtige Gesetzmäßigkeiten kennengelernt, durch die Magnetfelder charakterisiert werden können. Das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol ist eine Eigenschaft, die das  $H$ -Feld auszeichnet, die Lorentzkraft und damit verbundene Effekte wie das Induktionsgesetz und Hall-Effekt sind typisch für das  $B$ -Feld. Beide Felder sind durch die Materialgleichung (3.18) gekoppelt.

Die relative Permeabilität  $\mu_r$  ist eine Materialkonstante, die jedoch außerdem noch stark von Magnetfeldstärke, Frequenz sowie der Temperatur abhängt. Gemessen werden kann diese Größe z.B. mittels einer Kreisspule, durch deren Wicklungen ein bekannter Strom fließt und deren Spulenkörper aus dem zu untersuchenden Werkstoff besteht. Unter Verwendung der Formel für das Magnetfeld einer langen Spule berechnet man  $H$ . Das  $B$ -Feld wird gemessen, indem man z.B. eine Hall-Sonde über einen sehr engen Schlitz in den Spulenkörper einführt. Je nach den Werten von  $\mu_r$  und den verursachenden Wirkmechanismen unterscheidet man:

$\mu_r < 1$	Diamagnetika
$\mu_r > 1$	Paramagnetika
$\mu_r \gg 1$	Ferromagnetika

Der *Diamagnetismus* ist eine Eigenschaft aller Stoffe. Das  $B$ -Feld ist hierbei sehr geringfügig ( $10^{-6}$ ) kleiner als im Vakuum. Diesen Effekt kann man sich erklären indem man eine Beeinflussung der Elektronenbahnen in den Molekülen unter dem Einfluss des Magnetfeldes annimmt. Dies führt zu einem sehr kleinen zusätzlichen Feld, welches dem äußeren entgegengesetzt ist (vergl. Lenzsche Regel). Viel stärker als der Diamagnetismus ist bei bestimmten Stoffen der *Paramagnetismus*. Ursache sind die magnetischen Momente der Elektronen, die sich im äußeren Feld ausrichten und dieses verstärken. Dass dieser Effekt nicht bei allen Stoffen auftritt hat seine Ursache in der Eigenschaft der Elektronen, stets solche Bahnen in Atomen oder Molekülen einzunehmen, bei denen sich die magnetischen Momente paarweise antiparallel ausrichten und somit kompensieren. Moleküle und Atome mit *ungepaarten* Elektronen haben dagegen relativ starke magnetische Momente. Da neben dem aus dem Elektronenspin herrührenden magnetischen Moment auch noch Momente infolge der Bahnbewegung des Elektrons entstehen, sind nicht alle Elemente mit ungerader Ordnungszahl paramagnetisch.

Das magnetische Moment der Elektronen kann sich im Magnetfeld ausrichten und hat dann zwei mögliche Einstellungen mit Komponenten  $\pm \frac{h}{4\pi}$  in Feldrichtung ( $h$  ist die PLANCK<sup>40</sup>sche Konstante, s.u.). Allerdings wirkt deren Ausrichtung die thermische Bewegung der Teilchen entgegen, so dass das gesamte magnetische Moment einer paramagnetischen Probe nur ein kleiner Bruchteil der Summe der magnetischen Momente der ungepaarten Elektronen darstellt. Immerhin ist dieser Effekt etwa 1000fach stärker als der Diamagnetismus.

Von besonderer Bedeutung für die praktische Anwendung ist der *Ferromagnetismus*. Die in diesen Stoffsystemen enthaltenen ungepaarten Elektronenspins üben eine starke Wechselwirkung aufeinander aus, infolge der für benachbarte Spins eine parallele Ausrichtung energetisch vorteilhaft ist. Diese sogenannte HEISENBERG<sup>41</sup>sche *Austauschwechselwirkung* wirkt unabhängig vom Vorhandensein eines äußeren Magnetfeldes. Als Folge bilden sich makroskopische Bereiche (*Domänen*) mit paralleler Spinorientierung heraus. Diese auch WEISS<sup>42</sup>sche *Bezirke* genannten Gebiete sind wie kleine Magnete zu betrachten, die ohne äußeres Feld ungeordnet sind. Bei Einschalten eines Magnetfeldes wachsen die Bereiche mit Magnetisierung in Feldrichtung auf Kosten der energetisch ungünstigeren Ausrichtungen. Der Umordnungsprozeß ist dann abgeschlossen, wenn infolge eines sehr starken äußeren Feldes alle magnetischen Momente in Feldrichtung verlaufen, der Ferromagnet hat dann seine *Sättigungsmagnetisierung* erreicht.

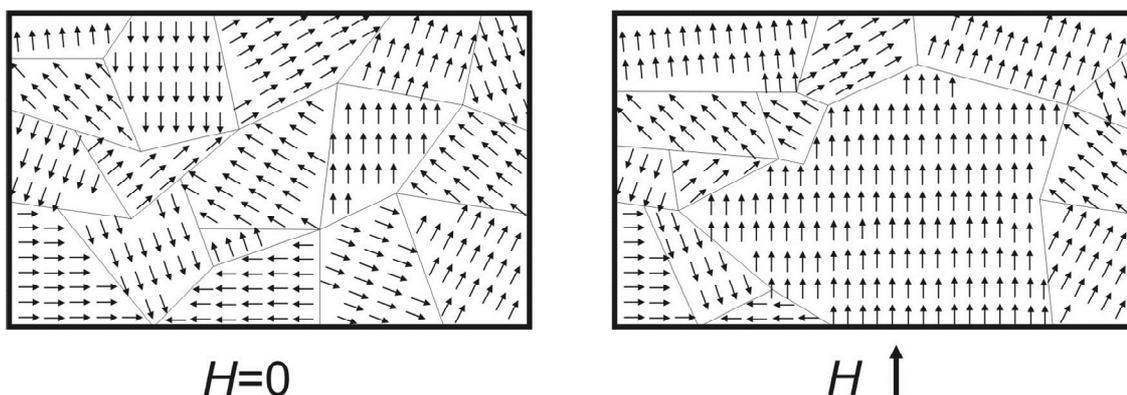


Abb. 3.15 Weiss'sche Bezirke

Bei Ferromagneten ordnen sich unterhalb der Curietemperatur benachbarte ungepaarte Elektronenspins als Folge der Heisenbergschen Austauschwechselwirkung spontan vorzüglich parallel aus, bilden hierbei die Weiss'schen Bezirke. Bei Einschalten eines äußeren Magnetfeldes wachsen die Bereiche mit Dipolorientierung in Feldrichtung auf Kosten solcher mit anderen Orientierungen. Bei Erreichen der Sättigung sind alle Elektronenspins in Feldrichtung orientiert.

Der Ferromagnetismus weist eine charakteristische Temperaturabhängigkeit auf. Wird ein solcher Stoff über eine bestimmte Temperatur  $T_c$  erwärmt (*CURIE*<sup>43</sup>-*Temperatur*), verliert er seinen Ferromagnetismus und wird zum Paramagneten. Wie der Name vermuten lässt, sind Eisen und Eisenverbindungen ferromagnetisch. Das ist in der Tat so, die Permeabilitäten liegen oft weit über  $10^3$ . Ferromagnetismus weisen jedoch noch viele andere Elemente und deren Verbindungen auf, von größter praktischer Bedeutung sind magnetische Keramiken (Ferrite), eher exotisch anmutend sind organische Polymere mit ferromagnetischen Eigenschaften.

<sup>40</sup> Max Karl Ernst Ludwig PLANCK (1858-1947), dt. Physiker; Begründer der Quantenphysik, Nobelpreis 1918; Thermodynamik; Relativitätstheorie

<sup>41</sup> Werner HEISENBERG (1901-1976), dt. Physiker; Turbulente Flüssigkeiten, Unschärfeleration (1932 NP), Matrizenmechanik, Ferromagnetismus, dt. Uranprojekt, setzte sich später gegen atomare Wiederbewaffnung ein – Göttinger Manifest 1957, arbeitete 1927-1931 in Leipzig

<sup>42</sup> Pierre WEISS (1865-1940), frz. Physiker; Ferromagnetismus; Curie-Weiss-Gesetz; Domänen; Molekularfeld

<sup>43</sup> Pierre CURIE (1859-1906), frz. Physiker; Radiochemie mit seiner Frau Marie Nobelpreis 1903; Piezoelektrizität; Kristallphysik; Temperaturverhalten von Dia- und Paramagnetika

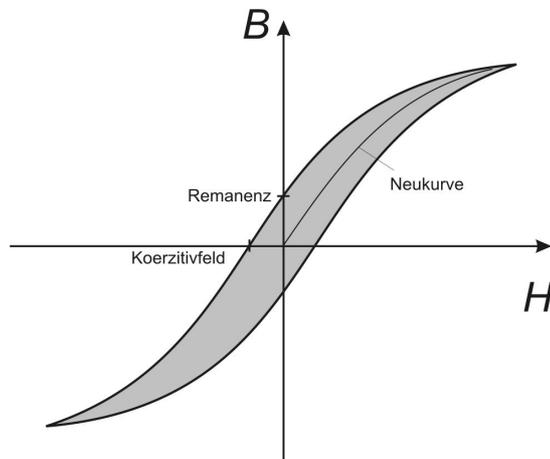
Tabelle 3.1 Curietemperaturen von Ferro- und Ferrimagnetischen Stoffen (ab Raumtemp. in °C)

Fe	770	Cu-Mn-Al-Leg.	60-440	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	585
Co	1130	CrO <sub>2</sub>	119	Nd-Fe-B	310
Ni	360	Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	287	MüMetall	400
Gd	19	CuOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	455	SmCo <sub>5</sub>	720
AlNiCo	720-855				

Man unterscheidet zwischen hartmagnetischen und weichmagnetischen Werkstoffe. Bei Weichmagneten sind *Remanenz* sowie *Koerzitivkraft* gering, die *Hysterese* entsprechend schlank (s. Abb.3.16). Anwendung finden diese Stoffe bei Geräten zur Erzeugung und Umwandlung elektrischer Energie (Transformatoren, Generatoren, Motoren) sowie in der Hochfrequenztechnik (Antennenstäbe, Übertrager, Filter). Hartmagnetische Werkstoffe sind alle Dauermagnete. Für die Informatik von besonderem Interesse ist die Verwendung als Material für Magnetspeicher (Magnetbänder, Disketten, Festplatten).

### Abb. 3.16 Magnetische Hysterese

Abhängigkeit der magnetischen Induktion  $B$  von der Feldstärke  $H$ . Wird das Material erstmals einem Magnetfeld ausgesetzt, folgt  $B(H)$  der *Neukurve*. Bei Verringerung des  $H$ -Feldes verringert sich zwar die Induktion, es verbleibt aber infolge einer nicht vollständig verschwindenden Restmagnetisierung die *Remanenz*. Erst bei Anlegen eines Gegenfeldes (*Koerzitivfeld* oder *-kraft*) verschwindet das  $B$ -Feld, um sich bei noch anwachsendem  $H$ -Feld dann in der Richtung umzukehren. Die während eines vollständigen Zyklus umschriebene Fläche entspricht der Arbeit je Volumeneinheit, die bei der Ummagnetisierung letztlich in Wärme umgewandelt wird.



### 3.8. Magnetische Datenspeicher

Hier finden magnetische Werkstoffe Anwendung, deren Hysterese einen nahezu rechteckigen Verlauf hat, mit entsprechend hoher Remanenz sowie Koerzitivkraft. Als *Ferritkernspeicher* wurden früher filigrane Gebilde aus mit Drähten verbundenen winzigen Ferritringen verwendet. Heute von Festkörperschaltkreisen längst verdrängt, bildeten sie früher als RAM mit Kapazitäten von höchstens einigen hundert Kilobytes die Arbeitsspeicher der ersten Rechnergenerationen.

Im Unterschied zu den Ferritkernspeichern finden heute noch magnetische Speichermedien auf Bändern, Disketten oder Festplatten breite Verwendung. Das Funktionsprinzip ist in diesen Fällen identisch. Auf einem nichtmagnetischen Trägermaterial befindet sich eine dünne magnetisierbare Schicht aus Eisenoxid, Chromdioxid oder einer Metalllegierung. Die Magnetisierung erfolgt mittels eines Schreibkopfes, bestehend aus einer Spule um einen geschlitzten weichmagnetischen Ringkern. Der Spulenstrom erzeugt ein je nach Stromrichtung veränderliches Magnetfeld, welches besonders am Luftspalt (in der Regel befindet sich im Spalt unmagnetisches Material, schön blank poliert, um den Datenträger zu schonen) als Streufeld austritt und die magnetisierbare Schicht durchsetzt. Diese enthält folglich Bereiche mit unterschiedlicher Magnetisierung, in deren Richtung jeweils die Information enthalten ist. An einem analog aufgebauten Lesekopf vorbeigeführt, induzieren die magnetisierten Bereiche Spannungen, deren Vorzeichen die ausgelesene Information enthält.

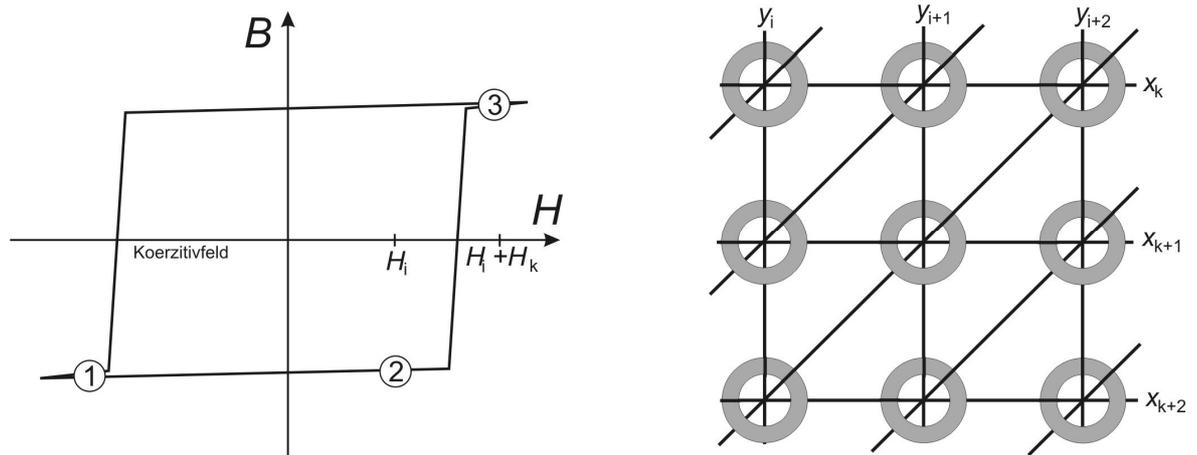


Abb. 3.17 Wirkungsweise eines Ferritkernspeichers

Jeder Ring der Speichermatrix rechts realisiert durch seine Restmagnetisierung ein Bit Information. Durch jeden der Ringe verlaufen je ein horizontaler sowie vertikaler Draht. Die Indizes sind vergleichbar der Indizierung einer Matrix. Eine definierte Magnetisierung wird dadurch erreicht, dass durch alle x- und y- Drähte ein Stromstoß erfolgt, durch den jeder Ring einem ausreichend starken H-Feld ausgesetzt wird, wodurch die Position (1) in der links dargestellten Hysteresis eingenommen wird, welcher wir die Information "L" zuschreiben. Soll jetzt in das Matrixelement  $(x_k; y_i)$  die Information "H" eingeschrieben werden, wird ein Strom durch den Draht  $x_k$  geschickt, der an allen Ferritringen dieser Zeile ein Magnetfeld  $H_k$  erzeugt, welches aber geringer als das Koerzitivfeld ist, demzufolge an Position (2) keine Ummagnetisierung bewirkt. Erst ein gleichzeitiger Stromstoß durch den Draht  $y_i$  bewirkt ein solches Resultat an (3), und zwar nur für den Ferritring mit  $(x_k; y_i)$ .

Das Auslesen erfolgt, indem zeilen- und spaltenweise eine Ummagnetisierung (z.B. in Richtung "H") versucht wird. Ist sie erfolgreich (das wird durch einen Induktionsspannungsstoß am zusätzlich durch jeden Ring gefädelten diagonalen Draht detektiert), muss anschließend wieder rückmagnetisiert werden.

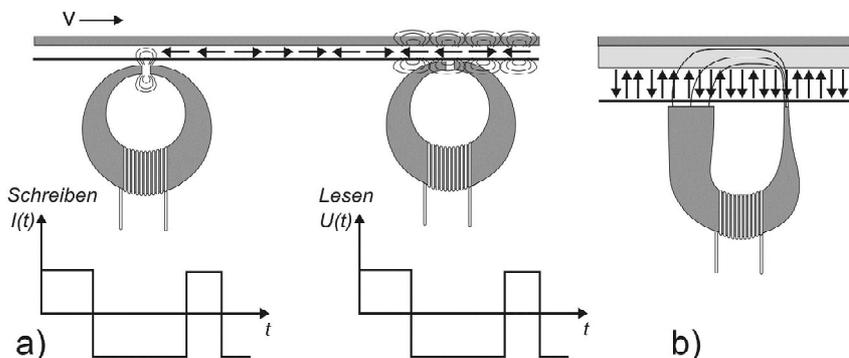


Abb. 3.18 Wirkungsweise eines Magnetbandspeichers

Zwei im Aufbau prinzipiell ähnliche Ringspulen "schreiben" bzw. "lesen" die Information als Richtung von Magnetisierungen kleiner Bereiche der Magnetschicht.

a) *longitudinale* Technik

b) *perpendicular recording*

Die bei Festplatten früher vorherrschende *longitudinale* Aufzeichnungstechnik ermöglichte eine maximale Datendichte von 15 bis 30 Gigabit pro Quadratzentimeter. Hierbei liegt die Magnetisierungsrichtung parallel zur Oberfläche. *Perpendicular recording* ermöglicht dagegen eine etwa 10fach höhere Datendichte. Der schmale Schreibkopf bündelt die Feldlinien auf eine kleine magnetisierbare Fläche. Der zweite Magnetpol ist deutlich breiter, wodurch die Feldstärke dort unterhalb der Koerzitivkraft bleibt. Zum besseren Schluss der Feldlinien ist eine zusätzliche weichmagnetische Zwischenschicht notwendig, die quasi wie das Joch eines Hufeisenmagneten wirkt.

### 3.9. Der Wechselstromgenerator

Die Erzeugung von Wechselstrom erfolgt meist mit einer Anordnung, die im einfachsten Fall durch eine im Magnetfeld rotierende Leiterschleife dargestellt werden kann.

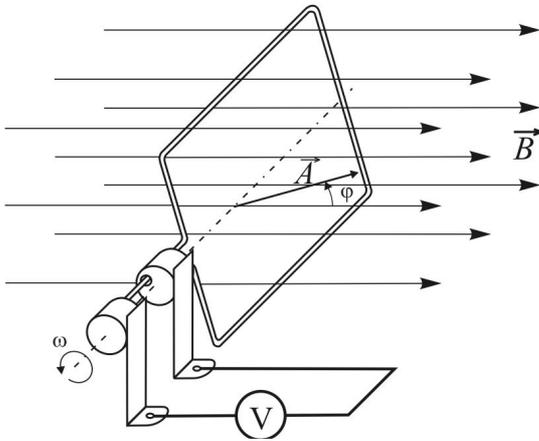


Abb. 3.19 Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld

Die Drehachse ist hier senkrecht zu den Feldlinien der (homogenen) Flussdichte  $\vec{B}$  orientiert. Der Winkel  $\varphi$  zwischen dem Flächenvektor  $\vec{A}$  und der Flussdichte  $\vec{B}$  ist der Rotationswinkel  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ . Die induzierte Spannung wird über die beiden Schleifkontakte abgenommen und mit einem Voltmeter gemessen. Verantwortlich für die Induktion ist die Zeitabhängigkeit der Flächenprojektion  $A_n(t) = A \cos\varphi(t)$

Die Leiterschleife wird durchsetzt von einem Magnetfluss

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos(\varphi) = \Phi_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.40)$$

Wie aus (3.40) ersichtlich, ändert sich der Fluss durch die Leiterschleife in Abhängigkeit vom Rotationswinkel  $\varphi$ , also wie die Projektion der Schleifenfläche  $A$  auf die Normalebene des Magnetfeldes. Dadurch wird in der Leiterschleife eine Spannung und, bei geschlossenem Stromkreis, ein Strom erzeugt. Beide, Strom und Spannung, sind proportional zu  $\frac{d\Phi}{dt}$ . Das Induktionsgesetz erlaubt uns die Berechnung dieser Größen:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \Phi_0 \cdot \sin(\omega t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$U_{ind} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.41)$$

Bei  $N$  Windungen einer Leiterschleife mit gleicher Schleifenfläche addieren sich die Spannungen jeder einzelnen Windung, wir erhalten somit  $U_{ind} = N U_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Wird das Voltmeter in der Anordnung nach Abb. 3.19 durch ein Amperemeter ersetzt, kann der in der Leiterschleife fließende Strom gemessen werden. Da das Strommessgerät nur einen sehr kleinen Innenwiderstand aufweist und die Leiterschleife auch so gebaut werden kann, dass ihr Leitungswiderstand sehr gering ist, könnte man unter diesen Umständen einen sehr hohen Strom erwarten, der im Idealfall gegen unendlich strebt. Dies sollte einher gehen mit unendlich hoher elektrischer Leistung ( $P = UI$ )! Spätestens hier werden wir skeptisch (eine solche Leiterschleife ließe sich ja selbst im Magnetfeld von nur mäßiger Stärke gar nicht drehen, denn die aufzuwendende mechanische Leistung wäre ja mindestens ebenso groß wie die elektrische) und neugierig auf die Ergebnisse einer quantitativen Betrachtung.

Bei kurzgeschlossener Leiterschleife und vernachlässigtem Innenwiderstand wird die induzierte Spannung durch die Selbstinduktionsspannung der Schleife kompensiert (die induzierte Spannung tritt gegen die Selbstinduktionsspannung an):

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (3.42)$$

Den Strom durch die Leiterschleife erhalten wir durch Integration und einfache Umformungen:

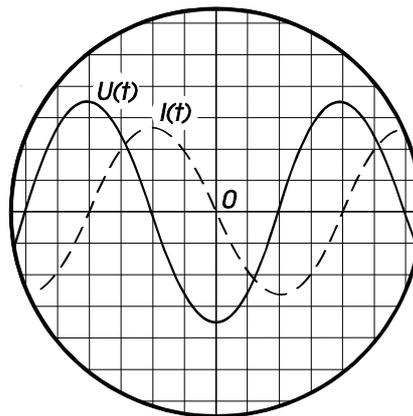
$$\int U dt = L \cdot I$$

$$I = -\frac{\Phi_0}{L} \cos(\omega t + \varphi_0) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) \quad (3.43)$$

Vergleicht man die Ergebnisse in den Glgn. 3.41 und 3.43 erkennt man, dass die Zeitabhängigkeiten von Strom und Spannung gleichermaßen durch Sinusfunktionen beschrieben werden. Es tritt aber eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von  $\pi/2$  auf, die Spannung eilt dem Strom um eine viertel Periode voraus, s. Abb. 3.20.

Abb. 3.20 Zeitverlauf von Strom und Spannung an der kurzgeschlossenen Leiterschleife

Abgebildet ist der Bildschirm eines Zweistrahloszilloskops, welches ermöglicht, den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung gleichzeitig zu verfolgen. Die Phasenverschiebung von  $+\pi/2$  der Spannung gegenüber dem Strom ist daran zu erkennen, dass die Spannung  $U(t)$  ihr Maximum um eine viertel Periode eher erreicht, als der Strom  $I(t)$ . Da die Abtastung des Bildschirms durch den Elektronenstrahl beim Oszilloskop von links nach rechts erfolgt, erscheint die  $U(t)$ -Kurve gegenüber dem Verlauf  $I(t)$  nach links versetzt.



Die Amplitude der induzierten Spannung hängt von der Kreisfrequenz ab, die des Stromes dagegen nicht (letztere hat überdies einen endlichen Maximalwert). Hier erinnern wir uns an die *Lenzsche Regel*, die besagt, dass induzierte Spannungen und Ströme ihrer Ursache entgegen wirken. Die Ursache der induzierten Spannungen und Ströme liegt in unserem Fall im sich gegenüber der Leiterschleife *ändernden* Magnetfeld. Also wird der durch die Induktion erzeugte Stromfluss mit einem Magnetfeld verbunden sein, welches den *Flussänderungen* des äußeren Feldes durch die Schleife entgegengesetzt ist. Bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes ist der die Leiterschleife durchsetzende Magnetische Fluss (als Summe des äußeren Feldes sowie des induzierten) also konstant! Dies lässt sich eindrucksvoll an einem Supraleiter zeigen, der in ein Magnetfeld gebracht wird. Während des Einbringens induziert das Anwachsen des den Supraleiter durchsetzenden Magnetischen Flusses ein Gegenfeld, so dass der Fluss im Inneren des Supraleiters konstant Null ist, äußeres und inneres Feld sind einander entgegen gerichtet. Bei ausreichend starkem äußeren Feld sind die hierbei auftretenden abstoßenden Kräfte groß genug, den Supraleiter über einem anderen Magneten schweben zu lassen (s. Vorlesungsversuch zum Meissner-Ochsenfeld-Effekt).

Wie groß ist die Leistung einer im Magnetfeld rotierenden Leiterschleife? Bekanntlich erhält man die Leistung aus dem Produkt von Strom und Spannung. Da beide zeitabhängig sind, ergibt sich auch eine zeitabhängige Leistung  $P(t) = U(t) I(t) = \frac{\omega}{L} \Phi^2 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega}{2L} \Phi^2 \sin 2\omega t$ .

Diese Leistung dient dazu, das zeitabhängige Magnetfeld der Leiterschleife auf-(und ab-)zubauen, tritt also als Feldenergie in Erscheinung. Im Mittel ist diese Leistung aber, ebenso wie die zur Aufrechterhaltung der Rotation benötigte mechanische Leistung, gleich Null. Man bezeichnet sie deshalb als *Blindleistung*  $Q$ . Bei Berücksichtigung eines Ohmschen Widerstandes der Spule („reale“ Spule) gilt für die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom  $I = I_0 \sin \omega t$  und Spannung  $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , die an den Anschlüssen der Spule gemessen wird,  $0 < \varphi < 90^\circ$ .

Eine ganz ähnliche Betrachtung lässt sich übrigens auch für Ströme und Spannungen am Kondensator anstellen. Die Phasenverschiebung ist in diesem Falle negativ  $-90^\circ < \varphi < 0$  und weist beim idealen Kondensator (kein Ohmscher Widerstand) den niedrigsten Wert auf. Zur Berechnung solcher Phasenbeziehungen wird im Kapitel 4 die Methode der *Komplexen Wechselstromrechnung* angewendet.

### 3.10. Der Effektivwert von Strom und Spannung

In einem Ohmschen Widerstand  $R$  wird keine Energie in Form von elektrischen oder magnetischen Feldern gespeichert, sondern elektrische sofort in thermische Energie umgesetzt (dissipiert). Zur Berechnung der elektrischen Leistung an einem Widerstand zum Zeitpunkt  $t$  ist auch hier das Produkt von Spannung und Strom zu bilden:  $P(t) = U_R(t) I(t)$ .  $U_R$  ist die am Widerstand abfallende Spannung. Sie ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz  $U_R(t) = R I(t)$ . Somit tritt am Ohmschen Widerstand keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auf. Offensichtlich ist auch die am Widerstand umgesetzte Leistung zeitabhängig. Wir bestimmen gleich die mittlere Leistung und führen die Mittelung über den Zeitraum einer Periode  $T$  der Wechselspannung durch. Wir erhalten für die *Wirkleistung*

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{1}{T R} \int_0^T U^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T R} \int_0^T U_0^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{2 R} \\ \bar{P} &= \frac{U_0^2}{2 R} = \frac{I_0^2 R}{2}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Diese mittlere Leistung vergleicht man mit Bedingungen, bei denen bei einer Gleichspannung eine Ohmsche Last die gleiche Leistung aufnehmen würde und definiert so die *Effektivwerte* von Spannung und Strom:

$$\bar{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 R.$$

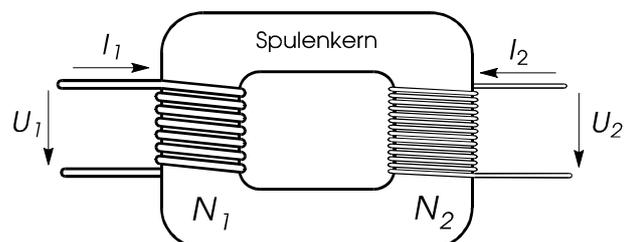
Effektivwerte von Strom und Spannung $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ , $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$	(3.45)
--	--------

### 3.11. Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, Primärspule und Sekundärspule mit i.a. verschiedenen Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ , die von einem gemeinsamen Magnetfluss durchsetzt werden. Dieser Magnetfluss wird meist durch einen hochpermeablen Kern (Ferrit oder Paket aus Trafoblech) gebündelt. Hierdurch wird eine hohe Energiedichte des Magnetfeldes im Spulenkern erreicht. Weiterhin treten bei guter Kopplung nur wenige Feldlinien aus dem Transformator aus, die Störwirkung nach außen wird begrenzt und die Energieübertragung zwischen den gekoppelten Spulen verbessert.

Abb. 3.21 Transformator

Bei niederfrequenten Wechselströmen besteht der Spulenkörper meist aus einem Paket hochpermeabler Trafobleche, deren einzelne Lagen zur Verminderung von Wirbelstromverlusten elektrisch isoliert sind. Bei Hochfrequenzanwendungen werden ausschließlich Ferritkörper verwendet.



Folgende stark vereinfachte(!) Betrachtung soll das Wirkprinzip des Transformators erläutern: Eine Änderung der an der Primärspule anliegenden Spannung ist nach dem Induktionsgesetz mit einer Änderung von  $\dot{\Phi}$  verbunden:

$$U_1(t) = \frac{N_1 \cdot d\Phi}{dt}.$$

Die Primärspule wird als Verbraucher wirksam, aus diesem Grunde das positive Vorzeichen. In der Sekundärspule induziert dieselbe Flussänderung  $\dot{\Phi}$  die Spannung

$$U_2(t) = -\frac{N_2 \cdot d\Phi}{dt}.$$

Daraus ergibt sich die Spannungsübersetzung des Transformators zu

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

Genau genommen gilt diese Gleichung nur für den idealen unbelasteten Trafo, also ohne Ohmschen Widerstand beider Wicklungen sowie mit offenen Klemmen an der Sekundärwicklung, an denen nur die Spannung gemessen wird (*Leerlauf*). Der Primärstrom  $I_1$  ist dann ein reiner Blindstrom und  $U_1$  und  $U_2$  sind gegenphasig.

Beim *belasteten* Transformator treten durch induktive bzw. kapazitive Lasten Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung sowohl auf Primär- als auch auf Sekundärseite auf. Bei Annahme einer vollständigen magnetischen Kopplung zwischen Primär- und Sekundärspule (keine Streuung der Feldlinien) sowie Vernachlässigung von Energieverlusten durch Hysterese (sog. *Eisenverluste*) und Ohmschen Widerstand (sog. *Kupferverluste*) der Wicklungen gilt  $P_1 = P_2$  bzw. (s. hierzu Glg. 4.11)

$$U_1 \cdot I_1 \cos \varphi_1 = U_2 \cdot I_2 \cos \varphi_2.$$

Der andere Grenzfall des Trafos zum Leerlauf ist der *Kurzschluss*. Die in der Sekundärwicklung induzierte *Gegeninduktionsspannung* wird vollständig durch die *Selbstinduktionsspannung* aufgezehrt. Beide Ströme verlaufen gegenphasig. Somit folgt aus der Leistungsbilanz

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}} \quad (3.46)$$

Durch eine geringe Wicklungszahl der Sekundärspule besteht also die Möglichkeit zur Erzeugung sehr starker Ströme, durch eine hohe Wicklungszahl können sekundärseitig sehr hohe Spannungen erzeugt werden. Das negative Vorzeichen in (3.46) findet i.a. keine Beachtung, da durch willkürliche Wahl der Anschlüsse bzw. Wicklungssinn der Sekundärspule stets die gewünschte Strom- bzw. Spannungsrichtung eingestellt werden kann.

Transformatoren werden in der Technik vielseitig angewendet:

- Umwandlung der Amplituden von Wechselspannungen und -Strömen je nach Bedarf
- Anpassung an den Wechselstromwiderstand eines Verbrauchers (Impedanzwandler)
- Verlustarme Energieübertragung durch Verwendung von Hochspannungsleitungen
- Leistungsbegrenzung durch Ausnutzung von Sättigungseffekten (Drossel)
- Trennung eines Netzanschlusses vom Erdpotential (Trenntrafo, Arbeitsschutz!)

**Übungen**

**3.22.** Eine 100 W Glühlampe wird an die Netzspannung von 230 V angeschlossen. Berechnen Sie Effektiv- und Scheitelwert der Stromstärke sowie die elektrische Energie, welche die Lampe in der Zeit von 3 h umsetzt.

**3.23.** Ein Hochstromtransformator hat sekundärseitig eine einzige Windung aus sehr dickem Kupferdraht. Wie groß ist der darin fließende Strom, wenn die Primärspule mit 500 Windungen bei Netzanschluss eine Leistung von 60 W aufnimmt?

**3.24.\*** Auf einen Ringkern aus Eisen (Dichte  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ ), der Permeabilität  $\mu_r = 4000$  mit der Länge (der "Seele")  $l = 200 \text{ mm}$  und dem Durchmesser  $d_i = 20 \text{ mm}$  ("lange" Ringspule) befinden sich Primär- und Sekundärwicklungen eines Trafos.

- Schätzen Sie unter Vernachlässigung aller Übertragungsverluste ab, wie groß die maximal übertragbare Leistung bei Netzfrequenz ist, wenn zur Vermeidung von Sättigungseffekten eine maximale Induktion von 0,8 T nicht überschritten werden darf!
- Wie groß ist diese Leistung, wenn der Trafo in einem Schaltnetzteil eingesetzt wird, wobei die Betriebsfrequenz 25 kHz beträgt, die Permeabilität des Ferritwerkstoffes (Dichte  $\rho = 4,1 \text{ g/cm}^3$ ) bei dieser Frequenz  $\mu_r = 1000$  und der maximal zulässige Spitzenwert der Induktion 0,4 T betragen darf?
- Vergleichen Sie das Leistung/Masse - Verhältnis der Kerne beider Trafos.

*Hinweis:* Die bei jeder Ummagnetisierung (also zweimal innerhalb einer Schwingungsperiode des elektrischen Stromes!) des Kernes übertragene Arbeit ist als magnetische Energie im Spulenkern zwischengespeichert.

*Lösung:* Der Ringkern entspricht einer langen Spule der Länge  $l$  und kreisförmigem Kernquerschnitt mit dem Durchmesser  $d_i$ . Zu berechnen ist der Energieinhalt bei auf  $B_{\max}$  magnetisiertem Spulenkern. Diese Energie wird  $2f$  mal ( $f$ -Frequenz) während einer Sekunde auf die Sekundärseite übertragen. Hieraus kann man die Leistung  $P = \Delta W / \Delta t = \Delta W \cdot 2f$  berechnen

$$\Delta W = B \cdot H \cdot V / 2 = \frac{B^2 V}{2\mu_r \mu_0} = \frac{B^2 \cdot l \cdot A}{2\mu_r \mu_0}$$

$$P = 2f \cdot \Delta W = \frac{f \cdot B^2 \cdot l \cdot \pi d_i^2}{\mu_r \mu_0 4}$$

zu a)  $P_a = 0,4 \text{ W}$

zu b)  $P_b = 200 \text{ W}$

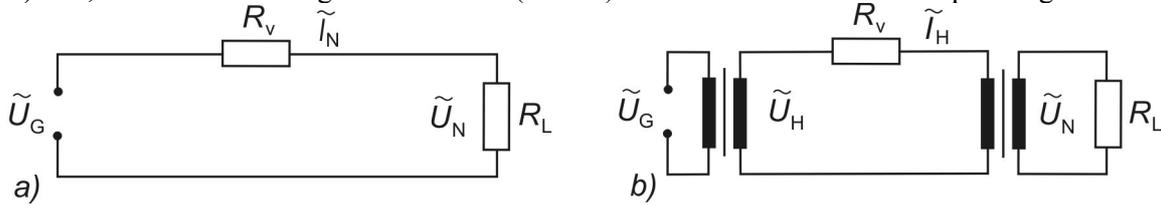
zu c)  $\rho_a = \frac{m_a}{V_a}$ ; hieraus folgt:  $\frac{P_b / m_b}{P_a / m_a} = \frac{m_a \cdot P_b}{m_b \cdot P_a} = \frac{\rho_a \cdot P_b}{\rho_b \cdot P_a} = \underline{\underline{944}}$

Die Verwendung eines Schaltnetzteiles führt also zu einer ganz erheblichen Einsparung von Masse.

### 3.25. Leistungsübertragung mittels Hochspannung

Die Leistung  $P$  soll an einem Ohmschen Widerstand  $R_L$  wirksam werden. Der Widerstand der Zuleitung sei  $R_V$ , es gilt  $R_V \ll R_L$ . Bestimmen Sie die am Leitungswiderstand auftretenden Leistungsverluste

- $P_V$ , wenn die Generatorspannung  $U_G$  direkt über diese Leitung eingespeist wird,
- $P_V'$ , wenn die Zuleitung mittels zweier (idealer) Transformatoren mit Hochspannung  $U_H$  betrieben wird.

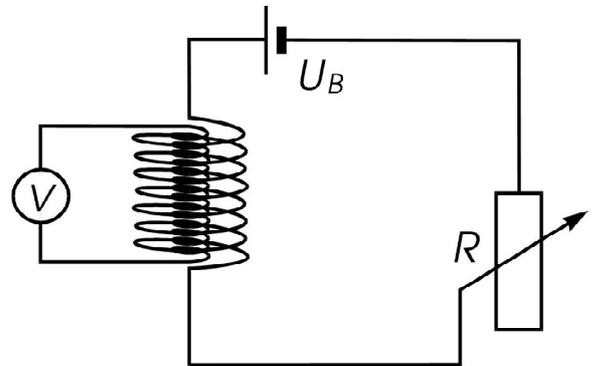


*Lösung:* Die Verlustleistung am Leitungswiderstand berechnet sich nach  $P_V = I_{eff}^2 \cdot R_V$ . Somit folgt aus

$$(3.42) \text{ für das Verhältnis der Verlustleistungen } \frac{P_V}{P_V'} = \left( \frac{I_N}{I_H} \right)^2 = \left( \frac{U_H}{U_N} \right)^2.$$

**3.26.\*** Zwei jeweils 15 cm „lange“ eisenfreie Zylinder­spulen sind konzentrisch und im gleichen Wicklungs­ sinn gewickelt. Die äußere Spule hat 2500 Windungen und einen Durchmesser von 2 cm. Die innere Spule entsprechend 1250 Windungen bei einem Spulendurch­ messer von 10 mm. Der Strom wird durch ein Potentiometer innerhalb von 2 Sekunden von 5 A auf 15 A gere­ gelt (linearer Anstieg). Welche Spannung wird am Messgerät abgelesen und wie sind die Vorzeichen (an den Klemmen angeben, Begründung)?

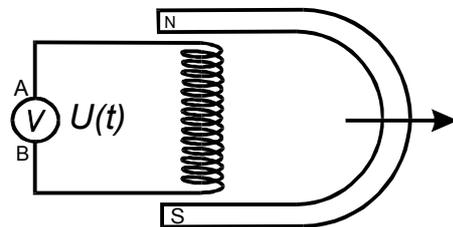
Ersetzt man das Voltmeter durch ein Amperemeter, welche Stromstärke  $I(t)$  wird gemessen?



Ergebnis:  $U_i = 10,3 \text{ mV}$ ;  $I(t) = 10 \text{ As}^{-1} \cdot t$

**3.27.\*** Eine  $l = 15 \text{ cm}$  "lange und dünne" Luftspule (Durchmesser  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $N = 1000$  Windungen Wick­ lungsrichtung: Rechtsschraube) befindet sich zwischen den Polen eines Permanentmagneten. Im Bereich der Spule sei das Feld homogen, die Feldlinien verlaufen parallel zur Längsachse der Spule. Während der Mag­ net langsam von der Spule entfernt wird (bis die Feldstärke in der Spule gegen Null geht) mißt man die dabei induzierte Spannung  $U(t)$ .

- Tragen Sie die Richtung der Flussdichte  $\vec{B}$  des Permanentmagneten ein und an A und B die Polarität der induzierten Spannung während des Wegziehens des Magneten (Begründung mit *Lenz'scher Regel*).



- Das Integral der induzierten Spannung über den Zeitraum  $0 < t < t'$  des Wegziehens ergibt einen

Wert von  $\int_0^{t'} U(t) dt = 0,05 \text{ Vs}$ , wie groß ist demzufolge die maximale Flussdichte?

- Wird anstelle des Voltmeters ein Amperemeter eingesetzt, misst man während des Wegziehens einen ständig anwachsenden Strom. Bestimmen Sie unter Anwendung der *Lenz'schen Regel* dessen Richtung sowie Maximalwert (*Ohmscher Widerstand* ist zu vernachlässigen).

Ergebnis:  $B = 70 \text{ mT}$ ;  $I = 8,4 \text{ A}$

## 4. Zeitabhängige Spannungen und Ströme in Netzwerken

Im vorigen Abschnitt wurde dargelegt, wie durch zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Spannungen in Leitern induziert werden und welche großen praktischen Möglichkeiten sich prinzipiell daraus ergeben. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die Berechnung von Netzwerken bei zeitlich veränderlichen Spannungen und Strömen durchführt. Es wird kurz auf die Prozesse beim Ein- bzw. Ausschalten von Spannungen an Netzwerken eingegangen. Von größter Bedeutung ist die Behandlung harmonischer Wechselgrößen wegen ihrer überragenden Bedeutung bei allen Prozessen der elektrischen Energie- und Informationsübertragung, angefangen von der Frequenz des Stromnetzes bis zum Gigahertzbereich der Kommunikation über Satelliten.

### 4.1. Ein- und Ausschaltvorgänge

Bei der Berechnung von Spannungen und Strömen in Netzwerken wurde bisher vom stationären Fall ausgegangen. Wir wollen jetzt solche Vorgänge untersuchen, die kurz nach dem Ein- bzw. Ausschalten von Spannungsquellen in Netzwerken mit Induktivitäten und Kapazitäten ablaufen. Die hierbei auftretenden Ströme und Spannungen weisen ein charakteristisches Zeitverhalten auf, das durch die Geschwindigkeit des Auf- bzw. Abbaues von magnetischen und elektrischen Feldern in Spulen und Kondensatoren geprägt wird. Wir wollen dies an zwei einfachen Beispielen untersuchen.

#### 4.1.1. Kondensator und Ohmscher Widerstand

Das einfachste Beispiel für den Einschaltvorgang mit Widerstand und Kondensator ist auf Abb.4.1 skizziert.

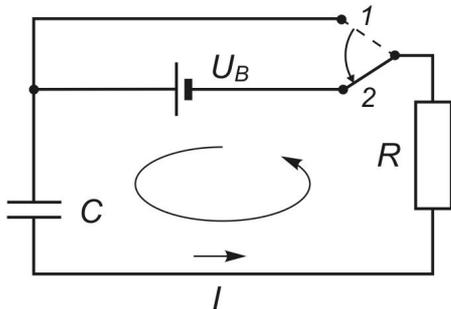


Abb. 4.1 RC-Glied

In Schalterstellung 1 hat sich der Kondensator über den Widerstand entladen. Es fließt kein Strom mehr, die Spannungen an Widerstand und am Kondensator sind Null. Beim Umlegen des Schalters auf die Position 2 lädt sich der Kondensator auf, es fließt der Ladestrom, bis sich der Kondensator auf die Betriebsspannung aufgeladen hat.

Zur Berechnung des Einschaltvorganges wenden wir die Maschenregel an. Bezeichnen wir die an Widerstand und Kondensator auftretenden Teilspannungen mit  $U_R$  bzw.  $U_C$ , erhalten wir

$$U_C + U_R = U_B, \quad (4.1)$$

$$\frac{Q(t)}{C} + RI(t) = U_B,$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' + RI(t) = U_B. \quad (4.2)$$

Die Unbekannte in dieser Gleichung ist die Funktion  $I(t)$ . Da die Gleichung 4.2 auch das Integral über  $I(t)$  enthält, lässt sie sich nicht einfach nach  $I(t)$  umstellen. Außer diesen beiden Ausdrücken sind keine anderen Zeitabhängigkeiten in der Gleichung enthalten, deshalb vermuten wir eine Lösung in Form einer Exponentialfunktion und machen einen Lösungsversuch mit einem sogenannten Lösungsansatz, bei dem der Strom exponentiell von der Zeit abhängt.

Ansatz:  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Hierbei lassen wir uns von der Überlegung leiten, dass die e-Funktion aus Dimensionsgründen mit einem Strom  $I_0$  zu multiplizieren ist und der Exponent stets dimensionslos sein muss, also  $t$  durch

eine Zeit  $\tau$  zu dividieren ist. Sowohl  $\tau$  als auch  $I_0$  sind zunächst unbekannt. Diesen Ansatz verwenden wir und hoffen darauf, dass beim Einsetzen kein Unsinn entsteht.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int_0^t I_0 e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} &= U_B, \\ \frac{1}{C} I_0 (-\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^t + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} &= U_B, \\ -\frac{\tau}{C} I_0 (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} &= U_B. \end{aligned}$$

Da die Gleichung für beliebige Zeiten  $t$  erfüllt ist, muss bei  $t = 0$  der Einschaltstrom den Wert  $I_0 = U_B/R$  annehmen. Weiterhin ergibt sich die *Zeitkonstante*  $\tau = RC$ .

Somit lautet die Lösung  $I(t) = \frac{U_B}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ . Durch Verwendung des Ohmschen Gesetzes (2.9) und der Kirchhoffschen Maschenregel (2.14) lässt sich leicht der Zeitverlauf der Teilspannungen  $U_C$  und  $U_R$  bestimmen. Wir erhalten  $U_R(t) = U_B e^{-\frac{t}{RC}}$  sowie  $U_C(t) = U_B (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ . In Abb.4.2 sind die Zeitabhängigkeiten dieser Funktionen grafisch dargestellt.

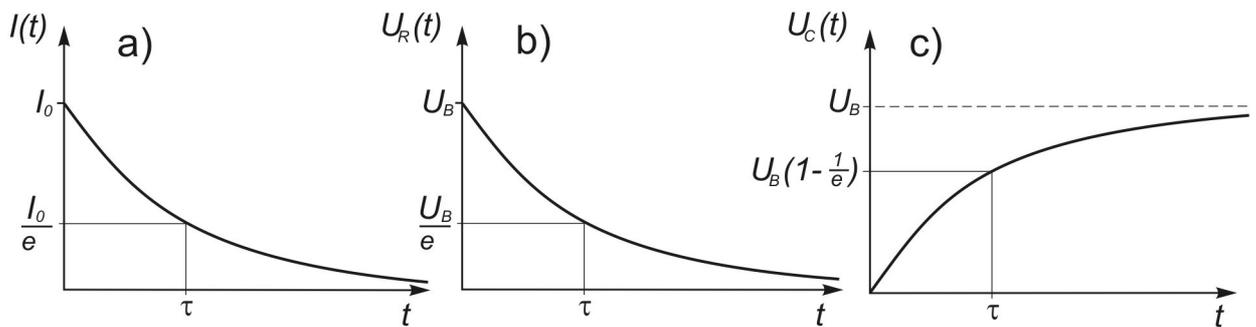


Abb. 4.2 Zeitlicher Verlauf des Stromes  $I(t)$  und der Spannungen am Ohmschen Widerstand  $U_R(t)$  sowie am Kondensator  $U_C(t)$  nach dem Einschalten der Spannungsquelle

Während des Einschaltvorganges wird das elektrische Feld im Kondensator aufgebaut. Die hierzu notwendige Energie wird von der Spannungsquelle geliefert. Wenn nach dem Einschalten lange genug gewartet wird, hat sich der Kondensator auf die Betriebsspannung aufgeladen. Wie groß ist dann die in ihm gespeicherte elektrische Energie?

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= P(t) = U_C(t) I(t), \\ W(t) &= \int_0^t U_C(t') I(t') dt' = \int_0^t U_B (1 - e^{-\frac{t'}{RC}}) \frac{U_B}{R} e^{-\frac{t'}{RC}} dt' = \frac{U_B^2}{R} \int_0^t (e^{-\frac{t'}{RC}} - e^{-\frac{2t'}{RC}}) dt', \\ W(t) &= \frac{U_B^2}{R} \left[ -RC e^{-\frac{t'}{RC}} + \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t'}{RC}} \right] \Big|_0^t = CU_B^2 \left[ -e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} + \frac{1}{2} \right], \\ W(t \rightarrow \infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \frac{C}{2} U_B^2. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis haben wir bereits früher bei der Behandlung des Kondensators abgeleitet. Die obige Betrachtung ist aber aussagekräftiger, da der Energieinhalt des Kondensators in seiner zeitlichen Entwicklung dargestellt ist.

### 4.1.2. Spule und Ohmscher Widerstand

Ein einfaches Beispiel für das Abschalten einer Induktivität ist auf Abb. 4.3 skizziert.

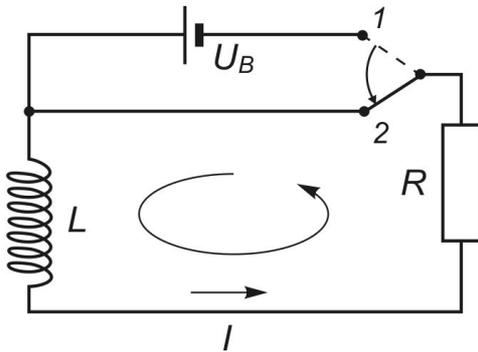


Abb. 4.3 RL-Glied

In Schalterstellung 1 hat sich das Magnetfeld in der Spule aufgebaut, der Strom ist konstant, die Spannung an der Spule ist Null. Beim Umlegen des Schalters auf die Position 2 wird das Magnetfeld abgebaut und die Selbstinduktionsspannung führt zu einem Stromfluss über den Widerstand, bis sich die Energie des Magnetfeldes erschöpft hat.

Wir wenden wieder die Kirchhoffsche Maschenregel an:

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} U_B & \text{(Schalterstellung 1)} \\ 0 & \text{(Schalterstellung 2)} \end{cases} \quad (4.3)$$

Wir wollen zunächst den Ausschaltvorgang untersuchen. Da die diesem Fall entsprechende Differentialgleichung linear und homogen ist, würde auch hier ein Exponentialansatz zum Erfolg führen. Da wir das oben schon einmal probiert haben, wollen wir jetzt eine andere Methode wählen. Hierbei führen wir eine sogenannte *Trennung der Variablen* durch

$$\begin{aligned} RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dI(t)}{I(t)} &= -\frac{R}{L} dt \end{aligned}$$

und integrieren

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^I \frac{dI'(t)}{I'(t)} &= -\frac{R}{L} \int_0^t dt' \\ \ln \frac{I}{I_0} &= -\frac{R}{L} t. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck heben wir in den Exponenten und erhalten die Lösung

$$\underline{I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}, \text{ wobei } I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Die Selbstinduktion der Spule führt somit zu einem zeitlich exponentiell abklingenden Strom analog  $I(t)$  in Abb.4.2a), bei dem die Zeitkonstante durch das Verhältnis von Induktivität und Widerstand gegeben ist:  $\tau = L/R$ . Bei kleinem Ohmschen Widerstand dauert das Abklingen dieses Stromes somit sehr lange, bei einem Supraleiter ewig.

Zur Abb. 4.3 sollte noch eine Bemerkung gemacht werden. Bei Betätigung des Schalters muss vermieden werden, dass der Spulenkreis zeitweise unterbrochen wird, da sofort eine hohe Selbstinduktionsspannung entstünde, die u.a. den Schalter bald gänzlich unbrauchbar machen würde. Da ein Schalter eigentlich nichts anderes darstellt, als ein von der Schalterstellung abhängiger Widerstand (0 oder  $\infty$ ), kann man dafür auch gleich einen Regelwiderstand einsetzen, der sich nur extrem rasch betätigen lassen muss und über einen ausreichend weiten Regelbereich verfügt, s. Abb. 4.4.

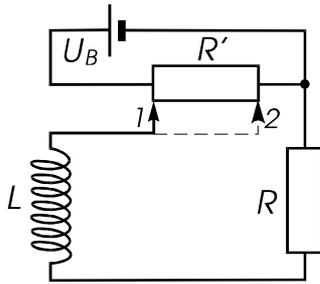


Abb. 4.4 RL-Glied mit "entpreltem Schalter"

Die Schalterfunktion wird hier durch ein Potentiometer realisiert. Hierbei muss eine rasche Betätigung gewährleistet sein (im Vergleich zu  $\tau$ ) und sich der Regelbereich von  $R' \ll 0$  bis  $R' \gg R$  erstrecken. Später werden wir sehen, dass diese Forderungen vortrefflich durch Verwendung von Transistoren erfüllt werden können.

---

## Übungen

**4.1.** Um beim Abschalten von Spulen Funkenbildung zwischen den Schalterkontakten zu vermeiden, werden oft parallel zum Schalter Kondensatoren geschaltet, die die beim Abschalten der Spule freiwerdende magnetische Feldenergie als elektrische Feldenergie zwischenspeichern. Wie groß ist die an einem Kondensator der Kapazität  $4 \mu\text{F}$  auftretende Maximalspannung nach dem Abschalten des Spulenstroms von  $2 \text{ A}$ , wenn die Spule eine Induktivität von  $L = 1 \text{ H}$  aufweist?

**4.2.\*** Ein Kondensator der Kapazität  $C$  soll mit einer Stromquelle auf  $U_0$  aufgeladen werden und durch Umliegen eines Schalters  $S$  über einen Widerstand  $R$  entladen. Kondensatorspannung und Entladestrom werden mit Volt- und Amperemeter gemessen. Der Ladestrom wird mit einem Widerstand  $R_i$  begrenzt.

a) Geben Sie hierzu eine Schaltung an.

b) Der aufgeladene Kondensator wird über einen Widerstand von  $R = 2,2 \text{ k}\Omega$  entladen. 3 Millisekunden nach Beginn des Entladungsvorganges beträgt die Spannung noch  $U(t_1) = 3 \text{ V}$ , eine weitere Millisekunde später nur noch  $U(t_2) = 2 \text{ V}$ . Welchen Wert hatte  $U_0$  und wie groß ist die Kapazität  $C$  des Kondensators?

**4.3.** Berechnen Sie  $I(t)$ ,  $U_R(t)$  und  $U_C(t)$  analog 4.1.1. nach dem Abschalten der Spannungsquelle und die während dieses Prozesses in  $R$  umgesetzte Energie!

**4.4.** Berechnen Sie  $I(t)$ ,  $U_R(t)$  und  $U_L(t)$  analog 4.1.2. nach dem Einschalten der Spannungsquelle und die Zeitabhängigkeit der Energie des magnetischen Feldes der Spule!

---

## 4.2. Komplexe Wechselstromrechnung

### 4.2.1. Der Wechselstromkreis

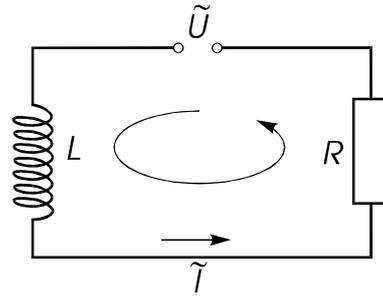
Wird ein elektrisches Netzwerk aus linearen Bauelementen mit Wechselspannung betrieben, sind alle auftretenden Teilströme und Teilspannungen ebenfalls Wechselgrößen. Im folgenden werden wir solche Wechselgrößen betrachten, deren Zeitabhängigkeiten durch Sinusfunktionen gegeben sind. Dieser Fall tritt in der Praxis besonders häufig auf. Andere periodische Vorgänge (z.B. Taktimpulse) oder nichtperiodische Zeitabhängigkeiten sind schwieriger zu behandeln. Prinzipiell ist es jedoch möglich, über die Untersuchung des Verhaltens von Netzwerken bei harmonischen Wechselgrößen konkrete Aussagen über deren Eigenschaften bei Eingangsspannungen mit beliebigen Zeitabhängigkeiten zu machen.

Widerstände, Spulen und Kondensatoren bezeichnet man als *lineare* Bauelemente, da bei diesen lineare Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen auftreten (in der Praxis stimmt das nur näherungsweise, z.B. ist der Widerstand des Glühfadens einer Glühlampe im üblichen Betriebsregime stark nichtlinear, er steigt bei zunehmender Stromstärke an). Eine ganz wichtige Folgerung aus der Linearität der verwendeten Bauelemente besteht darin, dass im Stromkreis ausschließlich die eingespeisten Frequenzen auftreten. Wird ein lineares Netzwerk mit einer Wechselspannung der Frequenz  $f$  betrieben, erscheint in allen Wechselgrößen im Stromkreis nur diese Frequenz.

Es soll jetzt ein ganz einfaches Beispiel betrachtet werden, an dem wir die Besonderheiten bei der Berechnung von Wechselgrößen diskutieren wollen.

Abb. 4.5 Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Da die Kirchhoffschen Regeln auch bei zeitabhängigen Strömen und Spannungen gelten, ist die Vorgabe von Stromrichtungen und Umlaufsinn notwendig. Die zum aktuellen Zeitpunkt jeweils berechneten Ströme und Spannungen beziehen sich in ihren Vorzeichen auf diese Vorgaben.



Wenn die Betriebsspannung eine harmonische Wechselspannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  ist ( $\omega = 2\pi f$ ; auf eine Anfangsphase kann bei der Betriebsspannung verzichtet werden), erhalten wir aus der Kirchhoffschen Maschenregel die Gleichung

$$U_0 \sin \omega t = RI(t) + L\dot{I}(t) \quad (4.4)$$

Wir erwarten, dass auch der Strom eine sinusförmige Zeitabhängigkeit aufweist, merken jedoch schnell, dass ein Ansatz  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  nicht erfolgreich sein wird, da durch die Zeitableitung eine Kosinusfunktion entsteht, die Gleichung also nicht erfüllt werden kann. Wir modifizieren den Ansatz zu  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  und setzen diese Funktion ein:

$$\begin{aligned} U_0 \sin \omega t &= RI_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI_0 \cos(\omega t + \varphi), \\ U_0 \sin(\omega t - \varphi) &= RI_0 \sin \omega t + \omega LI_0 \cos \omega t, \\ U_0(\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) &= RI_0 \sin \omega t + \omega LI_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten

$$\begin{aligned} U_0 \cos \varphi &= RI_0 \\ -U_0 \sin \varphi &= \omega LI_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \cos \varphi \text{ mit } \varphi = \arctan \frac{-\omega L}{R}.$$

Unter Verwendung der Beziehung  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0^2 &= R^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2, \\ I_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_G^2}}} \text{ mit } \omega_G = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dieser Rechnung können wir entnehmen, dass unsere Vermutung über den sinusförmigen Verlauf des Stromes  $I(t)$  richtig war. Es tritt jedoch eine *Phasenverschiebung* gegenüber der Betriebsspannung  $U(t)$  auf, die von der Frequenz abhängt. Eine starke Frequenzabhängigkeit weist die Amplitude  $I_0$  auf. Bei kleinen Frequenzen kann sie nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden (die Induktivität wirkt hier offenbar nicht), bei hohen Frequenzen verringert sich  $I_0$  stark. Bevor wir noch weitere Schlussfolgerungen ziehen, haben wir bemerkt, dass sich selbst bei diesem äußerst einfachen "Netzwerk" die Berechnung von Wechselgrößen zu einer komplizierten Rechenaufgabe auswächst.

Um die Eigenschaften von Schaltungen mit Verzweigungen und vielen Bauelementen berechnen zu können, werden wir uns jetzt eines kleinen Tricks bedienen, der die Lösung solcher Aufgaben ganz entscheidend vereinfacht. Hierzu benötigen wir Grundkenntnisse im Umgang mit komplexen Zah-

len. Am Ende dieses Kapitels finden Sie unter Anhang 4 eine kurze Zusammenstellung hierzu, die als Wiederholung oder Gedankenstütze dienen soll.

### 4.2.1 Komplexe Darstellung von Wechselgrößen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass bei einer eingespeisten Wechselspannung  $U_2(t) = U_0 \sin \omega t$  der Strom durch die Funktion  $I_2(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  beschrieben wird. Wenn wir die Anfangsphase der Spannung anders wählen, wird sich auch die Phase des Stromes entsprechend ändern, so dass für  $U_1(t) = U_0 \cos \omega t$  eine Lösung  $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  existiert. Da die Glg. 4.4 linear ist, gilt diese Betrachtung auch für Linearkombinationen:

$$\begin{aligned} U(t) &= AU_1(t) + BU_2(t) = AU_0 \cos \omega t + BU_0 \sin \omega t \\ &\Rightarrow I(t) = AI_1(t) + BI_2(t) = AI_0 \cos(\omega t + \varphi) + BI_0 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Das Bemerkenswerte dabei ist, dass die Koeffizienten  $A$  und  $B$  willkürlich gewählt werden können, sie können auch komplex sein.

Wir wählen  $A = 1, B = \sqrt{-1} = j^{44}$ . Damit erhalten wir komplexe Wechselgrößen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(t) &= U_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{I}(t) = I_0 (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (4.7) \\ \underline{U}(t) &= \hat{U} e^{j\omega t}; \quad \underline{I}(t) = \hat{I} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Als *komplexe Amplituden* bezeichnet man die Konstanten  $\hat{U}(t) = U_0 e^{j\varphi_U}$ ;  $\hat{I}(t) = I_0 e^{j\varphi_I}$ , wobei die Phase der Eingangsspannung  $\varphi_U$  in (4.7) willkürlich gleich Null gesetzt wurde,  $\varphi$  in (4.7) ist somit die Phasenverschiebung zwischen Strom und Eingangsspannung  $\varphi = \varphi_I - \varphi_U$ .

Mit komplexen Wechselgrößen erhalten wir anstelle (4.4) den Ausdruck

$$U_0 e^{j\omega t} = RI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + L \frac{d}{dt} I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (4.8)$$

Nach Durchführung der Differentiation kann der zeitabhängige Faktor  $e^{j\omega t}$  gekürzt werden, es folgt

$$U_0 = I_0 e^{j\varphi} (R + j\omega L),$$

Die Wirkung der Induktivität entspricht der Multiplikation des Stromes mit einem komplexen Widerstand  $Z_R = j\omega L$ . Anstelle einer Differentialgleichung ist somit lediglich eine algebraische Gleichung zu lösen, allerdings mit komplexen Variablen. Das ist ein wesentlicher Vorteil!

$$I_0 = \frac{U_0}{R + j\omega L} e^{-j\varphi} = \left| \frac{U_0}{R + j\omega L} \right| e^{+j\varphi} e^{-j\varphi} = \left| \frac{U_0}{R + j\omega L} \right|. \quad (4.9)$$

In (4.9) wurde dem Umstand Rechnung getragen, dass  $I_0$  eine reelle Größe ist. Die Amplitude  $I_0$  lässt sich durch Betragbildung bestimmen, der Phasenwinkel  $\varphi$  aus dem Quotienten von Imaginär- und Realteil:

$$\begin{aligned} I_0 &= \left| \frac{U_0}{R + j\omega L} \right| = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_G^2}}}; \\ \frac{U_0}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} &= \frac{U_0(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{\text{Im } \underline{Z}}{\text{Re } \underline{Z}} = \arctan \frac{-\omega L}{R} = \arctan \frac{\omega}{\omega_G}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>44</sup> Die Mathematiker bezeichnen  $\sqrt{-1} = i$ . Bei den Elektrotechnikern ist  $i$  der Effektivwert des Wechselstromes, deshalb wird von ihnen für die imaginäre Einheit der Buchstabe  $j$  verwendet.

Wie wir sehen, stimmen Amplitude und Phasenverschiebung des Stromes mit den oben mittels reeller Rechnung bestimmten Werten überein. Die durch die immer notwendigen Umformungen trigonometrischer Funktionen stets unhandliche reelle Methode lässt sich somit durch Ausweichen auf komplexe Wechselgrößen voll ersetzen. Auf elegante Art und Weise erhält man so die gesuchten Größen Amplitude des Stromes und Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

### 4.2.2. Leistung im Wechselstromkreis

Wir betrachten eine Serienschaltung mit  $R$ ,  $L$  und  $C$  wie auf Abb. 4.6 dargestellt.

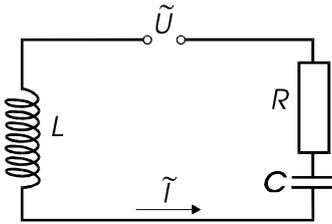


Abb. 4.6 Serienschaltung mit  $R$ ,  $L$  und  $C$

Wie oben bereits festgestellt, muss man bei Wechselgrößen in einer Schaltung, die nicht nur Ohm'sche Widerstände enthält, prinzipiell mit dem Auftreten von Phasenverschiebungen rechnen. Für Spannung und Strom gilt somit  $\tilde{U} = U_0 \cos \omega t$ ,  $\tilde{I} = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ . Uns soll jetzt interessieren, wie groß die vom Netzgerät aufzubringende Leistung ist:

$$\tilde{P} = \tilde{U} \tilde{I} = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \phi).$$

Durch Anwendung der Beziehung  $\cos \alpha \cos \beta = (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) / 2$  lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen:

$$\tilde{P} = \frac{U_0 I_0}{2} (\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)).$$

Der zweite Summand in der Klammer beschreibt zeitliche Oszillationen mit der doppelten Frequenz der eingespeisten Wechselspannung. Im zeitlichen Mittel ist dieser Term gleich Null, so dass sich für die mittlere Leistung ergibt

$$\boxed{\bar{P} = U_{eff} I_{eff} \cos \phi}. \tag{4.11}$$

Betrachten wir jetzt den Anteil der einzelnen Bauelemente an der eingespeisten Leistung:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{I} \tilde{U} = \tilde{I} \left( \tilde{I} R + L \frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} dt \right), \\ \tilde{P} &= \tilde{I} \left( I_0 R \cos(\omega t + \phi) - \omega L I_0 \sin(\omega t + \phi) + \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) \right), \\ \tilde{P} &= I_0^2 \left( R \cos^2(\omega t + \phi) - \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand in der Klammer ergibt nach einer zeitlichen Mittelung den Wert  $1/2$ , der zweite Summand mittelt sich weg. Somit erhält man für das Zeitmittel der Leistung

$$\bar{P} = U_{eff} I_{eff} \cos \phi = I_{eff}^2 R. \tag{4.12}$$

Das bedeutet, dass im Zeitmittel nur an  $R$  Leistung umgesetzt wird. Diese ist um den Faktor  $\cos \phi$  geringer, als wenn keine Phasenverschiebung aufgetreten wäre. Der Ausdruck  $\cos \phi$  trägt in diesem Zusammenhang die Bezeichnung "Leistungsfaktor". Bei  $\cos \phi < 1$  wird ein oft erheblicher Teil der

Leistung zum Aufbau elektrischer und magnetischer Felder in den Kondensatoren und Spulen aufgewendet. Beim Abbau der Felder fließt diese Leistung wieder zurück in die Spannungsquelle. Diese Leistung ist also reversibel, belastet aber durch die starken Ströme (Blindströme) zusätzlich das Netz und erzeugt an den Zuleitungswiderständen zusätzliche Ohmsche Verluste.

Wir wollen jetzt die Leistung mit den Methoden der Komplexen Wechselstromrechnung beschreiben. Die komplexe Leistung  $\underline{S}$  (Scheinleistung) ergibt sich aus dem Produkt der komplexen Spannung und des komplexen Stromes:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \hat{U} e^{j\omega t}; \quad \underline{I} = \hat{I} e^{j\omega t} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \underline{S} &= U_0 I_0 e^{j(2\omega t + \varphi)}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Als *komplexe Amplituden* von Strom und Spannung bezeichnet man die Produkte aus reellen Amplituden und komplexen Phasenfaktoren, also z.B.  $\hat{I} = I_0 e^{j\varphi}$ . Da der Phasenfaktor den Betrag 1 hat, sind die Beträge von komplexer und reeller Amplitude einer Wechselgröße identisch.

In (4.13) bemerken wir in der Zeitabhängigkeit der komplexen Leistung  $\underline{S}$  eine gegenüber Strom und Spannung verdoppelte Frequenz. In der Gaußschen Ebene rotiert die Scheinleistung mit dieser Frequenz. Anstelle eines Zeigerdiagramms mit umlaufendem Zeiger, wie auf Abb.4.7a dargestellt, wird meist ein mit  $2\omega$  rotierendes Bezugssystem gewählt, wodurch man zeitunabhängige Projektionen auf die reelle Achse ( $P$ , Wirkleistung) und auf die imaginäre Achse ( $Q$ , Blindleistung) erhält, s. Abb. 4.7b.

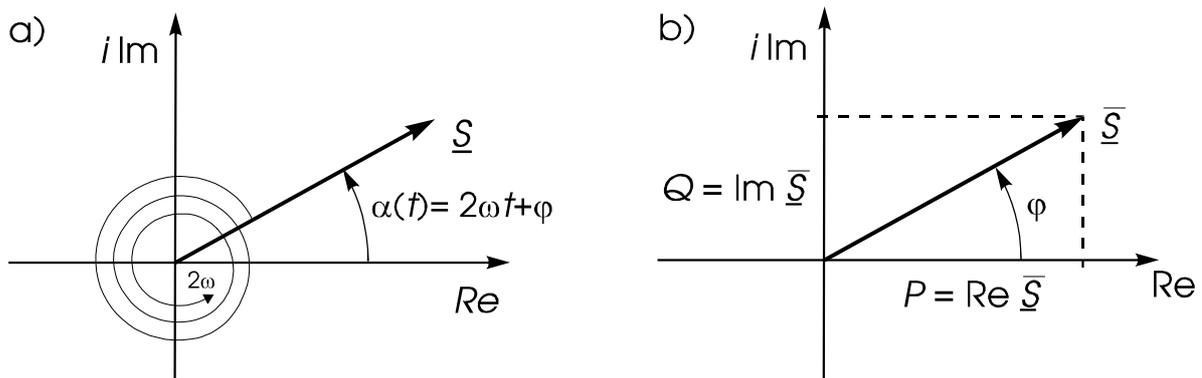


Abb. 4.7 Komplexe Leistung im Zeigerdiagramm

a) Darstellung der Zeitabhängigkeit der Scheinleistung in der ruhenden Gaußschen Ebene

b) Scheinleistung im mit  $2\omega$  rotierenden Koordinatensystem, Zerlegung in zeitgemittelte Wirk- und Blindleistung

Die hierdurch ausgefallene zeitliche Mittelung wird dadurch nachgeholt, dass anstelle der Amplituden  $I_0$  und  $U_0$  die Effektivwerte von Strom und Spannung eingesetzt werden, auf die explizite Angabe der Zeitmittelung wird verzichtet:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{S} &= P + jQ = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ |\underline{S}| &= \sqrt{P^2 + Q^2}\end{aligned}}\quad (4.14)$$

Wir erhalten somit Übereinstimmung mit dem Ergebnis der reellen Leistungsberechnung (4.12).

#### 4.2.4. Anwendungen zur komplexen Wechselstromrechnung

Fasst man den Formalismus der komplexen Wechselstromrechnung zusammen, ergibt sich folgendes formale Vorgehen bei der Lösung von Problemstellungen:

- Im Netzwerk werden Stromrichtungen und Umlaufsinn in Maschen eingetragen.
- Die Bauelemente  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ersetzt man formal durch komplexe  $Z_R$ ,  $Z_L$  und  $Z_C$ , die Quellenspannung bezeichnet man mit  $\hat{U}_q$ , Ströme und Teilspannungen mit  $\hat{I}_R, \hat{I}_L, \hat{I}_C$  bzw.  $\hat{U}_R, \hat{U}_L, \hat{U}_C$ .
- Mit den komplexen Widerständen und komplexen Amplituden werden nach den Kirchhoffschen Regeln für den Wechselstromkreis lineare Gleichungen aufgestellt.

Kirchhoffsche Regeln für Wechselgrößen	$\sum \hat{U}_q = \sum Z_k \hat{I}_k, \quad \sum \hat{I}_j = 0$	(4.15)
---	---	--------

- Das lineare Gleichungssystem wird mit den üblichen algebraischen Methoden gelöst.
- In deren Lösungen (das sind die  $\hat{I}_k$ ) werden nun die komplexen Widerstände  $Z_R$ ,  $Z_L$  und  $Z_C$  durch deren konkrete Ausdrücke  $R$ ,  $j\omega L$  und  $1/j\omega C$  ersetzt.
- Durch Betragbildung werden die reellen Amplituden bestimmt  $|\hat{I}_k| = I_{k_0}$ .
- Die Phasenverschiebung des Stromes  $\hat{I}_k$  gegenüber der Quellenspannung  $\hat{U}_q$  ergibt sich nach Trennung von Real- und Imaginärteil zu  $\tan \varphi_k = \frac{\text{Im } \hat{I}_k}{\text{Re } \hat{I}_k}$ . Beim Vergleich der Phasen von Strömen und Spannungen sind der Umlaufsinn sowie die willkürlich angenommene Stromrichtung zu beachten.

Man erkennt leicht, dass man hier vorteilhaft die Erfahrungen bei der Berechnung von Gleichstromnetzwerken ausnutzen kann. Formal sind die Ergebnisse nach der KWSR gleich, man muss lediglich die reellen Widerstände durch die komplexen ersetzen und die Gleichspannungen/-ströme durch die komplexen Amplituden beider Wechselgrößen.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel von Abb.4.5 der Reihenschaltung einer Spule  $L$ , eines Ohmschen Widerstandes  $R$  und der eingepprägten Spannung  $\tilde{U}$ . Die Maschenregel liefert :

$$\hat{U} = Z_L \hat{I} + Z_R \hat{I} = (Z_L + Z_R) \hat{I}.$$

Das Verhältnis von Spannung und Strom  $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = (Z_L + Z_R) = Z$  ist eine komplexe Größe.

$$\frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi_z} = Z = j\omega L + R$$

$Z$  ist also ein komplexer Widerstand mit  $Z = \text{Re } Z + j \cdot \text{Im } Z$ . Man definiert nun :

- $\text{Re } Z = \text{Wirkwiderstand}$
- $\text{Im } Z = \text{Blindwiderstand} = \text{Reaktanz}$
- $\text{Betrag } Z = \text{Scheinwiderstand} = \text{Impedanz}$
- $Y = \frac{1}{Z} = \text{komplexer Leitwert} = \text{Admittanz} = G + j \cdot B$   
mit  $G = \text{Wirkleitwert} = \text{Konduktanz}$  sowie  $B = \text{Suszeptanz}$ .

Für dieses einfache Netzwerk heißt das, dass sich die Impedanz aus

$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$  sowie dem Phasenwinkel  $\varphi_Z = \arctan \frac{\omega L}{R}$  ergibt.

In allen elektrischen Systemen muss man mit Wirkwiderständen und Reaktanzen rechnen, außerdem tritt ja ein Phasenwinkel zwischen  $\tilde{U}$  und  $\tilde{I}$  auf. Die in den Reaktanzen aufgenommene Wechselleistung wird mit *Blindleistung*  $Q$  bezeichnet. Die Reaktanz speichert elektrische bzw. magnetische Energie und gibt sie voll an die Quelle zurück. Die elektrische Leistung wird hierbei also nicht in Wärme sondern in Feldenergie umgesetzt. Verluste treten theoretisch nur im Generator und in den Zuleitungen auf. Das allerdings in durchaus hohem Maße, sofern der Wert von  $\cos \varphi$  laut (4.12) klein gegen 1 ist.

Hingegen wird die im Wirkwiderstand auftretende elektrische Leistung ganz in Wärme umgesetzt. Genauso verwandelt der Motor elektrische in mechanische Energie, Glühlampe und Leuchtstoffröhre setzen z.B. elektrische Energie in Wärme und zum Teil in Strahlungsenergie um.

Die am Widerstand  $R$  abfallende komplexe Amplitude der Spannung ergibt sich zu

$$\hat{U}_R = U_{R,0} e^{j\varphi} = \hat{I} \cdot R = \frac{U_0}{Z} R = \frac{R}{|Z| e^{j\varphi_Z}} U_0 = \frac{R}{|Z|} U_0 e^{j(-\varphi_Z)}$$

mit dem Betrag  $|\hat{U}_R| = U_{R,0} = \frac{U_0 \cdot R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$  und der Phase  $\varphi = -\varphi_Z = -\arctan \frac{\omega L}{R}$ .

Lautet die reelle Quellenspannung  $\tilde{U} = U_0 \sin \omega t$ , wird an  $R$  der reelle Spannungsabfall  $\tilde{U}_R = U_{R,0} \sin(\omega t + \varphi)$  gemessen.

Sowohl Betrag als auch Phase der Spannung  $\tilde{U}_R$  hängen von der Frequenz ab. Dies kann man grafisch veranschaulichen. Für niedrige Werte von  $\omega$  ist  $U_{R,0}(\omega) \cong U_0$  und  $\varphi(\omega) \cong 0$ .

Für sehr hohe Kreisfrequenzen gilt  $U_{R,0}(\omega) \approx U_0 R/\omega L$  und  $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$ . Die Darstellung erfolgt meist in logarithmischer Teilung der Abszisse. Eine *charakteristische Frequenz*  $\omega_g = R/L$  ermöglicht

eine dimensionslose Darstellung. Somit gilt  $U_{R,0} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}}$  und  $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g}$ .

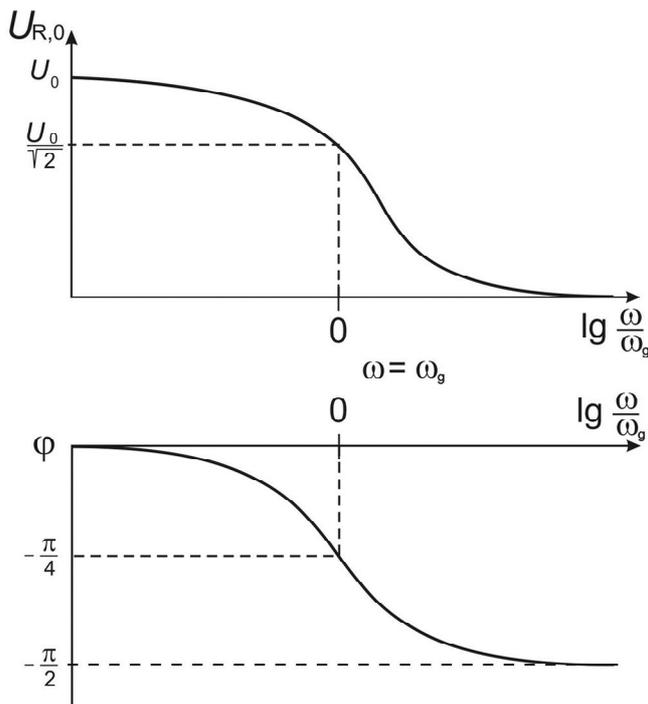


Abb.4.8 Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phase der Spannung am ohmschen Widerstand einer Reihenschaltung von  $R$  und  $L$  im Wechselstromkreis

Der Frequenzgang zeigt, dass bei niedrigen Frequenzen an  $R$  nahezu die volle Eingangsspannung abfällt, bei hohen Frequenzen (im Vergleich mit  $\omega_g = R/L$ ) dagegen nur eine geringe Spannung. Ein solches Verhalten wird als *Tiefpass* bezeichnet.

Die Phase der Spannung an  $R$  ist gegenüber der Eingangsspannung verschoben. Bei hoher Frequenz ist diese Verschiebung maximal. Die Spannung an  $R$  erreicht ihr Maximum dann um  $T/4$  später als die Eingangsspannung.

### 4.2.5. Der Reihenschwingkreis

Ein schwingungsfähiges System (*Oszillator*), das nach initialem Anstoß sich selbst überlassen bleibt, führt freie Schwingungen aus, deren Ablauf nur durch die Systemeigenschaften und die Anfangsbedingungen bestimmt wird. Ist der Oszillator (den man dann *Resonator* nennt) jedoch ständig einer äußeren (periodisch veränderlichen) Störgröße ausgesetzt, so verläuft seine Schwingung erzwungen und hängt sowohl von den Resonatoreigenschaften als auch von der erregenden Störgröße ab. Im *Resonanzfall* gerät der Resonator in besonders heftige Schwingungen.

Bei manchen schwingungsfähigen Systemen ist man bestrebt den Resonanzfall herbeizuführen und bei anderen wieder daran, ihn zu verhindern. Dazu 2 Beispiele :

- Teile von Maschinen oder Bauwerken sind als elastische Körper mechanische Resonatoren. Sie können durch mechanische Wellen zum Schwingen erregt werden. Um schädliche Resonanzerscheinungen zu vermeiden, dürfen die Erregerfrequenzen nicht in der Nähe der Eigenfrequenzen der Teile liegen.
- Elektrische Resonatoren (*Schwingkreise*) finden in Empfängern für elektromagnetische Wellen (Rundfunk, Fernsehen u. a.) Verwendung. Zum Empfang eines Senders wird die Resonanzfrequenz des Kreises auf dessen Trägerfrequenz abgestimmt.

Beim Serienschwingkreis wird an die Reihenschaltung einer Spule  $L$ , eines Kondensators  $C$  und eines Widerstandes  $R$  die Spannung  $U(t)$  gelegt Abb. 4.9. Der Widerstand  $R$  setzt sich aus dem Widerstand des Bauelementes  $R'$  und den Widerständen von Spule, Leitungen und Instrumenten zusammen.

Zu beliebiger Zeit  $t$  mögen im Kreis ein Strom der Stärke  $I(t)$  fließen, der Kondensator die Ladung  $Q(t)$  tragen und an  $R$ ,  $L$  und  $C$  die Spannungen  $U_R(t)$ ,  $U_L(t)$  und  $U_C(t)$  liegen.

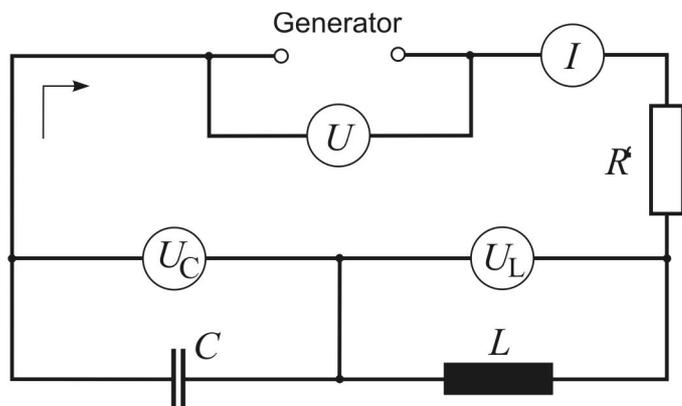


Abb. 4.9 Reihenschwingkreis

Induktivität, Kapazität und Widerstand sind in Reihe geschaltet. Der Ohmsche Gesamtwiderstand ergibt sich aus der Summe der Widerstände der Leitungen, dem Spulenwiderstand sowie einem diskreten Widerstand  $R'$ .

Zwischen den genannten Größen bestehen die Beziehungen :

$$U_R(t) = R I(t) \quad ; \quad U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad ; \quad U_C(t) = \frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad . \quad (4.16)$$

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt  $U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U(t)$  (4.17)

oder mit (4.16)  $L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = U(t)$  (4.18)

Die Differentiation von (4.18) ergibt die Schwingungsdifferentialgleichung (4.19) für die Stromstärke  $I(t)$  des Schwingkreises

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU(t)}{dt} \quad (4.19)$$

Durch Vergleich mit der Schwingungsgleichung des (STOKES<sup>45</sup>-)gedämpften harmonischen (mechanischen) Oszillators

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = C \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.20)$$

erkennt man in  $R/L = 2\beta$  die Dämpfungskonstante  $\beta$  und in  $1/LC = \omega_0^2$  die Eigen(kreis)frequenz  $\omega_0$  des (ungedämpften) Oszillators (THOMSON<sup>46</sup>sche Schwingungsformel). Durch die Generatorspannung  $U = U_0 \cos \omega t$  erfolgt eine harmonische Anregung. Der nach Einschalten des Generators einsetzende Prozess des *Einschwingens* ist durch eine allmähliche Zunahme der Schwingungsamplitude des Stromes gekennzeichnet. Nach einer gewissen Zeitdauer ist dann die Schwingungsamplitude  $I_0$  konstant, der Strom schwingt mit der Erreger(kreis)frequenz  $\omega$  und ist gegenüber der Eingangsspannung um  $\varphi$  phasenverschoben. Für den eingeschwungenen Fall ist somit die KWSR anwendbar. Anstelle von (4.18) gilt eine analoge Gleichung für die komplexen Amplituden der Teilspannungen

$$\hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C = \hat{U} \quad (4.21)$$

also explizit

$$R \hat{I} + j\omega L \hat{I} + \frac{1}{j\omega C} \hat{I} = \hat{U} \quad (4.22)$$

Die Anfangsphase der Generatorspannung wird gleich Null gesetzt, somit gilt  $\hat{U} = U_0$ ;  $\hat{I} = I_0 e^{j\varphi}$  und man erhält

$$I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (4.23)$$

Der Betrag einer komplexen Größe ergibt sich leicht durch Multiplikation mit seiner konjugiert komplexen, anschließend ist die Wurzel zu ziehen:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4.24)$$

Zur Bestimmung der Phase ist es notwendig, Real- und Imaginärteil in (4.23) zu trennen. Dies erreicht man durch Erweitern des Bruches mit dem konjugiert komplexen Nenner  $N^*$ :

$$I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0}{N \cdot N^*} \left[ R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]$$

<sup>45</sup> Sir George Gabriel STOKES (1819-1903), brit. Physiker und Mathematiker; Strömungslehre; Fluoreszenz, Spektralanalyse, Wellenoptik; Akustik; Gravitation; Stokesscher Satz der Integralrechnung

<sup>46</sup> Sir William THOMSON, Lord Kelvin of Largs (1824-1907), schott. Physiker und Unternehmer, mit 22 Jahren Prof. in Glasgow; Elektrodynamik; Thermodynamik; Elastizität; Geophysik; Hydrodynamik

es folgt 
$$\tan \varphi = \frac{\text{Im} \hat{I}}{\text{Re} \hat{I}} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}. \quad (4.25)$$

Aus (4.24) folgt, dass die Stromamplitude ein Maximum bei  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  von  $I_{res} = \frac{U_0}{R}$  hat.

$$\text{Thomsonsche Schwingungsformel} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.26)$$

Die Phasenverschiebung durchläuft mit wachsendem  $\omega$  Werte zwischen  $+\pi/2$  und  $-\pi/2$ . An der Resonanzstelle  $\omega = \omega_0$  schwingen Spannung und Strom genau in gleicher Phase. Leicht lassen sich jetzt die Amplituden und Phasen der Teilspannungen berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{U}_R &= RI_0 e^{j\varphi} = \frac{RU_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0 e^{j\varphi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \\ \hat{U}_L &= j\omega LI_0 e^{j\varphi} = \frac{\omega LU_0 e^{j\frac{\pi}{2}}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0 e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}} \\ \hat{U}_C &= \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\varphi} = \frac{U_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega C \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]} = \frac{U_0 e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Spannung am Widerstand ist proportional zum Strom und schwingt in gleicher Phase. Die Phase der Spannung an der Induktivität ist um  $\pi/2$  höher, die an der Kapazität dagegen um  $\pi/2$  geringer. Beide schwingen also *gegenphasig*. An der Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$  sind die Amplituden gleich.

$$\text{Gütefaktor } Q \quad \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (4.28)$$

Somit sind die Spannungsamplituden an  $L$  und  $C$  (und analog deren Effektivwerte) bei Resonanz um ein Vielfaches höher als die des Generators. Zur quantitativen Auswertung ist es günstig, die normierte Frequenz  $\eta = \omega / \omega_0$  zu verwenden. Es folgt

$$\frac{I_0}{I_{0res}} = \frac{I_0(\omega)}{I_0(\omega = \omega_0)} = \frac{I_0(\omega)}{\frac{U_0}{R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \quad (4.29)$$

mit  $\tan \varphi = \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right) Q$ .

Ganz analog gilt für die Spannungen an  $L$  und  $C$ :

$$\frac{U_{L0}(\omega)}{U_0} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \quad \text{sowie} \quad \frac{U_{C0}(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\eta \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} . \quad (4.30)$$

In Abhängigkeit von  $\eta$  und  $Q$  erhält man eine Kurvenschar für den Verlauf von Amplituden und Phasen, s. Abb. 4.10. Der Resonanzfall tritt bei  $\eta = 1$ , also bei der Kreisfrequenz

$\omega_r = \omega_o = 2\pi f_o = 1/\sqrt{LC}$  ein. Die Resonanzstromstärke ist unabhängig von der Güte und beträgt  $I_o = U_o / R$ . Die Stromstärke ist bei Resonanz mit der Spannung in Phase, eilt ihr bei kapazitiver Last ( $\omega < \omega_o$  bzw.  $\eta < 1$ ) voraus und bei induktiver Last ( $\omega > \omega_o$  bzw.  $\eta > 1$ ) nach.

Die Breite der Resonanzkurve beim Wert  $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$  bzw.  $\left(\frac{I}{I_o} Q\right)^2 = Q^2/2$  heißt Halbwerts- oder

Bandbreite. Zur Bestimmung der Bandgrenzen  $\eta_o$  und  $\eta_u$  gewinnt man aus (4.29) zunächst die Betragsgleichung

$$\left| \eta - \frac{1}{\eta} \right| Q = 1 \quad (4.31)$$

und nach Betragsauflösung die beiden quadratischen Gleichungen

$$\pm (\eta^2 - 1) = \frac{1}{Q} \eta \quad \text{mit den zwei nichtnegativen Lösungen} \quad \eta_{o,u} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} .$$

Daraus ergibt sich die (relative) Bandbreite

$$\boxed{\text{Bandbreite des Schwingkreises} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \eta_o - \eta_u = \frac{1}{Q}} \quad (4.32)$$

Bemerkenswert ist somit, dass bei einer hohen Güte die Spannungen an den Induktivitäten und Kapazitäten sehr hohe Werte annehmen (bei Mikrowellenresonatoren sind Güten von 10 000 erreichbar). Außerdem tritt dann diese Spannungsüberhöhung nur in einem schmalen Frequenzbereich auf. Schwingkreise können somit sehr frequenzselektiv gebaut werden und haben infolge dieser Eigenschaften eine außerordentliche Bedeutung in der Schaltungstechnik.

Abb. 4.10a Amplitude und Phasenverschiebung  $\varphi$  der Stromstärke im Serienschwingkreis

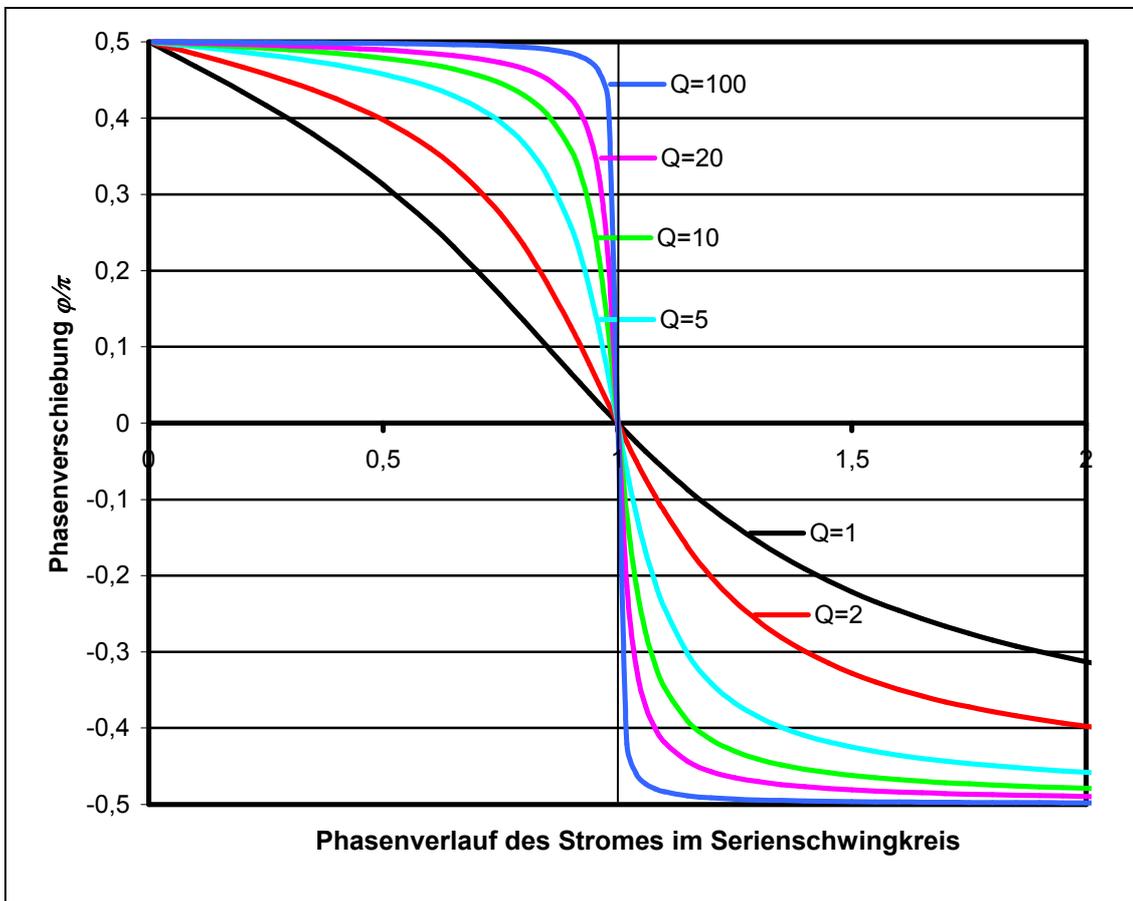
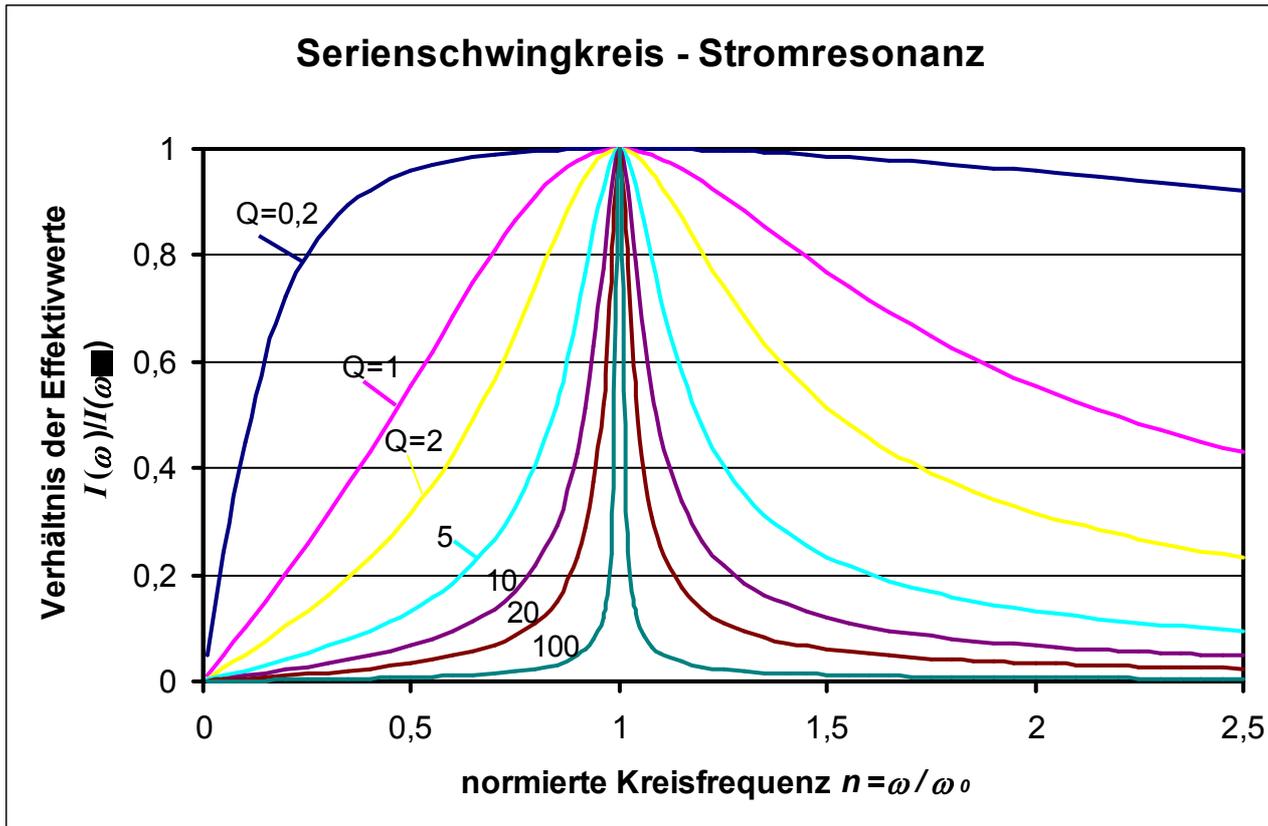
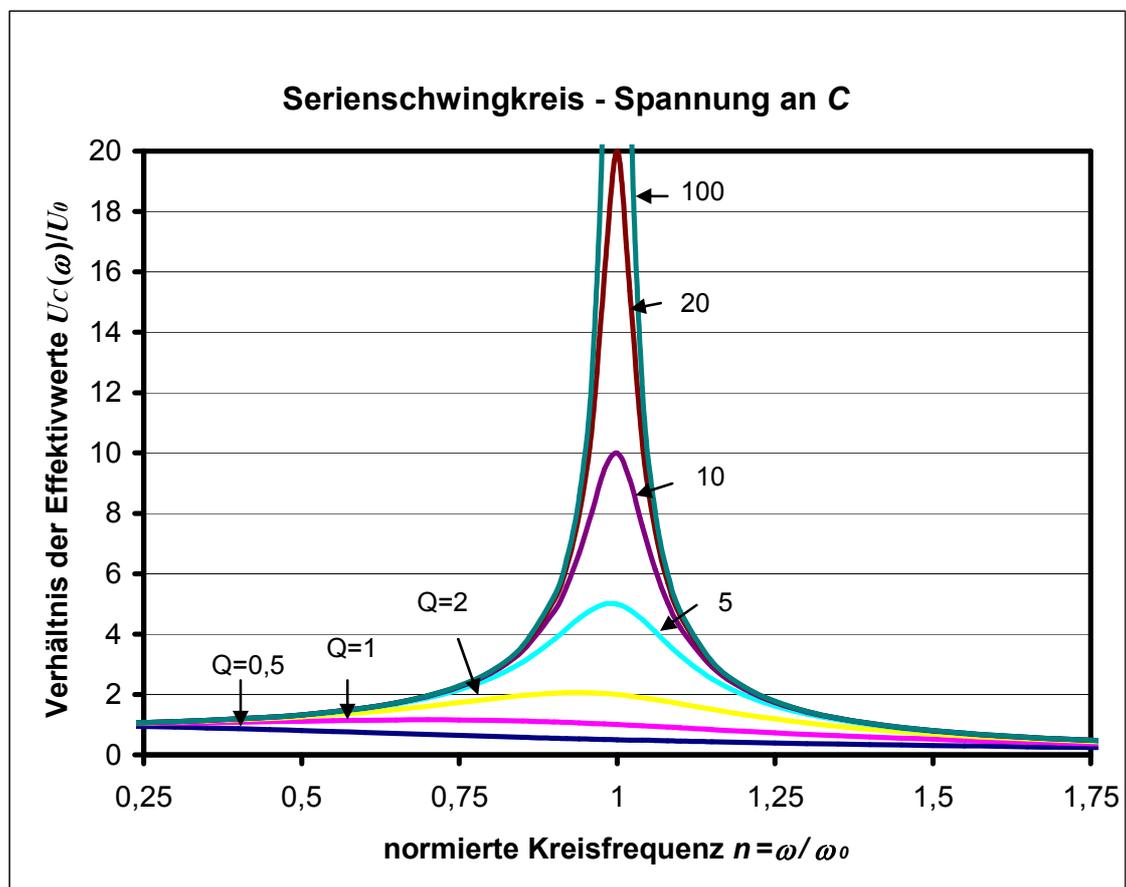
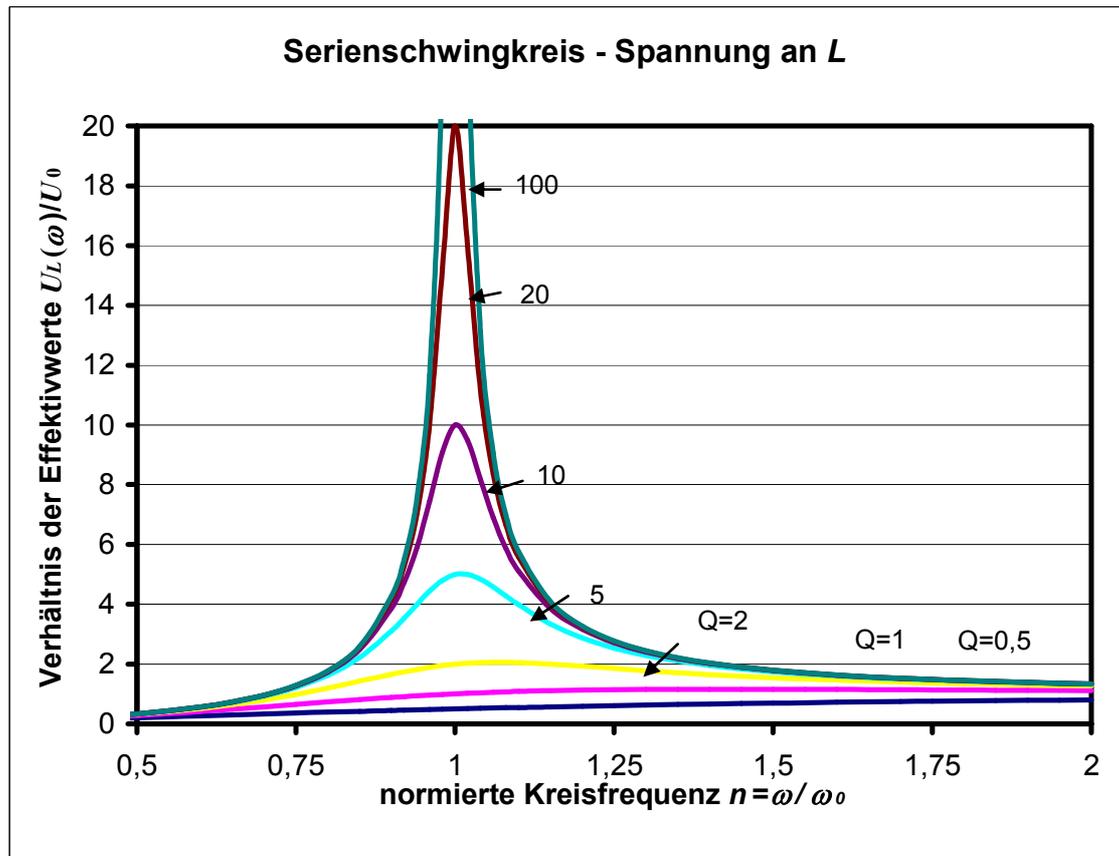
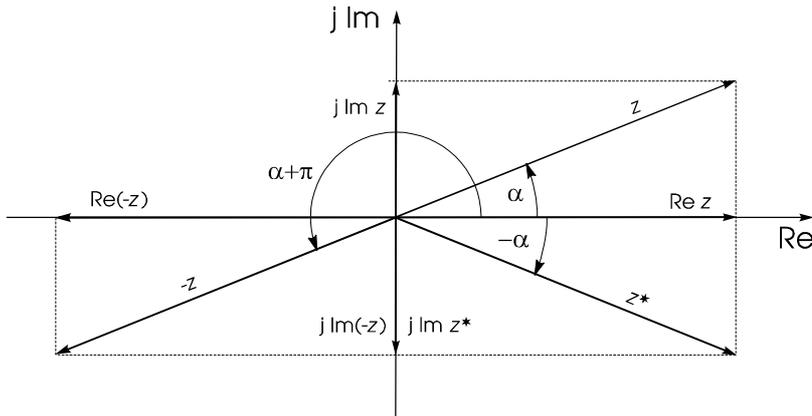


Abb. 4.10b Amplituden  $U_{L0}$  und  $U_{C0}$  im Serienschwingkreis

## A 4 Einige Rechenregeln zu komplexen Zahlen

Eulersche Formel :  $\exp(j\alpha) = e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha$

Da  $\cos\alpha$  und  $\sin\alpha$  als Projektionen eines Einheitsvektors auf zwei orthogonale Achsen eines Koordinatensystems aufgefaßt werden können, ergibt sich heraus die Möglichkeit zur Darstellung einer komplexen Größe in der Gaußschen Zahlenebene.



komplexe Zahl  $z$ :

$$z = x + jy = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$$

$$z = |z| \exp(j\alpha) = |z| e^{j\alpha}$$

konjugiert komplexe Zahl  $z^*$ :

$$z^* = x - jy = \operatorname{Re} z - j \operatorname{Im} z$$

$$z^* = |z| \exp(-j\alpha) = |z| e^{-j\alpha}$$

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt:  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$ .

Die Phase  $\alpha$  ergibt sich aus der Darstellung in der Gauß-Ebene zu:  $\alpha = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

Weitere wichtige Beziehungen sind:  $\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$  sowie  $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$ .

Im Übrigen gelten auch bei Rechnungen mit komplexen Zahlen die Regeln der Arithmetik. So lassen sich z.B. Real- und Imaginärteil bei den häufig auftretenden komplexen Brüchen durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner trennen und wie folgt Betrag und Phase bestimmen:

$$z = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac + bd + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}; \quad |z| = \sqrt{\frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{a - jb}{c - jd}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{bc - ad}{ac + bd}$$

## 5. Der Festkörper

### 5.1. Bindung im Festkörper

#### 5.1.1. Nahordnung und Fernordnung

Die Energie eines Vielteilchensystems ergibt sich aus der Summe der Einzelenergien aller Teilchen. Die Bewegungsenergie oder *kinetische Energie* wird durch die Geschwindigkeit der Teilchen bestimmt und verringert sich bei Temperaturniedrigung. In der *potentiellen Energie* äußert sich die Wechselwirkung der Teilchen untereinander. Somit ist sie sowohl von der Art der betrachteten Teilchen abhängig, als insbesondere auch von deren räumlicher Entfernung. Nun bewegen sich in einem Gas die Moleküle weder mit gleicher Geschwindigkeit noch in gleichem Abstand. Mit den Methoden der *statistischen Thermodynamik* ist es jedoch möglich, Aussagen über eine mittlere Geschwindigkeit und damit mittlerer kinetischer Energie der Teilchen zu treffen. Die Statistik zeigt, dass diese mittlere Energie und die Temperatur (absolute Temperatur in Kelvin) zueinander proportional sind. Je *Freiheitsgrad* der Bewegung trägt die mittlere kinetische Energie

mittlere kinetische Energie je Freiheitsgrad	$\overline{W}_{kin} = \frac{1}{2} k_B T$	(5.1)
BOLTZMANN <sup>46</sup> -Konstante	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$	

Bei einem einatomigen Gas (Edelgas) gibt es drei Freiheitsgrade der Translationsbewegung, in x-, y- und z- Richtung. Bei einem zweiatomigen Gas (O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>) treten zusätzlich noch 2 Rotationsfreiheitsgrade um zwei zur Verbindungslinie beider Atome senkrechte Achsen auf. Nichtlineare Moleküle besitzen drei Rotationsfreiheitsgrade. Bei sehr hohen Temperaturen von Einfluss sind auch die dann angeregten Molekülschwingungen. Da die Anzahl der Teilchen eines Mols gleich der AVOGADRO<sup>47</sup>- oder LOSCHMIDT<sup>48</sup>-Zahl  $N_L = 6,02 \cdot 10^{23}/\text{mol}$  ist, ergibt sich z.B. für die kinetische Energie und der (experimentell gut zugänglichen!) spezifischen Wärme von einem Mol eines zweiatomigen Gases bei nicht zu hoher Temperatur

Molwärme eines zweiatomigen Gases	$W = \frac{5}{2} N k_B T$	(5.2)
Spezifische Wärme eines zweiatomigen Gases	$c_{mol} = \frac{\Delta W}{\Delta T} = \frac{5}{2} N k_B$	

Da die potentielle Energie überwiegend auf anziehenden zwischenmolekularen Kräften beruht, hat sie ein negatives Vorzeichen und verringert die Gesamtenergie. Wird durch Abkühlung eines Gases die Gesamtenergie negativ, bildet sich eine kondensierte Phase heraus, in der Regel eine Flüssigkeit, in der also noch Translation und Rotation der Moleküle möglich ist. Allerdings bewirken die starken Anziehungskräfte eine *Nahordnung*, die dadurch charakterisiert ist, dass eine bevorzugte Orientierung in Abstand und Ausrichtung der Moleküle verzeichnet werden kann. Bleibt diese Nahordnung bei weiterer Abkühlung und Übergang zum Festkörper erhalten, spricht man von einem *amorphen Festkörper* oder einer "eingefrorenen" Flüssigkeit. Bei Gläsern, Polymeren, inhomogenen Stoffgemischen handelt es sich meist um amorphe Festkörper. Tritt bei Abkühlung aus dem flüssigen Aggregatzustand *Kristallisation* ein, entsteht eine *Fernordnung*, bei der die sich herausbildenden charakteristischen geometrischen Strukturen über sehr viele Molekülabstände hin mit größter Regelmäßigkeit verfolgen lassen. Die meisten reinen Stoffe bilden unter geeigneten Bedingungen Kristalle.

<sup>46</sup> Ludwig BOLTZMANN (1844-1906), österr. Physiker und Philosoph; statistische Thermodynamik

<sup>47</sup> Amadeo AVOGADRO (1776-1856), ital. Physiker und Chemiker; Molekularhypothese, Avogadro'sches Gesetz

<sup>48</sup> Josef LOSCHMIDT (1821-1895), österr. Physiker und Chemiker; Ringstruktur des Benzols, Bestimmung der Avogadro-Zahl

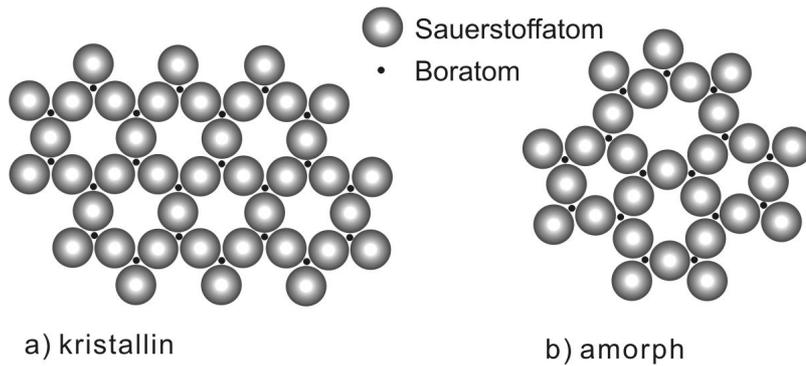


Abb. 5.1 Kristallines (a) und amorphes (b) Boroxid  $B_2O_3$

In beiden Zuständen existiert eine Nahordnung, die Atomabstände zwischen nächsten Nachbarn sind konstant. Jedes Sauerstoffatom ist an 2 Boratome gebunden und jedes Boratom an 3 Sauerstoffatome. Fernordnung weist nur das kristalline Boroxid auf.

### 5.1.2. Flüssigkristalle

In gewissem Sinne eine Zwitterstellung zwischen Flüssigkeiten und Kristallen bilden die *Flüssigkristalle* (LC). Als solche bezeichnet man spezielle Flüssigkeiten, die auch in der flüssigen Phase Fernordnungen ausbilden. Dieser Ordnungszustand tritt nur in einem begrenzten Temperaturbereich auf, bei Temperaturen oberhalb des *Klärpunktes* verschwinden die flüssigkristallinen Eigenschaften und die Flüssigkeit wird isotrop (amorph).

Moleküle, die Flüssigkristalle bilden, haben eine charakteristische längliche Struktur. Für die starken zwischenmolekularen Wechselwirkungen sind meist die  $\pi$ -Elektronen zweier Ringsysteme verantwortlich, die durch einen starren *spacer* (lineare Molekülteile, oft mit Mehrfachbindungen) miteinander verbunden sind. An den Molekülenden befinden sich aliphatische Ketten und funktionelle Gruppen. Letztere verleihen dem Molekül elektrische und magnetische Dipolmomente, wodurch die Möglichkeit gegeben ist, durch äußere Felder Drehmomente auf die einzelnen Moleküle auszuüben und damit eine Vorzugsorientierung zu erreichen.

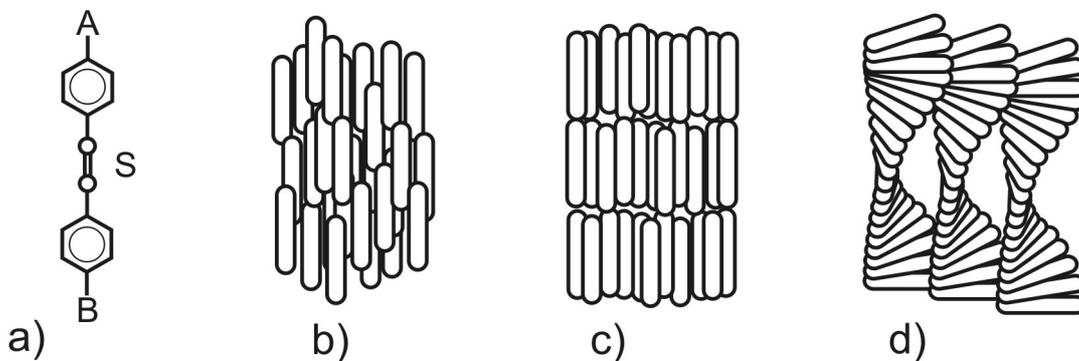


Abb. 5.2 Flüssigkristalle

a) Typischer Aufbau eines Flüssigkristallmoleküls: A, B - funktionelle Gruppen, S - spacer  
Ordnungszustände: b) nematische c) smektische d) cholesterinische Phase

Man unterscheidet verschiedene Ordnungszustände. In der *nematischen* Phase besteht eine Vorzugsorientierung der Moleküllängsachse, eine räumliche Ordnung besteht nicht, so dass sich die Moleküle in jeder Richtung translatorisch bewegen können. Bei der *smektischen* Phase bilden sich Ebenen parallel angeordneter Moleküle heraus, innerhalb derer noch eine Translation möglich ist. Eine schraubenförmige Anordnung, bei der benachbarte Moleküle um einen charakteristischen Winkel gegeneinander verdreht sind, bilden *cholesterinische* Flüssigkristalle.

LC werden vielseitig angewendet. Cholesterinische LC sind interessant durch Interferenzeffekte, die durch den Abstand zweier Molekülebenen mit gleich ausgerichteten Molekülen charakterisiert werden. Dieser Abstand entspricht der Steigung der Schraubenlinie (s. Abb. 5.2d) und ist stark temperaturabhängig. Bei vielen derartigen Strukturen liegt dieser im Bereich der Lichtwellenlänge.

Trifft Licht auf einen cholesterinischen Flüssigkristall wirken Schichten mit gleicher Orientierung wie Grenzflächen, was zu Interferenzeffekten führt. Deshalb weisen cholesterinische LC oft eine temperaturabhängige Färbung auf. Hauptanwendung von LC ist die Herstellung von Flüssigkristallanzeigen (LCD, liquid crystal display). Stellvertretend für eine Vielzahl unterschiedlicher Bauweisen ist auf Abb.5.3 das Prinzip einer einfachen S/W-Anzeige (sog. nematische Twistzelle) dargestellt.

Eine solche Zelle besteht aus zwei Glasplatten in sehr engem Abstand von ca.  $10\ \mu\text{m}$ , deren Oberfläche durch Bearbeitung mit feinstem Schleifmittel in jeweils einer Richtung präpariert ist. Diese Richtungen auf beiden Platten verlaufen senkrecht zueinander. Dazwischen befindet sich ein nematischer LC. Durch Wechselwirkung der Moleküle des LC mit der präparierten Glasoberfläche ordnen sich die Moleküle in die in der Oberfläche erzeugten Rillen. Da diese Orientierung auf der gegenüberliegenden Glasfläche hierzu senkrecht verläuft, sind benachbarte Schichten von LC-Molekülen etwas gegeneinander verdreht und folgen über den Plattenabstand somit einer viertel Umdrehung.

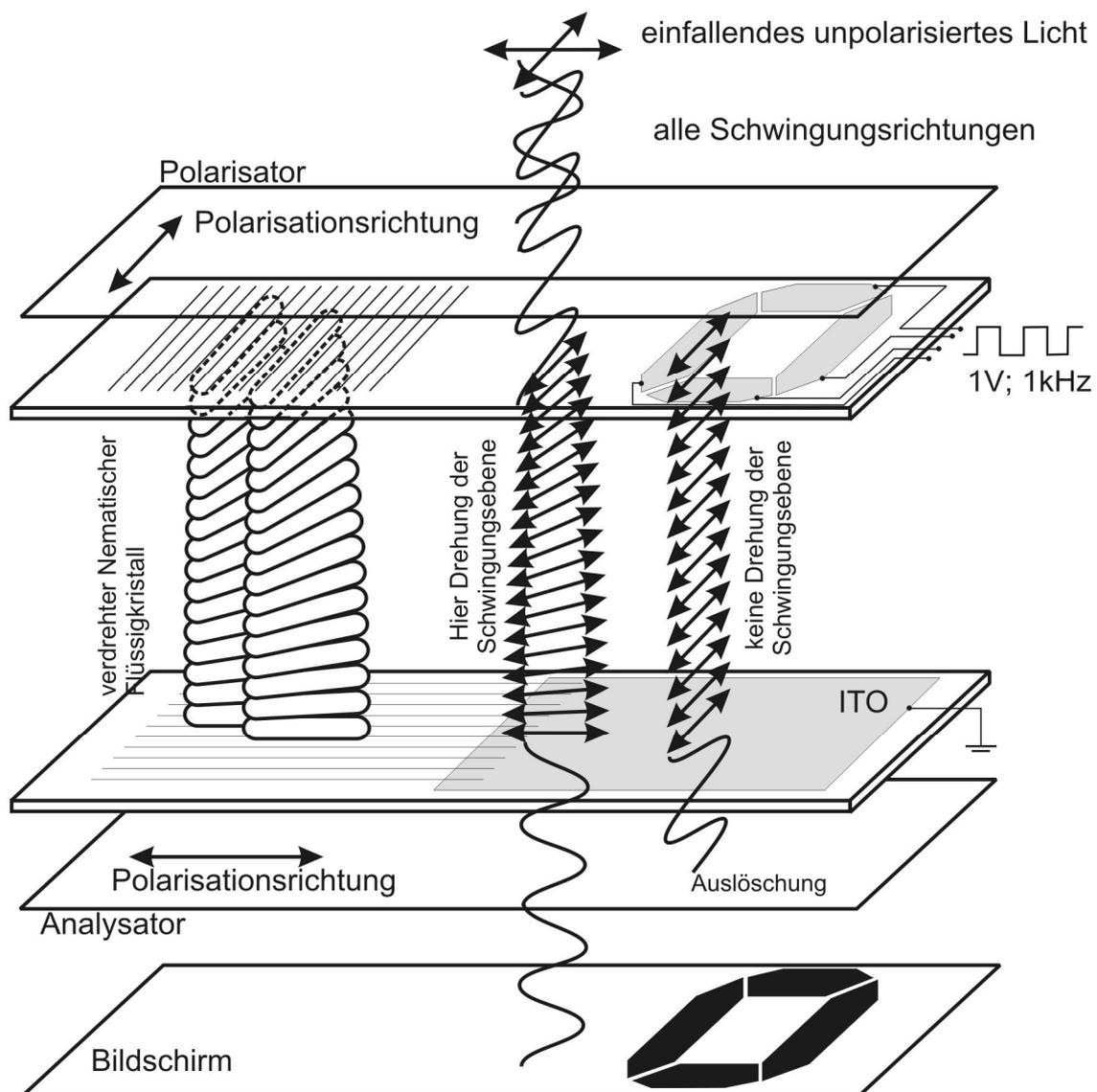


Abb. 5.3 Flüssigkristallanzeige

Außen liegt auf jeder Glasplatte der Zelle eine Polarisationsfolie, deren Polarisationsrichtung mit derjenigen der Präparation der Glasinnenfläche übereinstimmt. Beide Folien sind somit gegeneinander gekreuzt und würden deshalb das Licht völlig auslöschen, die Zelle wäre undurchsichtig. Da

aber die schraubenförmig angeordneten Moleküle die Polarisationsrichtung des sie passierenden Lichtstrahls ebenfalls drehen, kommt es nicht zur Auslöschung, die Zelle ist durchsichtig. Um nun eine Information darzustellen, muss man diesen Prozess beeinflussen. Hierzu werden geeignete Bereiche der Innenflächen der Gläser mit Indium-Zinn-Oxid (ITO) bedampft, einem Material, das sowohl leitfähig als auch durchsichtig ist. Legt man an gegenüberliegende Felder eine kleine Wechselspannung an, stört dieses die Ausrichtung der dazwischen befindlichen LC-Moleküle und die Zelle erscheint an diesen Stellen undurchsichtig. Das die Zelle passierende Licht trifft beim Beamer auf eine Projektionsfläche, beim LC-Monitor mit Hintergrundbeleuchtung auf das Auge des Betrachters. Oft befindet sich direkt hinter dem Analysator ein Spiegel. Das von diesem reflektierte Licht passiert die LC-Zelle ein zweites Mal und kann direkt betrachtet werden. Der Vorteil dieser LCD besteht im äußerst geringen Leistungsbedarf, da keine aktive Beleuchtung notwendig ist.

### 5.1.3. Ionenkristalle

Atome werden zu Ionen durch Aufnahme oder Abgabe einer oder mehrerer Elektronen. Um Elektronen von einem Atom abzuspalten, ist eine Energiezufuhr notwendig, die Ionisierungsenergie. Dagegen wird Energie frei, wenn ein zusätzliches Elektron an das Atom gebunden wird, die Elektronenaffinität. Da sich positive und negative Ionen anziehen, führt dies zu einer Verringerung der Potentiellen Energie. Alle drei Beiträge bilden die Kohäsionsenergie eines Ionenkristalls. Folglich kommen Ionenbindungen zu Stande, wenn Atome mit niedrigen Ionisierungsenergien mit solchen mit hoher Elektronenaffinität wechselwirken. Das ist vorzüglich bei Partnern aus der 1. und 7. Hauptgruppe sowie der 2. und 6. Hauptgruppe des Periodensystems der Fall. Die Elektronenhüllen von Ionen mit einer sich wie in diesen Fällen einstellenden sog. *Edelgaskonfiguration* haben sphärische Symmetrie. Sie sind folglich wie Kugeln vorstellbar mit einem jeweiligen *Ionenradius*. Sobald sich Ionen bis auf die Summe beider Ionenradien angenähert haben und die Elektronenhüllen beginnen sich gegenseitig zu durchdringen, treten starke abstoßende Kräfte auf, die einer weiteren Annäherung entgegen wirken und zu einem Gleichgewichtsabstand führen. Die Ionisierungsenergie von Natrium beträgt  $+5,14 \text{ eV}$ , die Elektronenaffinität von Chlor  $-3,61 \text{ eV}$ . Man müßte also zur Bildung eines  $\text{Na}^+\text{-Cl}^-$ -Ionenpaars noch  $1,53 \text{ eV}$  Energie zuführen. Durch die elektrostatische Anziehung verringert sich jedoch die Gesamtenergie. Außerdem wechselwirken die Ionen mit allen anderen Ionen des Gitters. Wenn sich gleichartig geladene Ionen stets in größerem Abstand befinden als ungleichartig geladene, ist die Summe der potentiellen Energien negativ. Im Fall des NaCl-Kristalls ist die potentielle Energie je Atom  $-3,99 \text{ eV}$  und somit die Kohäsionsenergie je Atom  $-3,22 \text{ eV}$ . Das bewirkt eine starke Bindung.

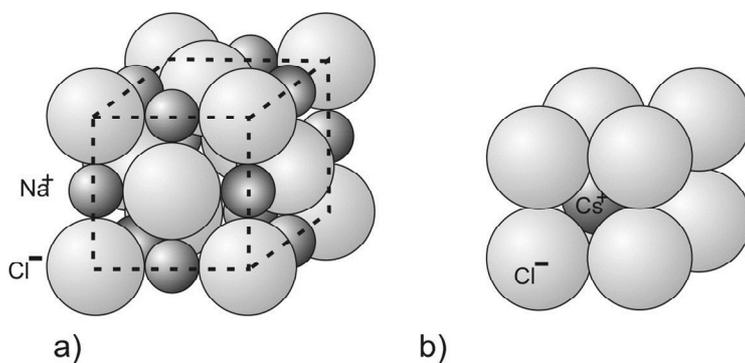


Abb. 5.4 Ionenkristalle

- NaCl kristallisiert im kubisch flächenzentriertem Gitter, jedes Ion hat 6 nächste Nachbarn, die sog. *Koordinationszahl* ist somit gleich 6
- CsCl kristallisiert als kubisch raumzentriertes Gitter, hier ist die Koordinationszahl 8

Ionenkristalle sind deshalb zumeist hart und haben hohe Schmelzpunkte. Durch die vorgegebene Anordnung der positiven und negativen Ionen sind Ionenkristalle nicht verformbar, also spröde. Polare Flüssigkeiten wie Wasser verringern die elektrostatischen Feldkräfte zwischen den Ionen und sind somit effektive Lösungsmittel.

### 5.1.4. Kovalente Bindung

Die Bindungskräfte in kovalenten Kristallen werden durch Elektronen verursacht, die sich zwischen zwei benachbarten Atomen bewegen. Jedes Atom trägt mit einem Elektron zu einer solchen Bindung bei. Das bindende Elektronenpaar unterscheidet sich nicht in der Bahn, aber im Elektronenspin. Die Koordinationszahl bei kovalenten Kristallen ist geringer als bei Ionenkristallen. Typische Vertreter rein kovalenter Kristalle sind der Diamant, Silizium, Germanium aber auch Siliziumkarbid, Galliumarsenid. Allen gemeinsam ist eine gleichartige Kristallstruktur mit jeweils 4 nächsten Nachbarn. Diese ordnen sich an wie die Atome eines Methanmoleküls – ein Atom in der Mitte eines Tetraeders, die 4 Ecken werden von den nächsten Nachbarn besetzt. Alle kovalenten Kristalle sind als Folge der sehr starken kovalenten Bindung sehr hart, für den Diamant ist es sprichwörtlich. Sie haben hohe Schmelzpunkte und sind in den üblichen Flüssigkeiten unlöslich. Die Kohäsionsenergien kovalenter Kristalle liegen im Bereich von 3 – 5 eV je Atom.

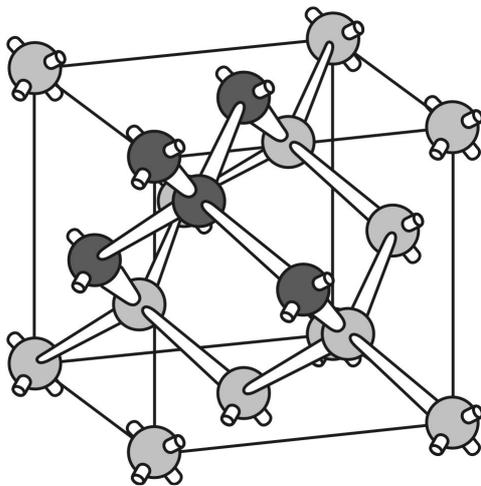


Abb. 5.5 Tetraederstruktur

Jedes Atom hat 4 nächste Nachbarn, die durch Elektronenpaare kovalent gebunden sind. Die Bindungen sind durch Balken dargestellt, eine primäre Tetraederstruktur ist durch die dunkler gezeichneten Atome hervorgehoben. Auf der Titelseite wurde diese Struktur nach rechts, links sowie nach oben und unten sukzessive fortgesetzt, verdeutlicht somit die Struktur einer dünnen Schicht eines z.B. Siliziumkristalls.

### 5.1.5. Metallbindung

Elemente, die als Metalle kristallisieren, stehen im Periodensystem links. Somit besitzen sie nur eines oder wenige Valenzelektronen. Ist die Koordinationszahl (Zahl der nächsten Nachbarn eines Atoms im Kristall) größer als die Zahl der Valenzelektronen, können mehr kovalente Bindungen eingegangen werden, als Elektronen zur Verfügung stehen. Somit bleiben ständig einige Bindungen ungesättigt. Lithium hat z.B. nur ein Außenelektron, aber im kubisch raumzentrierten Gitter (s.u.) 8 nächste Nachbarn. Somit steht für jede Bindung nur  $\frac{1}{4}$  Elektron zur Verfügung anstelle von 2 Elektronen einer gesättigten Bindung. Dies gibt den Elektronen die Möglichkeit, von einer Bindung in eine benachbarte ungesättigte zu springen. Letztendlich bewegen sich diese Elektronen nahezu frei im Kristallgitter zwischen den positiven Ionen wie die Teilchen eines Gases. Dieses sog. *Elektronengas* bewirkt als negative Ladungswolke in Wechselwirkung mit den Gitterionen die metallische Bindung und verursacht wegen der hohen Beweglichkeit der Elektronen die für Metalle charakteristischen Eigenschaften wie Metallglanz, Duktilität, gute elektrische und thermische Leitfähigkeit. Metalle sind relativ weich und gut verformbar, verglichen mit Ionen- oder kovalenten Kristallen. Da sie weder lokalisierte Bindungen (wie im kovalenten Kristall) noch eine feste Anordnung von negativen und positiven Ionen (wie im Ionenkristall) besitzen, können die Metallatome ohne Zerstörung des Gitters verschoben werden. Verändert ein Festkörper seine Kristallstruktur (sog. *allotrope* Umwandlung), kann aus einem metallischen Leiter ein Halbleiter oder Isolator werden. Beispiele hierfür sind die Modifikationen von Zinn (mit *Zinnpest* bezeichnet man den Zerfall von metallischem  $\beta$ -Zinn in nichtmetallisches  $\alpha$ -Zinn bei Temperaturen unterhalb  $13,2^\circ\text{C}$ ) und Kohlenstoff mit Graphit als Leiter und Diamant als Nichtleiter.

Die Kohäsionsenergien von Metallen sind etwas geringer als bei den kovalenten und Ionenkristallen. Beispiele sind: 1,4 eV/Atom für Zink, 1,6 eV/Atom für Lithium, 2,0 eV/Atom für Blei und 3,5 eV/Atom für Kupfer.

### 5.1.6. Van der Waals-Bindung

Besonders symmetrische Moleküle wie z.B. Methan haben kein elektrisches Dipolmoment. Weiterhin sind alle Valenzelektronen gesättigte Bindungen eingegangen. Trotzdem gibt es eine Bindung – infolge der VAN-DER-WAALS<sup>49</sup>-Wechselwirkung. Die kurzreichweitigen *van-der-Waals-Kräfte* sind verantwortlich für die Kondensation und Kristallisation selbst bei Abwesenheit von ionischen, kovalenten und metallischen Bindungen. Um den Charakter dieser Wechselwirkung zu verstehen, betrachten wir zunächst die Anziehung zwischen Molekülen mit permanentem Dipolmoment. Hierbei handelt es sich um Moleküle mit unsymmetrischer Ladungsverteilung. Ein prägnantes Beispiel ist das Wassermolekül. Da das Sauerstoffatom die Elektronen von beiden Wasserstoffatomen etwas abzieht, wird deren positive Kernladung nicht mehr voll abgeschirmt. Durch die Struktur des Wasseratoms bildet sich ein elektrischer Dipol mit negativer Ladung am Sauerstoff und positiver Ladung zwischen beiden Wasserstoffkernen heraus. Solche polaren Moleküle wechselwirken stark miteinander und ziehen sich bei geeigneter Orientierung gegenseitig an.

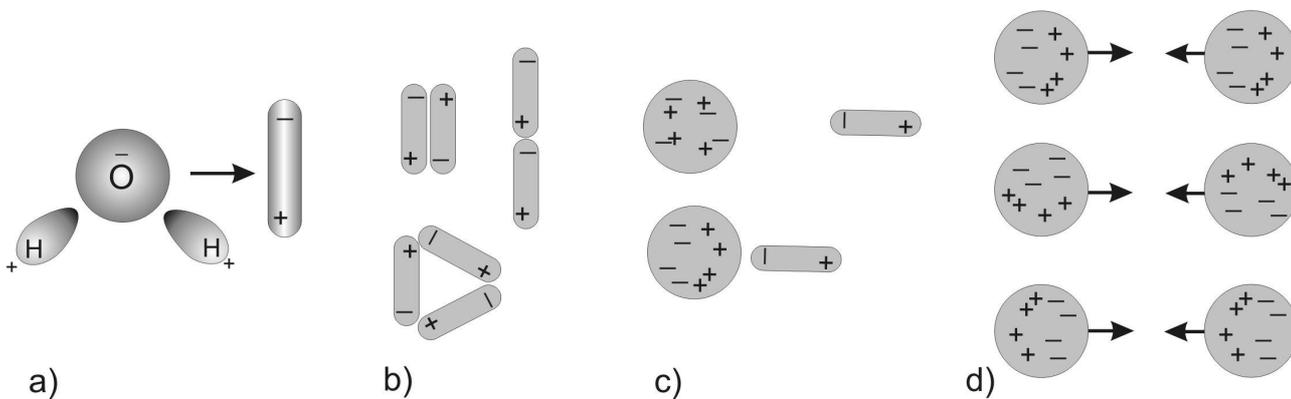


Abb. 5.6. Dipol-Dipol-Wechselwirkungen

- Wassermoleküle sind polar wegen der starken Verschiebung der Elektronenwolke zum O-Atom.
- Polare Moleküle ziehen sich gegenseitig an.
- Polare Moleküle polarisieren zunächst unpolare Moleküle und ziehen diese an.
- Symmetrische Moleküle sind nur im Zeitmittel unpolare, ihre Ladungsverteilungen unterliegen jedoch zeitlichen Schwankungen. Solche Fluktuationen benachbarter Moleküle erfolgen in Phase, so dass eine Anziehung entsteht.

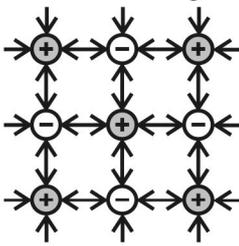
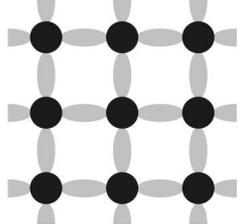
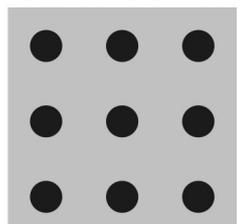
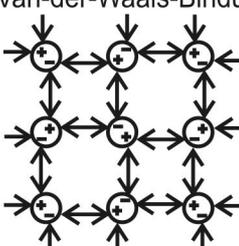
Gerät ein symmetrisches Molekül ohne Dipolmoment in die Nähe eines polaren Moleküls, wird es polarisiert, da sich Elektronenhülle und Kerngerüst etwas gegeneinander verschieben. Folglich kommt es dann auch zu einer Anziehung ganz ähnlich der Kraft zwischen einem Permanentmagneten und einem Stück Weicheisen. Unpolare Moleküle, hierzu muss man auch die Atome von Edelgasen zählen, haben aber nur im zeitlichen Mittel symmetrische Ladungsverteilungen. Durch die Bewegung der Elektronen und Kerne im Molekül unterliegt die Ladungsverteilung zeitlichen Schwankungen, sie fluktuiert. Diese Fluktuationen erfolgen bei benachbarten Molekülen „in Phase“, wodurch es im Mittel zu einer, wenngleich sehr geringen, anziehenden Kraft kommt. Molekulare Kristalle haben deshalb im allgemeinen niedrige Schmelz- und Siedepunkte und nur geringe mechanische Festigkeiten. Die Kohäsionsenergien sind klein und betragen bei festem Methan (Schmelzpunkt  $-183\text{ °C}$ )  $0,1\text{ eV/Molekül}$ , für festes Argon (Schmelzpunkt  $-189\text{ °C}$ ) nur  $0,08\text{ eV/Atom}$  und bei festem Wasserstoff (Schmelzpunkt  $-259\text{ °C}$ ) sogar nur  $0,01\text{ eV/Molekül}$ .

### 5.1.7. Niederdimensionale Kristalle

(noch zu ergänzen)

<sup>49</sup> Johannes Diderik VAN DER WAALS (1837-1923), nied. Physiker; Zustandsgleichung realer Gase (1910 NP)

Abb. 5.7 Überblick über die wichtigsten Bindungsarten

Bindungsart	Wechselwirkung	Beispiel	Eigenschaften
Ionenbindung 	Elektrostatische Anziehung zwischen negativen und positiven Ionen	Kochsalz NaCl $E_{\text{Koh}} = 3,28 \text{ eV/Atom}$	Hart, spröde hoher Schmelzpunkt gut lösbar in polaren Lösungsmitteln (Wasser)
Kovalente Bindung 	Gemeinsame Elektronenpaare zwischen benachbarten Atomen	Diamant C $E_{\text{Koh}} = 7,4 \text{ eV/Atom}$	Sehr hart unlöslich in fast allen Lösungsmitteln
Metallische Bindung 	Valenzelektronen bewegen sich frei als Elektronengas zwischen den Metallionen	Natrium Na $E_{\text{Koh}} = 1,1 \text{ eV/Atom}$	Gut verformbar, Glanz hohe elektrische und thermische Leitfähigkeit
Van-der-Waals-Bindung 	Momentane Dipole durch Fluktuationen der Ladungsverteilung	Methan CH <sub>4</sub> $E_{\text{Koh}} = 0,1 \text{ eV/Atom}$	Sehr weich, niedriger Schmelzpunkt löslich in kovalenten Flüssigkeiten

## 5.2. Kristallstruktur

### 5.2.1. BRAVAIS<sup>50</sup>-Gitter

Wesentlich für die Charakterisierung eines Kristalls ist seine *Einheitszelle*. Hierunter versteht man die kleinste Gruppe von Atomen (bzw. Ionen), durch deren räumliche Verschiebung um eine der sog. *Gitterkonstanten*  $a$ ,  $b$ ,  $c$  der gesamte Kristall konstruiert werden kann.

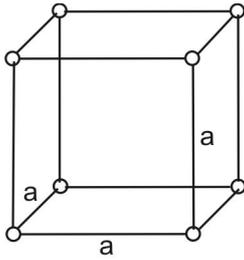
Es gibt nur 14 solcher Grundbausteine (*Bravais-Gitter*), alle Kristalltypen können aus ihnen dargestellt werden. Diese Elementar- oder Einheitszellen besitzen folgende Eigenschaften:

- Die Einheitszelle ist die einfachste sich wiederholende Einheit in einem Kristall.
- Gegenüberstehende Flächen einer Einheitszelle sind parallel.
- Der Rand der Einheitszelle verbindet äquivalente Stellen.

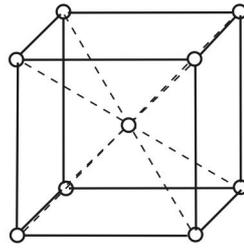
### 5.2.2. Kugelpackungen (noch zu ergänzen)

<sup>50</sup> Auguste Bravais (1811-1863) franz. Phys. und Kristallograph

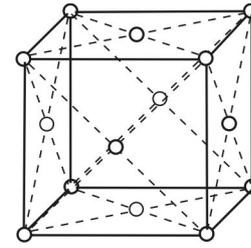
Abb. 5.8 Bravais-Gitter



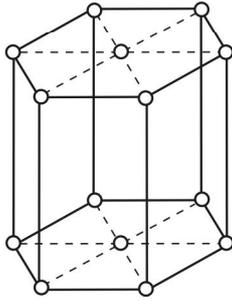
Kubisch  
einfach



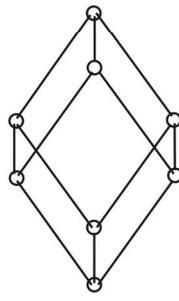
Kubisch  
raumzentriert



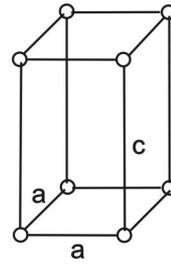
Kubisch  
flächenzentriert



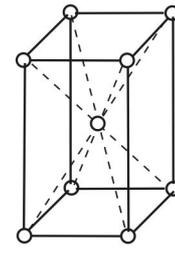
Hexagonal



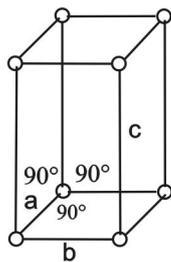
Trigonal  
(rhomboidisch)



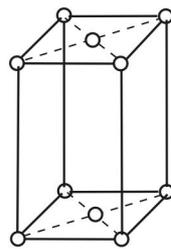
Tetragonal  
einfach



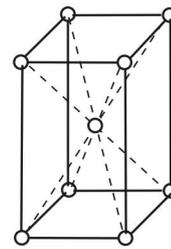
Tetragonal  
raumzentriert



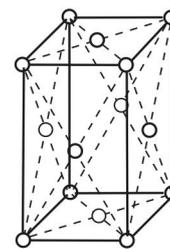
Orthorhombisch  
einfach



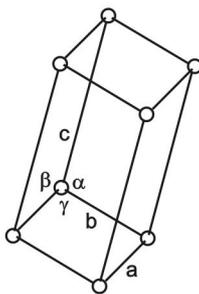
Orthorhombisch  
stirnflächenzentriert



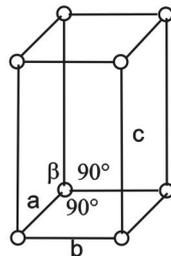
Orthorhombisch  
raumzentriert



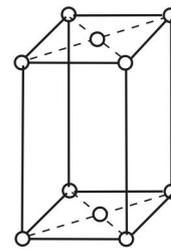
Orthorhombisch  
flächenzentriert



Triklin



Monoklin  
einfach



Monoklin  
flächenzentriert

7 Kristallsysteme und 14 Bravais-Gitter

Kristallsystem	Gitterparameter	Bravais-Gitter	Beispiele
Kubisch	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	3(P, I, F)	NaCl, Stahl
Trigonal (rhomboidisch)	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	1	Quarz, Kalzit
Hexagonal	$a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	1	H <sub>2</sub> O, Graphit
Tetragonal	$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	2(P, I)	TiO <sub>2</sub> , Sn
Orthorhombisch	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	4(P, I, F, C)	S, K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>
Monoklin	$a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	2(P, C)	CaSO <sub>4</sub> · 2H <sub>2</sub> O
Triklin	$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma$	1	CaSO <sub>4</sub> · 5H <sub>2</sub> O

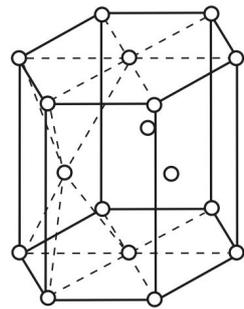
## Übungen

### 5.1.\*

Beryllium kristallisiert als dichte Kugelpackung (hexagonales Gitter), die Gitterkonstante (kürzester Abstand zwischen zwei benachbarten Be-Atomen) beträgt  $a = 2,27 \cdot 10^{-10}$  m. Berechnen Sie die relative Atommasse!

geg.: (Masseneinheit  $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg;  $\rho_{\text{Be}} = 1,85$  g/cm<sup>3</sup>)

*Hinweis:* Bei der dichten Kugelpackung ordnen sich die Gitterpunkte zu Tetraedern, die hexagonale Strukturen bilden. Die Aufgabe ist dadurch zu lösen, dass man bestimmt, welche Zahl von Be-Atomen jeweils zu einer Elementarzelle gehören, und welches Volumen die Elementarzelle einnimmt. Beachten Sie, dass die Atome am Rande der EZ gleichzeitig mit unterschiedlichen Anteilen zu benachbarten EZ gehören.



Hexagonal - dichte Kugelpackung

*Lösung:* Da die Einheitszelle kleinste Einheit eines kristallinen Festkörpers darstellt, reduziert sich die Aufgabe hauptsächlich auf die Bestimmung von Masse und Volumen einer Einheitszelle. Es gilt

$$m = \rho \cdot V$$

$$m_{EZ} = n \cdot M_{\text{Be}} \cdot u = \rho_{\text{Be}} \cdot V_{EZ}$$

$$M_{\text{Be}} = \frac{\rho_{\text{Be}} \cdot V_{EZ}}{n \cdot u}$$

Die Zahl  $n$  der zu einer Elementarzelle gehörenden Atome ergibt sich zu 6 (3 im Innern der EZ, 12 an den Eckpunkten gehören zu 1/6 zu dieser EZ, 2 an den beiden Stirnflächen je zur Hälfte). Das Volumen der EZ berechnet sich aus Grundfläche  $A$  mal Höhe  $b$  des sechseckigen Prismas. Berücksichtigt man, dass die Grundfläche aus 6 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge  $a$  besteht und die Höhe  $b$  gleich der zweifachen Höhe eines Tetraeders ist mit der Seitenkante  $a$ , erhält man für das Volumen

$$V_{EZ} = 3\sqrt{2}a^3$$

Einsetzen der Werte liefert recht genau den erwarteten Wert von  $M_{\text{Be}} = 9$ .

**5.2.\*** Die Kristallstruktur von Silizium besteht aus zwei identischen gegeneinander verschobenen kubisch flächenzentrierten Gittern mit gleicher Gitterkonstante  $a$  (sog. Diamantstruktur). Silizium hat die Molmasse 28,09g/mol bei einer Dichte von 2,33 g/cm<sup>3</sup>.

Bestimmen Sie aus den gegebenen physikalischen Größen die Gitterkonstante des Siliziumkristalls.

*Hinweis:* Gehen Sie vor wie bei der Aufgabe 5.1., achten Sie darauf, dass Sie für die Einheitszelle des Diamantgitters lediglich die doppelte Zahl von Atomen berücksichtigen müssen wie für ein kubisch flächenzentriertes Gitter.

### 5.3. Elektronen im Festkörper

Die verschiedenen Wechselwirkungen der Elektronen und Kerne, verursachen eine große Vielfalt unterschiedlicher Kristalle. Während bei den Ionenkristallen die Elektronen fest an einzelne Ionen gebunden sind, bewegen sich die Valenzelektronen bei kovalenten Kristallen paarweise um zwei benachbarte Atome. Im Metall hingegen ist die Bewegung der Valenzelektronen nahezu ungehindert. Da bei der überwiegenden Mehrzahl der Festkörper die Leitfähigkeit durch die Elektronenbewegung verursacht wird, sollten sich die unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Kristalle über deren Bindungsarten erklären lassen. Eine eingehende Betrachtung zeigt jedoch, dass die klassische Elektrentheorie von Paul DRUDE (Kap.2.2.) nicht erklären kann, weshalb z.B. Germanium und Diamant sich bei gleicher Bindungsart und Gitterstruktur in der elektrischen Leitfähigkeit um Größenordnungen unterscheiden. In den folgenden Kapiteln werden grundlegende Begriffe der Mechanik von Mikroteilchen erläutert, um daraus die elektrischen Eigenschaften von Festkörpern abzuleiten.

#### 5.3.1. Welle-Teilchen-Dualismus

##### 5.3.1.1. Wellen und Teilchen

In der klassischen Physik sind die Begriffe Teilchen und Welle wohl definiert und voneinander abgegrenzt. Das klassische Teilchen hat eine bestimmte geometrische Form, nimmt ein bestimmtes Volumen  $V$  ein, hat eine Masse  $m$  und kann eine elektrische Ladung  $Q$  tragen. Die Position des Teilchens kann mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  angegeben werden, dort bewegt es sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und besitzt damit den Impuls  $\vec{p} = m \vec{v}$ . Eine weitere wichtige Größe ist die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.3)$$

Koppelt man Teilchen elastisch, lassen sie sich zu Bewegungen anregen, die man als Wellen bezeichnet. Ein gespanntes Gummiseil ist z.B. ein solches System. Zupft man das Seil an, läuft eine Bewegung über alle Massenelemente des Seiles. Vom einen Seilende wird Energie an das andere Seilende übertragen, ohne dass ein Teilchen sich über diese Distanz bewegt. Neben Seilwellen gibt es zahlreiche andere Wellenarten. Wichtig sind darunter Schallwellen (Schwankungen der Luftdichte) und die elektromagnetischen Wellen. Bei diesen sind die in Raum und Zeit veränderlichen Größen die Vektoren der elektrischen und magnetischen Felder.

Als *harmonische Wellen* bezeichnet man Wellen, bei denen sich eine physikalische Größe sowohl im Raum als auch in der Zeit periodisch in Form einer Sinus- bzw. Cosinusfunktion ändert. Der Einfachheit halber soll eine eindimensionale Welle betrachtet werden, bei der sich folglich die Anregung linear ausbreitet. Eine solche 1D-harmonische Welle einer physikalischen Größe  $E$  genügt der Beziehung

$$E(x,t) = E_0 \sin \phi(x,t) \quad (5.4)$$

mit der orts- und zeitabhängigen *Phase* oder *Phasenfunktion*  $\phi$  und der *Amplitude*  $E_0$ . Den Augenblickswert der Welle  $E(x,t)$  bezeichnet man als *Elongation*.

Wird ein gespanntes Gummiseil an einem Ende durch einen rotierenden Excenter angeregt, läuft wegen der harmonischen (Sinus-) Anregung über das Seil eine harmonische Welle. Eine Momentaufnahme des Seiles ist auf Abb.5.9 dargestellt.

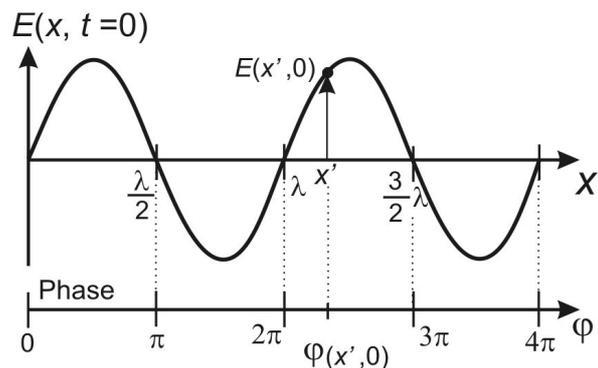


Abb. 5.9 Momentaufnahme ( $t=0$ ) einer harmonischen Welle.

Auf der unteren Abszisse sind die zu den Ortsangaben entsprechenden Werte der Phase der Welle angegeben.

Da bei dieser Momentaufnahme die Phase nur eine Funktion des Ortes ist (die Zeit ist ja konstant  $t=0$ ), muss für  $x = \lambda$  die Phase  $\varphi = 2\pi$  betragen. Da die Phase proportional mit  $x$  wächst, wird eine Proportionalitätskonstante  $k$  definiert, die sogenannte *Wellenzahl*. Dann gilt  $\varphi = kx$ .

Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	(5.5)
------------	----------------------------	-------

Die Welle möge sich mit der Geschwindigkeit  $v_x$  in  $x$ -Richtung ausbreiten. Der Beobachter kann diese Geschwindigkeit daran messen, wie sich eine bestimmte Stelle der Welle (z.B. der erste Wellenberg in Abb.5.10 mit der Phase  $\varphi = \pi/2$ ) nach rechts bewegt.

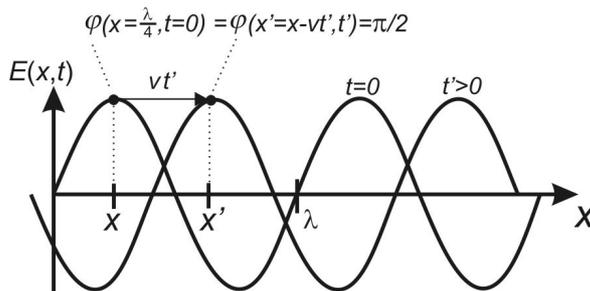


Abb. 5.10 Momentaufnahmen ( $t=0$  und  $t' > 0$ ) einer harmonischen Welle.

Stellen konstanter Phase (hier markiert für den Wellenberg mit  $\varphi = \pi/2$ ) wandern mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit oder *Phasengeschwindigkeit* in  $x$ -Richtung.

Da für diesen Wellenberg die Phase konstant ist (die Sinusfunktion hat für den Wellenberg stets den Wert 1), muss gelten

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - vt)$$

Die Zeitspanne, in der sich an einem festen Ort  $x$  die Phase um den Wert  $2\pi$  ändert (die Welle voll berg gerade um  $\lambda$  in  $x$ -Richtung bewegt hat, ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit  $v = \lambda/T$ . Mit den Beziehungen zwischen Periode  $T$ , Frequenz  $f$  und Kreisfrequenz  $\omega$  einer Schwingung  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  erhält man für die Phasenfunktion einer Welle

$$\varphi(x, t) = \varphi\left(x - \frac{\lambda t}{T}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda t}{T}\right)$$

$$\varphi(x, t) = 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t$$

Somit kann man für die Welle (5.3) schreiben

Harmonische eindimensionale Welle	$E(x, t) = E_0 \sin(kx \mp \omega t)$	(5.6)
-----------------------------------	---------------------------------------	-------

Das „-“ im Argument der Sinusfunktion gilt für den erläuterten Fall einer Welle, die sich in  $x$ -Richtung bewegt. Das „+“ beschreibt den Fall einer sog. rücklaufenden Welle, also einer sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitenden Welle.

Eine wichtige Eigenschaft der Wellen besteht in der Möglichkeit ihrer Überlagerung. Dann addieren sich die dabei beteiligten Wellen. Als Beispiel wird im folgenden die Beugung eines Lichtstrahls am Doppelspalt betrachtet. Ein Laser liefert hierzu Licht einer Wellenlänge  $\lambda$ . Der Lichtstrahl fällt senkrecht auf zwei eng benachbarte Spalte in einer Spaltblende. Das durch den Doppelspalt tretende Licht wird auf einem Bildschirm sichtbar gemacht. Es zeigt sich, dass der zuvor einfache schmale Lichtstrahl in mehrere Lichtstrahlen aufgespalten wird, die auf dem Bildschirm eine Reihe von Lichtpunkten erzeugen.

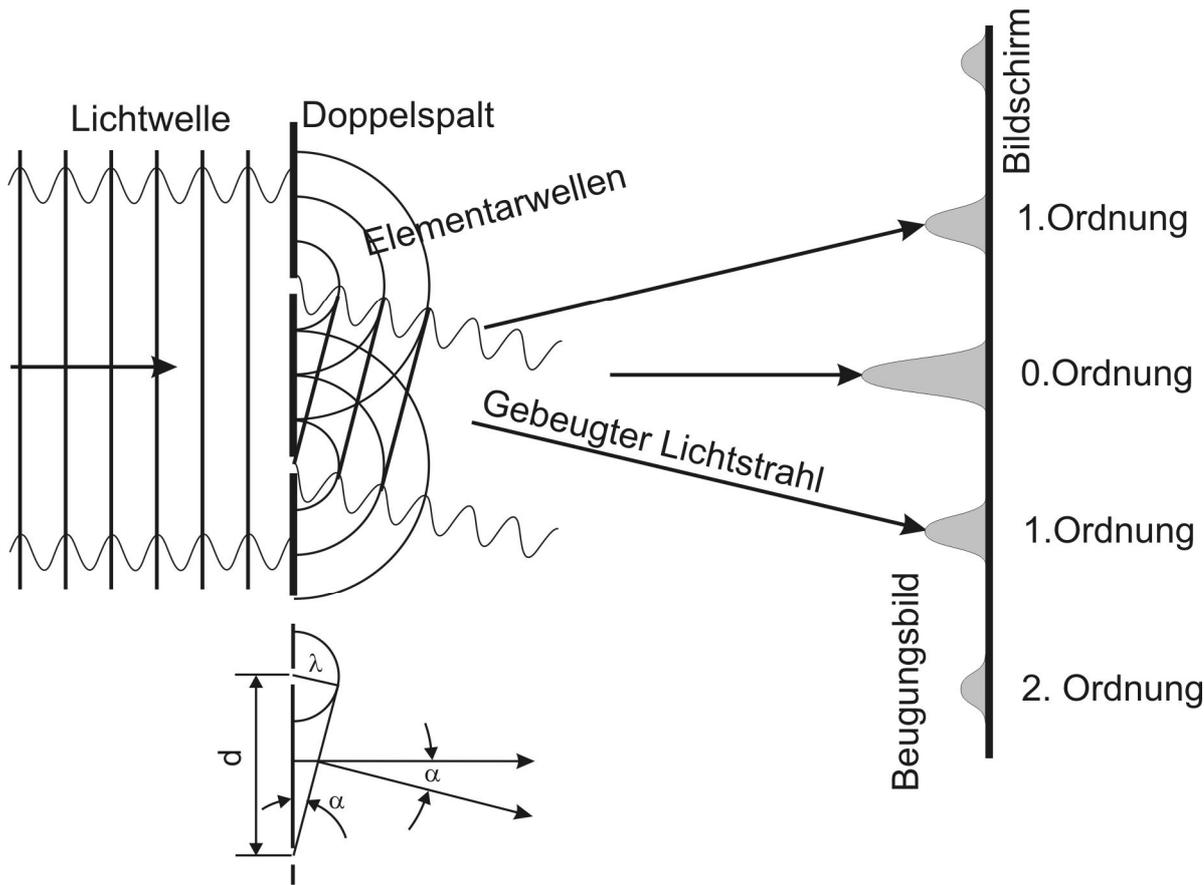


Abb. 5.11 Interferenz am Doppelspalt

Trifft Licht auf einen schmalen Spalt, wirkt dieser als neues Erregerzentrum. Von jedem der beiden Spalte breiten sich radial Elementarwellen aus, die sich überlagern. Wellen gleicher Phase addieren sich zum Beugungsmaximum 0. Ordnung, der Lichtstrahl wird hierbei nicht abgelenkt, wenngleich etwas verbreitert. Aus der Überlagerung von Elementarwellen mit einer Phasendifferenz von  $2\pi$  (entsprechend einem Gangunterschied von  $\lambda$ ) entstehen Lichtstrahlen, die um den Winkel  $\alpha_1 = \arcsin \lambda/d$  gebeugt sind (Beugung erster Ordnung). Beugungen höherer Ordnung entstehen analog durch Überlagerung von Elementarwellen mit mehrfachem Gangunterschied von  $\lambda$ , es gilt  $\alpha_n = \arcsin n\lambda/d$ .

### 5.3.1.2. Teilcheneigenschaften von Wellen

Der Umgang mit Lichtquanten ist heute so selbstverständlich, dass man sich kaum vorstellen kann, dass der äußere photoelektrische Effekt seiner gegen Ende des 19. Jahrhunderts mit Hilfe der klassischen Physik versuchten Erklärung unüberwindliche Schwierigkeiten bereitete.

Dieser von Heinrich HERTZ<sup>51</sup> und W. HALLWACHS<sup>52</sup> 1886/87 entdeckte Effekt, der unverständlich blieb, solange man Licht ausschließlich als Wellenphänomen ansah, war nur eine der gegen Ende des 19. Jahrhunderts bekannten Erscheinungen, die einer Deutung im Rahmen der klassischen Physik widerstanden. Diese Schwierigkeiten konnten schließlich mit Hilfe völlig neuer, im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts entwickelter Vorstellungen über die Eigenschaften von Teilchen und Wellen überwunden werden.

Den ersten Schritt auf diesem Wege ging Max PLANCK im Jahre 1900. Er berechnet die Energiedichte der von einem schwarzen Strahler der Temperatur  $T$  emittierten Wärmestrahlung je Frequenzintervall  $d\nu$  unter der Annahme, dass die die Strahlung emittierenden Elektronen harmonische Oszillatoren sind und Energie nur in ganzzahligen Vielfachen von  $hf$  aufnehmen und abgeben können. Das Resultat seiner Rechnung stand in hervorragender Übereinstimmung mit dem Ex-

<sup>51</sup> Heinrich Rudolf HERTZ (1857-1894) dt. Physiker; experimenteller Nachweis der elektromagnetischen Welle, Entdeckung des Äußeren Lichtelektrischen Effekts gemeinsam mit HALLWACHS

<sup>52</sup> Wilhelm HALLWACHS (1859-1922) dt. Physiker, Schüler von H. HERTZ

periment und enthielt auch die auf der Grundlage klassischer Vorstellungen entwickelte und nur für kleine Frequenzen gültige Beziehung von RAYLEIGH<sup>53</sup>-JEANS<sup>54</sup> als Spezialfall.

Da Oszillatoren Energie nur in Vielfachen von  $hf$  aufnehmen und abgeben können, schlug A. EINSTEIN 1905 vor, elektromagnetische Strahlung als aus Teilchen bestehend aufzufassen, die die Energie  $hf$  besitzen. Die entsprechenden Teilchen werden als Lichtquanten oder Photonen bezeichnet.

1909 erweiterte Einstein seine Lichtquanten-Hypothese und ordnete ihnen eine Energie  $W$  und einen Impuls  $p$  zu. Die Konstante  $h$  heißt Plancksches Wirkungsquantum oder Plancksche Konstante.

Quantenenergie	$E = hf$	(5.7)
Impuls eines Lichtquants	$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}; k = \frac{2\pi}{\lambda}$	
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ W s}^2$	

Durch Einsteins Ideen wurde dem Licht eine korpuskulare Struktur zugeordnet und die Newtonschen Vorstellungen von der korpuskularen Natur des Lichts neu belebt. Andererseits sind aber die Interferenz- und Beugungserscheinungen des Lichts nur im Rahmen einer Wellennatur des Lichtes verständlich. Licht kann sich also sowohl wie ein Teilchenstrom (Photonenstrom) als auch wie eine Welle verhalten.

#### Der äußere photoelektrische Effekt

Der photoelektrische Effekt oder äußere Photoeffekt wurde 1887 von Heinrich HERTZ entdeckt, später von HALLWACHS genauer untersucht und um 1900 von LENARD<sup>55</sup> quantitativ beschrieben.

Abb. 5.12 zeigt eine evakuierte Glasröhre (Photozelle), die zwei Elektroden (Katode und Anode) enthält.

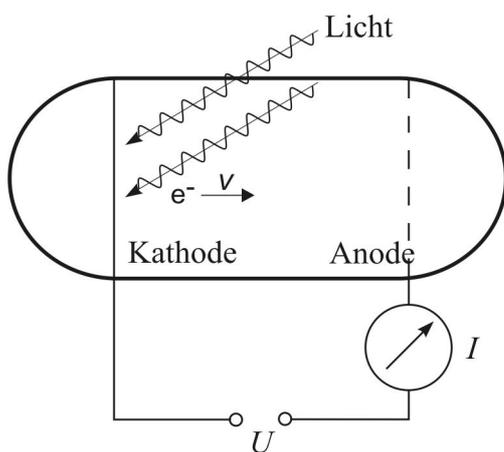


Abb. 5.12 Photozelle

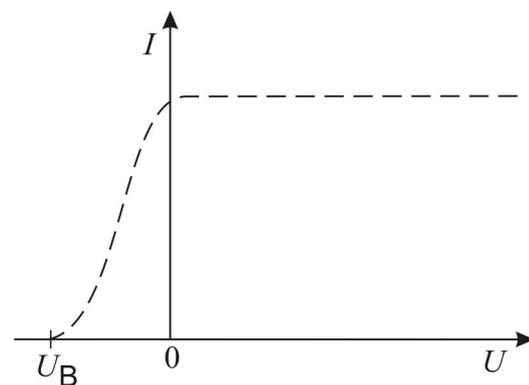


Abb. 5.13 Kennlinie der Photozelle

Auf die linke der beiden über eine einstellbare (nicht dargestellte) Spannungsquelle verbundenen Elektroden fällt monoenergetisches Licht der Frequenz  $f$ . Man beobachtet die in Abb. 5.13 skizzierte Strom-Spannungs-Kennlinie. Das Licht löst aus der bestrahlten Katode Elektronen heraus, die

<sup>53</sup> John William Strutt, 3. Baron RAYLEIGH (1842-1919), engl. Physiker; Lichtstreuung, Entd. des Argon (1904 NP)

<sup>54</sup> James Hopwood JEANS (1877-1946), engl. Physiker und Mathematiker

<sup>55</sup> Philipp Eduard Anton (von) LENARD (1862-1947) dt. Physiker; Arbeiten zu den Kathodenstrahlen (1905 NP), „Dynamidenmodell“ des Atoms als Vorläufer des Rutherford'schen Modells, Lichtelektrischer Effekt

bei  $U > 0$  alle zur Anode gelangen. Der Strom  $I_{\max}$  ist proportional zur Lichtleistung. Ist die Anode relativ zur Photokathode auf negativem Potential, so nimmt mit wachsendem  $|U|$  der Photostrom ab, weil jetzt nur noch die Elektronen mit einer kinetischen Energie größer oder gleich  $e|U|$  zur Anode gelangen. Nur sie können die Bremsspannung  $|U_B|$ , also ein abbremsendes elektrisches Feld zwischen den Elektroden, überwinden.

Elektronen, deren kinetische Energie kleiner als  $e|U_B|$  ist, gelangen nicht mehr zur Anode. Die energiereichsten der aus der Photokathode herausgelösten Elektronen hatten nach Abb. 5.13 offenbar gerade die kinetische Energie  $e|U_{\max}|$ . Eine Änderung der Lichtleistung hat keinen Einfluss auf  $U_{\max}$ . Wiederholt man jedoch das Experiment mit monoenergetischem Licht einer anderen Frequenz, so ändert sich der Wert  $U_{\max}$ , er hängt also von der Frequenz des einfallenden Lichtes ab und nicht von dessen Leistung. Man beobachtet die lineare Abhängigkeit

$$|U_{\max}| = B \cdot f + A \quad \text{für } f \geq f_g \quad . \quad (5.8)$$

Die Konstanten  $B$  und  $A$  können aus den Messpunkten bestimmt werden. Bemerkenswert ist, dass eine gewisse Grenzfrequenz  $f_g$  überschritten werden muss, damit überhaupt Photoelektronen emittiert werden und ein Photostrom beobachtet werden kann.

Nach den Vorstellungen der klassischen Physik müssten die in der Photoelektrode befindlichen Elektronen unter der Einwirkung der auftretenden Lichtwelle erzwungene Schwingungen ausführen. Fiele die Frequenz der einfallenden Lichtquelle mit der Eigenfrequenz des im Metall gebundenen Elektrons zusammen, so läge Resonanz vor. Das Elektron könnte das Metall verlassen. Seine kinetische Energie wäre proportional zur Intensität des Lichtes und, wie Rechnungen zeigten, käme es zu einer beträchtlichen zeitlichen Verzögerung der Emission. Tatsächlich setzt aber der Photostrom unmittelbar mit dem Lichteinfall auf die Photoelektrode ein, und die maximal auftretende kinetische Energie der Photoelektronen hängt, wie erwähnt, nicht von der Intensität des Lichtes ab, sondern nur von dessen Frequenz.

Betrachtet man aber (monoenergetisches) Licht als einen Strom von Photonen der Energie  $hf$  je Photon und nimmt an, dass ein im Katodenmaterial gebundenes Elektron ein Photon entweder vollständig oder gar nicht absorbiert, also dessen Energie  $hf$  übernimmt oder nicht, so muss die Bilanzgleichung

$$\frac{m}{2} v^2 = h \cdot f - W_a \quad (5.9)$$

gelten. Die kinetische Energie der emittierten Elektronen ist gleich der vom absorbierten Photon übernommenen Energie  $hf$ , vermindert um einen Betrag  $W_a$ , die sogenannte Austrittsarbeit. Diese ist erforderlich, um die Energiebarriere zu überwinden, die die Bindung des Elektrons im Metall darstellt. Gleichung (5.9) heißt die "Einsteinsche Gleichung" des photoelektrischen Effektes.

Setzt man

$$\frac{m}{2} v^2 = e |U_{\max}| \quad , \quad (5.10)$$

so folgt mit (5.9)

$$e |U_{\max}| = h \cdot f - W_a \quad .$$

Die Division durch die Elementarladung  $e$  liefert

$$|U_{\max}| = \frac{h}{e} f - \frac{W_a}{e} \quad . \quad (5.11)$$

Diese Gleichung entspricht vollständig dem experimentellen Befund nach Gleichung (5.8). Aus dem Vergleich von (5.11) mit (5.8) findet man

$$B = \frac{h}{e} \quad \text{und} \quad A = -\frac{W_a}{e} \quad . \quad (5.12)$$

Der Wert von  $W_a$  hängt vom speziellen Material der Photoelektrode ab (z. B. 4,3 eV für Cu, 1,8 eV für Cs).

Anordnung des Vorlesungsexperimentes:

Im Versuch dient eine Quecksilberdampfampe zusammen mit einem Satz von Metallinterferenzfiltern zur Herstellung (näherungsweise) monoenergetischen Lichtes bekannter Frequenz  $f$ . Mit Hilfe einer Öffnungsblende wird die Lichtleistung so eingestellt, dass der Strommesser (Gleichstrommessverstärker) einen geeigneten Photostrom anzeigt.

Die beiden Elektroden der Photozelle sind über Kabel mit dem Schaltbrett nach Abb. 5.14 verbunden, ebenso wie die Spannungsquelle für die Bereitstellung einer einstellbaren Bremsspannung, das Voltmeter  $V$  für die Messung der Bremsspannung  $U_B = |U_{max}|$  und der Strommesser  $A$  für den Photostrom.

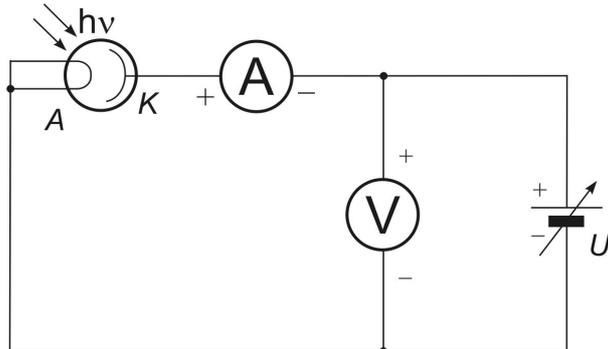


Abb. 5.14 Schaltung zur Messung der Bremsspannung  
Die Spannung  $U$  wird erhöht, bis kein Photostrom mehr nachgewiesen wird. Die hierbei abgelesenen Spannung ist die Bremsspannung

Die Abhängigkeit der Bremsspannung von der Frequenz des einfallenden Lichtes wird grafisch dargestellt s Abb. 5.15. Es wird gezeigt, dass die Abhängigkeit  $U(f)$  einer linearen Funktion (s. Gl. 5.11) entspricht. Der Anstieg ergibt nach Multiplikation mit der Elementarladung den Wert der Planckschen Konstante, der Schnittpunkt mit der Ordinate entspricht der Austrittsarbeit.

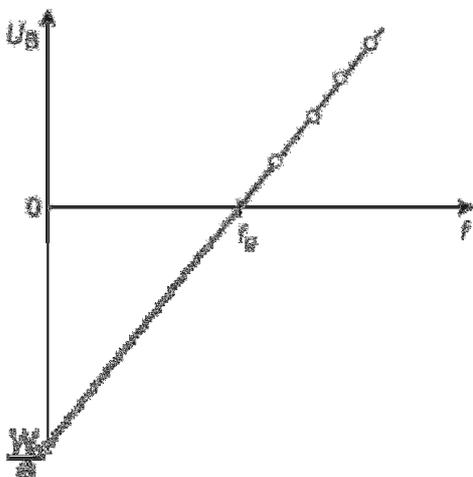


Abb. 5.15 Abhängigkeit der Bremsspannung  $U_B$  von der Frequenz  $f$  des Lichtes.  $W_g$  ist die Austrittsarbeit, erst ab der Grenzfrequenz  $f_g$  werden Elektronen aus der Oberfläche in das Vakuum heraus gelöst.

### 5.3.1.3. Welleneigenschaften von Teilchen

Es handelte sich um eine profunde Erkenntnis, dass man einen Lichtstrahl sowohl als Teilchenstrom von Photonen mit dem Impuls  $p=h/\lambda$  als auch einer Welle mit der Wellenlänge  $\lambda=h/p$  zu betrachten hat. Der Impuls war ja bisher ausschließlich Eigenschaft eines mit Masse behafteten bewegten Materieteilchens  $p = m \cdot v$ . Ein Photon besitzt aber gar keine Ruhemasse.

Gilt der Umkehrschluß auch, könnte man Masseteilchen mit dem Impuls  $p$  auch eine Wellenlänge zuordnen? Hierfür gab es bisher keine experimentellen Hinweise. Selbst als schließlich 1924 Louis DE BROGLIE<sup>56</sup> seine Hypothese der *Materiewellen* veröffentlichte, fehlte eine experimentelle Bestä-

<sup>56</sup> Louis-Victor Pierre Raymond DE BROGLIE (1892-1987), franz. Physiker; Theorie der Materiewellen (NP 1929)

tigung. De Broglie ordnete freien Teilchen eine Energie und einen Impuls gemäß (5.7) zu und forderte für alle physikalischen Objekte sowohl Wellen- als auch Teilchenverhalten. Das war eine bemerkenswerte theoretische Leistung, denn die Beugung von Elektronen z. B. wurde experimentell erst 1926 von C.J. DAVISSON<sup>57</sup> und L.H. GERMER<sup>58</sup> gefunden. Die Wellenlängen von Materiewellen sind zu klein, um sie an makroskopischen Spaltblenden zu streuen. Von den beiden amerikanischen Wissenschaftlern wurden zu diesem Zweck Elektronenstrahlen an Nickel-Einkristallen gestreut und die auf einem Fluoreszenzschirm entstehenden Beugungsbilder fotografiert.

De Broglie-Wellenlänge 
$$\lambda = \frac{h}{m v} \quad (5.13)$$

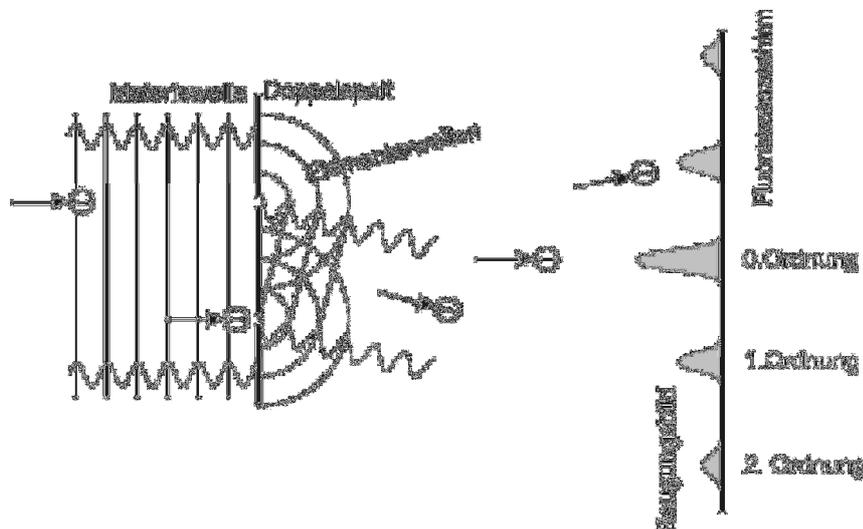
Anm.: Bei hohen Geschwindigkeiten ist die relativistische Massezunahme zu beachten 
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Hierbei sind  $m_0$ -Ruhemasse;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  -Lichtgeschwindigkeit

Der generelle Welle-Teilchen-Charakter der physikalischen Objekte führte zur Entwicklung einer vollständig neuen, heute als Quantenmechanik bezeichneten physikalischen Theorie, mit deren Hilfe einschneidende Widersprüche zwischen dem Experiment und den theoretischen Vorstellungen der klassischen Physik am Ende des 19. Jahrhunderts aufgelöst werden konnten. In welchem Maße hergebrachte Vorstellungen über die Bewegung von Mikroteilchen überwunden werden mussten, soll mit folgendem Experiment illustriert werden: Ein Beschleuniger liefert Elektronen mit einer stets konstanten Geschwindigkeit und damit konstanten De Broglie-Wellenlänge. Die Elektronen passieren eine Doppelspaltblende und treffen dann auf einen Fluoreszenzschirm. Jedes auftreffende Elektron erzeugt ein Lichtpünktchen, welche in ihrer Gesamtheit über die Dauerbelichtung eines Fotofilmes akkumuliert werden. Es entsteht ein von der Struktur her ein dem auf Abb.5.11 ähnelndes Interferenzbild.

Abb. 5.16 Elektronenbeugung am Doppelspalt

Ungeachtet der Tatsache, dass jedes Elektron nur durch einen Spalt hindurchtreten kann, entsteht ein Beugungsbild als Konsequenz der Interferenz von Materiewellen.



Wenn die Intensität des Elektronenstrahls so schwach ist, dass nie mehr als ein einzelnes Elektron „unterwegs“ ist, gibt es auch kein zweites oder mehrere andere Elektronen, mit denen es interferieren kann. Trotzdem entsteht das gleiche Interferenzbild! Wie ist das zu verstehen, da das Elektron ja ein Materieteilchen ist und nur durch eine Spaltöffnung hindurchtreten kann, nicht aber gleichzeitig durch beide?! Hierzu müssen wir uns etwas genauer mit der wellenmechanischen Beschreibung der Elektronenbewegung befassen. Studenten, die es immer etwas genauer wissen wollen, lesen weiter, den anderen sei ein Sprung gestattet. Aber erst die Übungen durcharbeiten, die sind einfach und zudem Prüfungsgegenstand!

<sup>57</sup> Clinton Joseph DAVISSON (1881-1958), US-am. Physiker; Nachweis der Materiewellen mit GERMER (NP 1937)

<sup>58</sup> Lester GERMER (1896-1971), US-am. Physiker

**Übungen**

5.3. Ein Elektron wird mit 10 kV beschleunigt.

a) Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge!

b) Dieses Elektron trifft auf eine Metalloberfläche und setzt seine gesamte Energie als Bremsstrahlung frei (elektromagnetische Welle). Berechnen Sie deren Wellenlänge!

5.4. Das Metall Cäsium ( $Z = 55$ , 1. Hauptgruppe) wird in einer Vakuum-Röhre mit UV-Licht von  $\lambda = 330 \text{ nm}$  Wellenlänge bestrahlt. Hierbei werden Elektronen mit einer Energie von bis zu 2 eV emittiert. Wie groß ist die Austrittsarbeit von Cäsium?

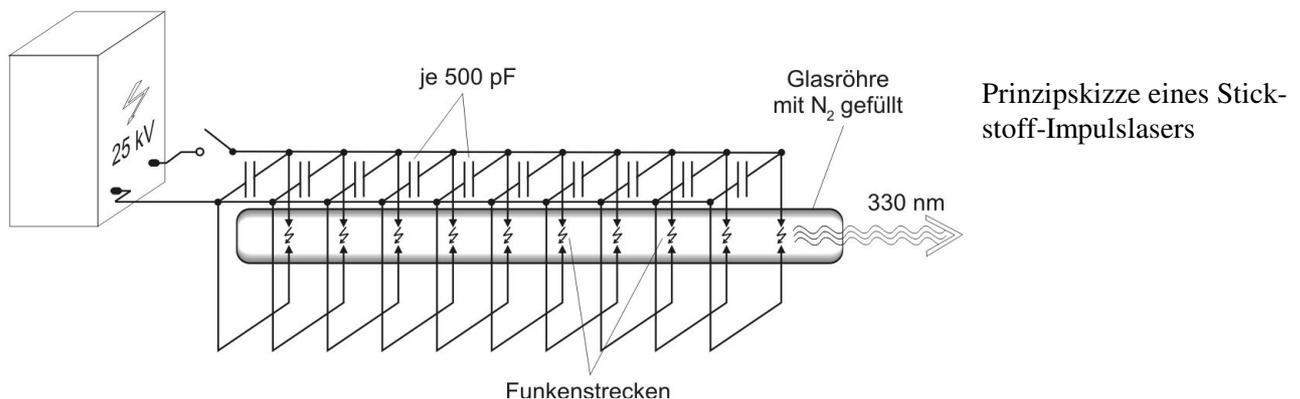
5.5. Was ist die größte Wellenlänge, die aus einer Cäsium-Photokathode mit einer Austrittsarbeit 1,94 eV gerade noch Elektronen freisetzt?. Wie schnell sind die Photoelektronen bei einer Bestrahlung mit UV-Licht von  $\lambda = 248 \text{ nm}$ ?

5.6.\* Ein Stickstofflaser erzeugt kurze (5 ns) Lichtimpulse mit der Wellenlänge  $\lambda = 330 \text{ nm}$ . Die hierzu notwendige Energie wird durch die Entladung einer Kondensatorbatterie (40 Kondensatoren zu jeweils 500 pF) in eine mit Stickstoff gefüllte Glasröhre eingespeist. Das Netzteil liefert bei 25 kV Ladespannung einen annähernd konstanten Strom von 10 mA. Bei Erreichen einer Kondensatorspannung von 25 kV erfolgt spontan der Durchbruch der Funkenstrecken. Durch Elektronenstoß werden die Stickstoffmoleküle angeregt, das Laserlicht breitet sich in Längsrichtung der Glasröhre aus. Ein Messgerät zeigt die Energie von 10 mWs je Impuls an.

a) Wie viele Laserimpulse pro Sekunde sind bei voller Leistung des Netzteiles möglich?

b) Wie viele Photonen werden je Lichtimpuls erzeugt?

c) Wie hoch ist der Wirkungsgrad dieses Lasers (Verhältnis der Licht- zur elektrischen Energie)?



### 5.3.2 Das ideale Elektronengas (in der Vorlesung nicht behandelt, nicht prüfungsrelevant; weiter bei 5.3.4.)

#### 5.3.2.1. Das Elektron im Potentialtopf

Der für die Elektronenbewegung zur Verfügung stehende Raum möge zunächst nur eine Dimension haben, vergleichbar einem extrem dünnen Draht der Länge  $L$ . In diesem können sich die Elektronen sowohl nach rechts als auch nach links bewegen. Die entsprechenden Ausdrücke für die Materiewellen lauten

$$\Psi = \Psi_0 \sin(kx - \omega t) \quad \begin{cases} k > 0 & \text{hinlaufende Welle} \\ k < 0 & \text{rücklaufende Welle} \end{cases}$$

Trifft eine Welle das Ende des Leiters, wird sie reflektiert und läuft zurück. Vergleichen lässt sich dieser Vorgang mit der Bewegung eines klassischen Teilchens in einem durch harte und elastische Wände eingegrenzten Bereich. Wie eine Ping-Pong-Kugel läuft das Teilchen mal nach rechts, mal nach links, ohne dabei Energie zu verlieren. Welche Eigenschaften muss eine Wellenfunktion aufweisen, damit man mit ihrer Hilfe die Bewegung des Elektrons in einem Kastenpotential mit unendlich hohen "Wänden" beschreiben kann?

Wichtig ist zunächst die Feststellung, dass das Elektron nach Reflexion als dann rücklaufende Welle mit sich selbst als der hinlaufenden Welle interferiert. Als Summe erhält man aus zwei solchen Wellen (die für  $x=t=0$  gemeinsam die Phase 0 haben):

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{2} \sin(kx - \omega t) + \frac{\Psi_0}{2} \sin(kx + \omega t) = \Psi_0 \sin kx \cos \omega t. \quad (5.14)$$

Bemerkenswert ist dabei, dass Orts- und Zeitvariable jeweils separiert schwingen. Eine Momentaufnahme zu  $t=0$  zeigt eine Sinusfunktion mit der Amplitude  $\Psi_0$ , diese wird bei  $t>0$  mit einem Faktor zwischen -1 und +1 multipliziert, welcher harmonisch mit  $\omega$  schwingt. Eine solche Funktion heißt *stehende Welle*, s. Abb. 5.17.

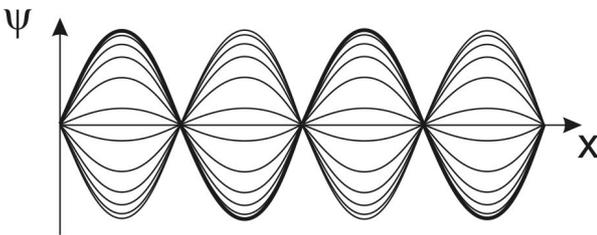


Abb. 5.17. Stehende Welle

Eine stehende Welle ergibt sich als Resultat der Überlagerung je einer hin- und rücklaufenden Welle gleicher Amplitude. Die Schwingungsamplitude der stehenden Welle ist ortsabhängig. Die Stellen mit maximaler Amplitude heißen Schwingungsbäuche, dazwischen liegen Schwingungsknoten.

Da das Elektron sich nur innerhalb des Potentialkastens aufhalten kann, muss der Wert der Wellenfunktion an den Kastengrenzen, also bei  $x = 0$  und  $x = L$  gleich Null sein. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion hat die Bedeutung einer *differentiellen Aufenthaltswahrscheinlichkeit* (s.u.), und die kann nur *innerhalb* des Potentialtopfes von Null verschieden sein. Hieraus resultiert eine einschneidende Bedingung an die Wellenfunktion des Elektrons: sie muss an den Stellen  $x = 0$  und  $x = L$  jeweils Null sein, also einen Knoten haben. Die größte Wellenlänge, die dieser Anforderung genügt, ist  $\lambda_1 = 2L$ . Die nächst kürzere schon  $\lambda_2 = L$ , dann folgt  $\lambda_3 = 2L/3$ , ...,  $\lambda_n = 2L/n$ , s. Abb. 5.18.

Diese diskreten Wellenlängen  $\lambda_n$  kennzeichnen die sogenannten *erlaubten Zustände*. Da mit den dazugehörigen Wellenzahlen  $k_n = n\pi/L$  jeweils der Impuls festgelegt ist, kann leicht die Energie berechnet werden. Im Modell des Freien Elektronengases werden keine Wechselwirkungen berücksichtigt. Somit ergibt sich die Gesamtenergie allein aus der kinetischen Energie:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

Energien des 1D – Elektronengases	$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$	(5.15)
-----------------------------------	--	--------

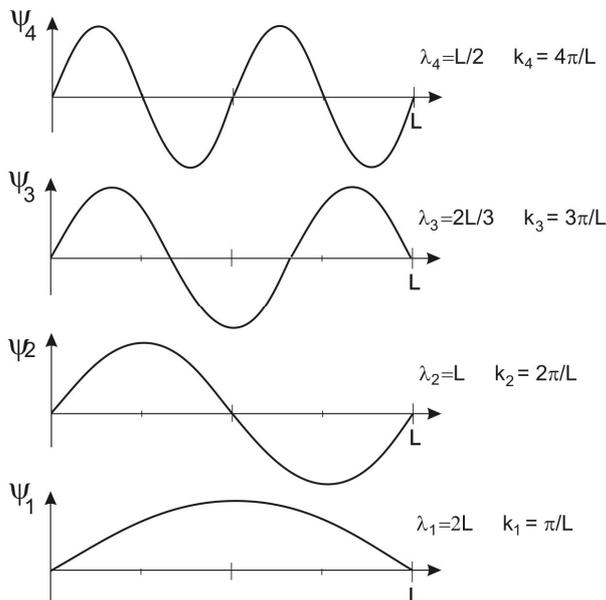


Abb. 5.18. Wellenfunktionen einer eindimensionalen Elektronenbewegung im Kastenpotential der Breite  $L$ .

Dargestellt ist jeweils die Momentaufnahme einer stehenden Welle zu  $t=0$ , beginnend mit den größeren Wellenlängen. Nach kürzeren Wellen hin können die Diagramme beliebig weit fortgesetzt werden.

Infolge Interferenz kommt es zur Auslöschung von solchen Wellen, deren Wellenlänge von  $2L/n$  unterschiedlich ist. Derartige Zustände sind nicht stabil und können von Elektronen somit nicht eingenommen werden.

Man sollte erwarten, dass alle Elektronen das unterste Energieniveau einnehmen. Dem steht jedoch das PAULI<sup>59</sup>-Prinzip entgegen.

**Pauli-Prinzip:** Es existieren in einem System niemals zwei Elektronen im gleichen Zustand.

Jeder Zustand wird durch sogenannte Quantenzahlen charakterisiert. Für den Impuls ist  $n$  die *Quantenzahl*. Weiterhin ist der Eigendrehimpuls des Elektrons zu beachten, dieser ist mit einem magnetischen Moment verbunden, welches sich ähnlich einer Kompassnadel im Magnetfeld ausrichtet, allerdings mit zwei möglichen Einstellungen - in Richtung des Feldes sowie entgegen der Feldrichtung. Üblich ist die Kennzeichnung mit kleinen Pfeilen:  $\uparrow$  und  $\downarrow$ . Da der Elektronenzustand durch den Impuls (Wellenzahl) sowie den Elektronenspin (Eigendrehimpuls mit den Quantenzahlen  $+1/2$  und  $-1/2$ ) festgelegt ist, gehören zu einem Energiewert  $E_n$  2 verschiedene Elektronenzustände.

Die Elektronen besetzen im thermodynamischen Gleichgewicht die energetisch tiefsten Plätze bevorzugt. Bei  $T = 0$  sind ausschließlich die tiefsten Plätze besetzt, soweit dies das Pauli-Prinzip gestattet. Das oberste besetzte Energieniveau  $E_F$  trägt die Bezeichnung FERMI<sup>60</sup>-Niveau. Für eine große Elektronenzahl gilt  $n_F = N/2$ . Somit ergibt sich aus der allgemeinen Beziehung für die kinetische

Energie  $E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  für das eindimensionale Elektronengas im  $n$ -ten Energiezustand

$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m L^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{8m L^2}$  und folglich für das Fermi-niveau eines Systems mit  $N$  Elektronen

$$\text{Fermi - Energie des 1D - Elektronengases } E_F = \frac{\hbar^2}{32mL^2} N^2 \quad \text{mit } N - \text{Elektronenzahl} \quad (5.16)$$

<sup>59</sup> Wolfgang Ernst PAULI (1900-1958), österr. Physiker, Entdeckung des Elektronenspins und des Kernspins, Ausschließungsprinzip der Quantenmechanik (NP 1945), theoret. Vorhersage der Existenz des Neutrons,

<sup>60</sup> Enrico FERMI (1901-1954), it. Physiker; Mitbegründer der Quantenmechanik, Fermi-Dirac-Statistik, Festkörperphysik, Kernumwandlungen durch Neutronenstrahlung, 1938 Emigration in die USA, NP; A-Bomben-Projekt

Die durch Glg. 5.16 ausgedrückten Verhältnisse beim eindimensionalen Elektronengas sind in Abb.5.19 veranschaulicht.

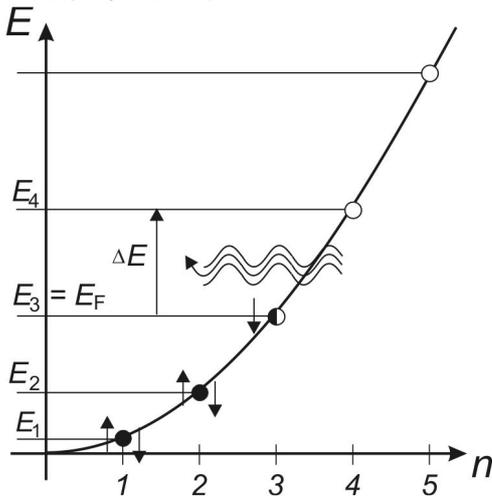


Abb.5.19 Energieniveaus des freien Elektronengases im eindimensionalen Potentialtopf.

Die schwarz eingezeichneten Positionen stellen besetzte Zustände dar. Je Energieniveau existieren 2 Zustände, die durch unterschiedliche Richtungen des Elektronenspins charakterisiert werden. Die Energie des höchsten besetzten Zustandes heißt *Fermienergie*.

Wird eine elektromagnetische Welle eingestrahlt, kann ein Elektron auf ein höheres unbesetztes Energieniveau *angeregt* werden, sofern die *Resonanzbedingung*

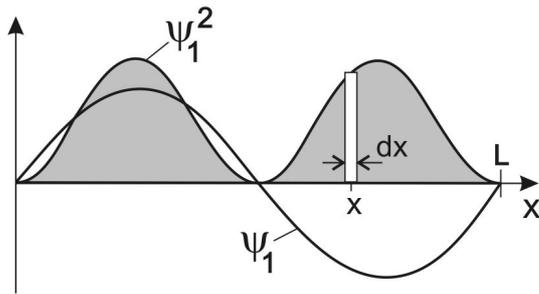
$$\Delta E = E_o - E_u = h \cdot f \quad (5.17)$$

erfüllt ist. Nach einiger Zeit nimmt es unter Energieabstrahlung wieder das tiefere Niveau ein. Dieser *Relaxations*-Prozess kann auch in mehreren Teilschritten ablaufen. Bei einem *Absorptionsspektrum* wird die Entnahme von Energie aus einer elektromagnetischen Welle in Abhängigkeit von der eingestrahnten Wellenlänge gemessen. Wird die nach erfolgter Anregung eintretende Energieabstrahlung gemessen, spricht man von einem *Emissionsspektrum*.

Welche physikalische Bedeutung hat die Wellenfunktion?

Keinesfalls kann man die WF so verstehen, dass das Elektron sich etwa wellenförmig bewegt. Bei einer klassischen Welle bewegen sich ja die schwingenden Teilchen auch nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei Elektronen ist es darüber hinaus gar nicht möglich, die Bahn eines Teilchens genau zu verfolgen und aufzuzeichnen. Jede Wechselwirkung mit einem Messgerät, die zur Orts- und Geschwindigkeitsbestimmung dieses Teilchens notwendig ist, verändert sofort diese beiden Größen. Es lassen sich somit nur statistische Aussagen machen: Ein System wird wieder und wieder unter gleichen Ausgangsbedingungen präpariert und ein Experiment durchgeführt. Als Ergebnis erhält man z.B. eine Verteilung von Häufigkeiten erfolgreicher Messungen über der Ortskoordinate. Wo diese Häufigkeit groß ist, besteht eine höhere Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung das Teilchen dort anzutreffen. Ist man bestrebt, Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig zu messen, muss man feststellen, dass sich beide Messungen stören, da jede einzelne Messung das Teilchen bereits beeinflusst. Orts- und gleichzeitige Impulsangabe sind also prinzipiell nicht beliebig genau möglich. Dieser Umstand findet seinen quantitativen Ausdruck in der *Unschärferelation* von Werner HEISENBERG.

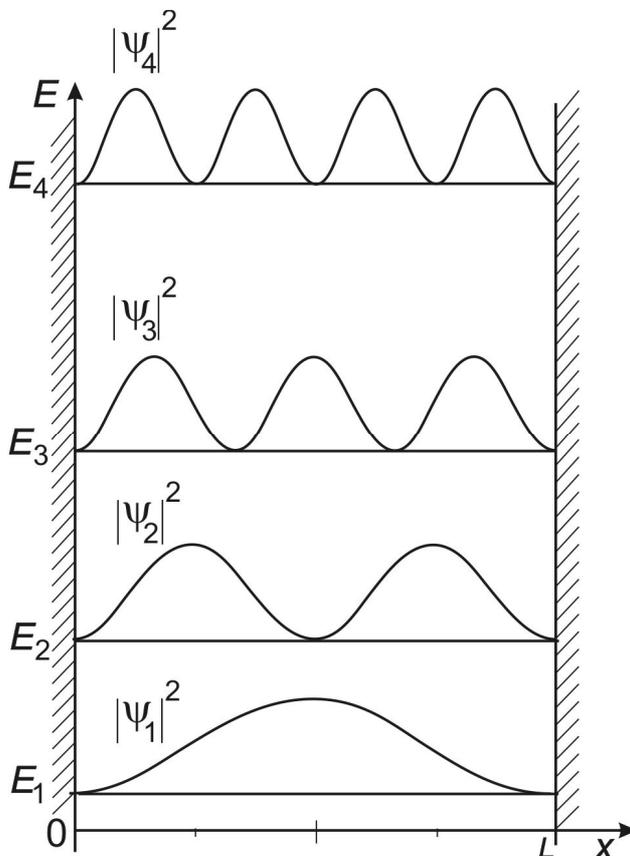
Derartige *Aufenthaltswahrscheinlichkeiten* sind die möglichen Aussagen in der sogenannten *Wellenmechanik*, berechnet werden sie aus dem Betragsquadrat der Wellenfunktion (die WF ist mitunter eine komplexe Funktion). Das Produkt  $|\Psi|^2 dx$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung das Teilchen im Intervall  $x, \dots, x + dx$  anzutreffen, s. Abb.5.16. Man bezeichnet  $|\Psi|^2$  auch als *Wahrscheinlichkeitsdichte* oder *differentielle Wahrscheinlichkeit*. Die Wellenfunktion selbst hat keine reale Entsprechung und ist lediglich eine Rechengröße.

Abb.5.20. Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\Psi|^2$ 

Die graue Fläche entspricht der Gesamtwahrscheinlichkeit einer Messung des Teilchens zwischen  $x$  und  $L$ . Diese wird meist auf 1 normiert ( $\int_0^L |\Psi|^2 dx = 1$ ). Die weiße

Rechteckfläche  $|\Psi|^2(x)dx$  ist dagegen die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall  $x, \dots, x + dx$  anzutreffen.

Da sich die Wellenfunktionen für verschiedene Zustände voneinander unterscheiden, sind die Wahrscheinlichkeiten, das Elektron an bestimmten Orten anzutreffen, von dessen Zustand abhängig.

Abb. 5.21. Wahrscheinlichkeitsdichten  $|\Psi_n|^2$ 

Der Verlauf der einzelnen Funktionen entspricht der Wahrscheinlichkeit einer Messung des Teilchens zwischen  $x$  und  $L$  jeweils im Zustand mit der Energie  $E_n$ . Zu erkennen ist, dass diese stark vom eingenommenen Zustand abhängt. Insbesondere ist bei den unteren Zuständen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den Rändern des Kastens geringer als in dessen Mitte. Allerdings ist auch ersichtlich, dass bei Zuständen mit sehr hoher Energie die Wahrscheinlichkeitsdichte innerhalb des "Kastens" überall gleich sein wird. Dies entspricht der Bewegung eines klassischen Teilchens. Hierin kommt ein wichtiges Prinzip zum Ausdruck: Bei hohen Energien sind die Ergebnisse einer wellenmechanischen Betrachtungsweise denen einer klassischen äquivalent (Korrespondenzprinzip).

### 5.3.2.2. Zustandsdichte

Die Anzahl der Zustände  $dn$  je Energieintervall  $dE$  wird als Zustandsdichte  $D$  bezeichnet.

$$n = \frac{2L}{h} \sqrt{2mE}$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{L}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

$$D = 2 \frac{dn}{dE} = 2 \frac{L}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (5.18)$$

Hierbei fanden die beiden möglichen Spineinstellungen im Faktor 2 Berücksichtigung.

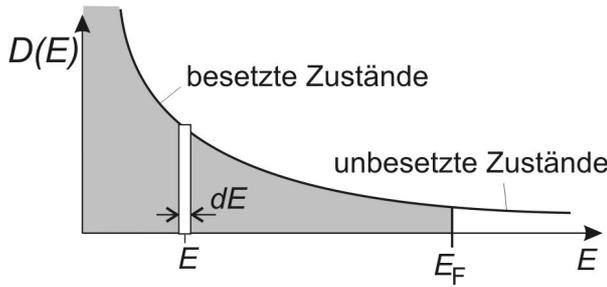


Abb. 5.22 Zustandsdichte  $D(E)$  für ein 1D-Elektronengas

Die graue Fläche entspricht der Gesamtzahl der besetzten Zustände  $N = \int_0^{E_F} D(E)dE$ . Die weiße Rechteckfläche  $D(E)dE$  ist gleich der Zahl der Elektronen mit einer Energie im Intervall  $E, \dots, E + dE$ .

### 5.3.2.3. Die Fermi-Funktion

Während bei der Temperatur des absoluten Nullpunktes ausnahmslos alle Zustände unterhalb der Fermi-Energie besetzt werden und die darüber liegenden Zustände unbesetzt, kommt es bei  $T > 0$  infolge thermischer Anregung dazu, dass einige Elektronen auch Zustände oberhalb der Fermi-Energie besetzen und somit auch Zustände unterhalb der Fermi-Energie frei bleiben. Die *Fermi-Funktion*  $f(E, T)$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einem System mit der Fermi-Energie  $E_F$  bei der Temperatur  $T$  Zustände mit der Energie  $E$  besetzt sind. Bei  $T=0$  ist diese Wahrscheinlichkeit für Energien  $E < E_F$  gleich 1, für Energien  $E > E_F$  gleich 0. Der formale Zusammenhang lautet:

Fermi – Verteilungsfunktion	$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{kT}} \quad (5.19)$
-----------------------------	--

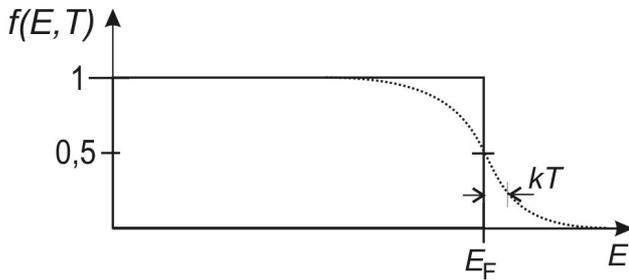


Abb. 5.23 Fermi-Verteilungsfunktion

Die durchgezogene Linie gibt den Verlauf der Fermi-Funktion für  $T = 0$  an. Diese springt mit wachsender Energie von 1 auf 0, sobald  $E > E_F$ . Die gestrichelte Linie gilt für  $T > 0$ . Zustände mit  $E > E_F$  haben eine (geringe) Wahrscheinlichkeit der Anregung. Diese Wahrscheinlichkeit wird sehr klein, sobald  $E - E_F > kT$ . Bei  $E = E_F$  gilt  $f = 1/2$ .

Bei einer Temperatur  $T > 0$  wird ein Zustand mit  $E = E_F$  mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 besetzt.

Die Dichte der *besetzten* Zustände bei  $T > 0$  lässt sich jetzt mit der Fermi-Funktion leicht ausdrücken. Sie ist gerade gleich dem Produkt  $fD$ .

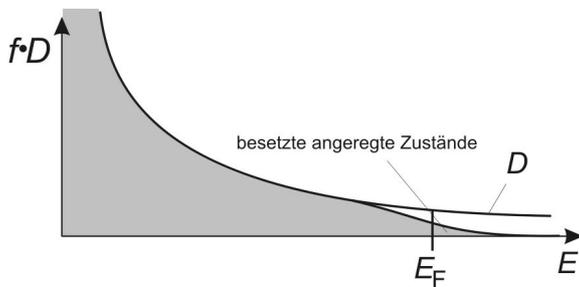


Abb. 5.24 Dichtefunktion der besetzten Zustände

Die graue Fläche stellt die besetzten Zustände dar. Sie entspricht dem Integral der mit der Fermi-Funktion gewichteten Zustandsdichte  $D$ . Der Anteil der besetzten Zustände mit  $E > E_F$  ist selbst bei hohen Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunktes des Metalls sehr klein gegen die Gesamtzahl der Elektronen

$$\int_{E_F}^{\infty} f(E, T)D(E) dE \ll N .$$

Der geringe Anteil der Elektronen in angeregten Zuständen zeugt davon, dass das Elektronensystem als ganzes offensichtlich bei Erwärmung des Festkörpers nur wenig Energie aufnehmen kann. Experimentell äußert sich dieser Umstand in der Regel von *Dulong-Petit*. Nach dieser Regel beträgt die mittlere Energie eines Atoms im Festkörper gerade  $3kT$ . Jedes Atom im Festkörper besitzt 3 Schwingungsfreiheitsgrade und jeder Freiheitsgrad der Bewegung trägt  $kT/2$  zur mittleren kineti-

schen Energie bei. Da bei Schwingungen die Gesamtenergie sich im Mittel je zur Hälfte aus kinetischer und potentieller Energie zusammensetzt, ergibt sich für ein Mol die thermische Energie von  $3kTL$ , mit  $L$  der *Loschmidt'schen* oder *Avogadro'schen* Zahl. Als leicht zugänglicher Größe bietet sich die spezifische Molwärme an. Für alle Festkörper gilt in guter Näherung

$$\text{Regel von Dulong-Petit: } C_{\text{mol}} = 3kL, \quad L = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (5.20)$$

Dass diese Regel gilt, ist allein dem Umstand zu verdanken, dass die Elektronenbewegung keinen wesentlichen Beitrag zur spezifischen Wärme liefert. Die Elektronenenergien (insbesondere die Fermienergie) sind um Größenordnungen größer als die Energie  $kT$  der thermischen Bewegung und die allermeisten Elektronen ändern somit ihren Zustand nicht bei Temperaturerhöhung.

#### 5.3.2.4. Das dreidimensionale Elektronengas

Der reale Festkörper ermöglicht die Ausbreitung von Elektronenwellen in allen drei Raumrichtungen. Die Geschwindigkeit, ebenso wie der Impuls und also die Wellenzahl, sind als Vektoren zu behandeln. Anstelle von Glg. 5.14 gilt dann für eine stehende Welle

$$\Psi = \Psi_0 \sin \vec{k}\vec{r} \cos \omega t. \quad (5.21)$$

Eine analoge Betrachtung wie oben durchgeführt ergibt für die Fermi-Energie und die Zustandsdichte des freien 3D-Elektronengases die folgenden Ausdrücke:

$$\text{Fermi-Energie des 3D-Elektronengases } E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit } V - \text{Volumen} \quad (5.22)$$

$$\text{Zustandsdichte des 3D-Elektronengases } D(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

Bemerkenswert ist, dass sowohl beim 1D- als auch beim 3D-Elektronengas die Fermi-Energie allein von der Konzentration der Teilchen abhängt ( $N/L$  bzw.  $N/V$ ).

### Übungen

**5.7.\*** Barium (2 Elektronen je Atom) kristallisiert kubisch raumzentriert (2 Ionen je Elementarzelle, die hier ein Kubus der Kantenlänge  $a$  darstellt), die Gitterkonstante beträgt  $a = 5,01 \cdot 10^{-10}$  m. Berechnen Sie die Fermi-Energie der Elektronen! Welcher thermodynamischen Temperatur des Elektronengases entspricht dieser Wert (aus  $E = kT$ ,  $k$ -Boltzmann-Konstante)? Welcher Geschwindigkeit eines klassischen Elektrons entspricht dieser Wert?

*Lösung:* Beim kubisch raumzentrierten Gitter gehören das zentrale Atom sowie 8/8 der Eckatome zur Elementarzelle. Das sind 2 Atome bzw.  $N = 4$  Elektronen je EZ. Das Volumen ist  $V = a^3$ . Die Fermi-Energie ergibt sich mit  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$ ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ ;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}$ ; aus der Beziehung

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{zu } E_F = 5,9 \cdot 10^{-19} \text{Ws} = 3,7 \text{eV} . \text{ Aus } E_F = k_B \cdot T_F \text{ folgt } T_F = 42\,800 \text{ K (!)}$$

Diese kinetische Energie entspricht einer Geschwindigkeit von  $v_F = 1140 \text{ km/s}$

**5.8.\*** Fünf Elektronen bewegen sich in einem 1-dim. "Potentialkasten" von  $1 \mu\text{m}$  Länge. Welche Energie sowie Geschwindigkeit hat bei  $T = 0$  das energiereichste Elektron? Mit elektromagnetischer Strahlung welcher Wellenlänge kann es auf das nächst höhere angeregte Niveau gehoben werden?

*Lösung:* Die Energieniveaus sind nach der Formel  $E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$  (Kastenpotential) zu bestimmen.

### 5.3.3. Das reale Elektronengas (in der Vorlesung nicht behandelt, nicht prüfungsrelevant; weiter bei 5.3.4.)

#### 5.3.3.1. Periodische Randbedingungen

Im folgenden soll die Wechselwirkung der Elektronen mit den Ionen des Wirtsgitters Berücksichtigung finden. Wir betrachten die Elektronenbewegung zunächst wieder in einem eindimensionalen Kristall der Länge  $L$ . In diesem können sich die Elektronen sowohl nach rechts als auch nach links bewegen. Die entsprechenden Ausdrücke für die Materiewellen lauten  $\Psi_{\pm} = \Psi_0 \sin(kx \pm \omega t)$ .

Um die Vorgänge etwas übersichtlicher zu gestalten, mögen die Leiterenden miteinander verbunden werden zu einem Ring mit dem Umfang  $L$ . Darin laufen die Elektronen als Wellen jeweils rechts oder links herum. Da sie als harmonische Wellen endlos sind, interferieren sie mit sich selbst. Hierbei löschen sich nur solche Wellen nicht aus, deren Wellenlängen Teiler von  $L$  sind, die also eine periodische Randbedingung erfüllen:

$$\Psi = \Psi_0 \sin(kx - \omega t) = \Psi_0 \sin(k(x + L) - \omega t) \quad .$$

Beginnend mit der größten Wellenlänge  $\lambda_1 = L$  sind auf Abb. 5.25. hierzu Beispiele gegeben.

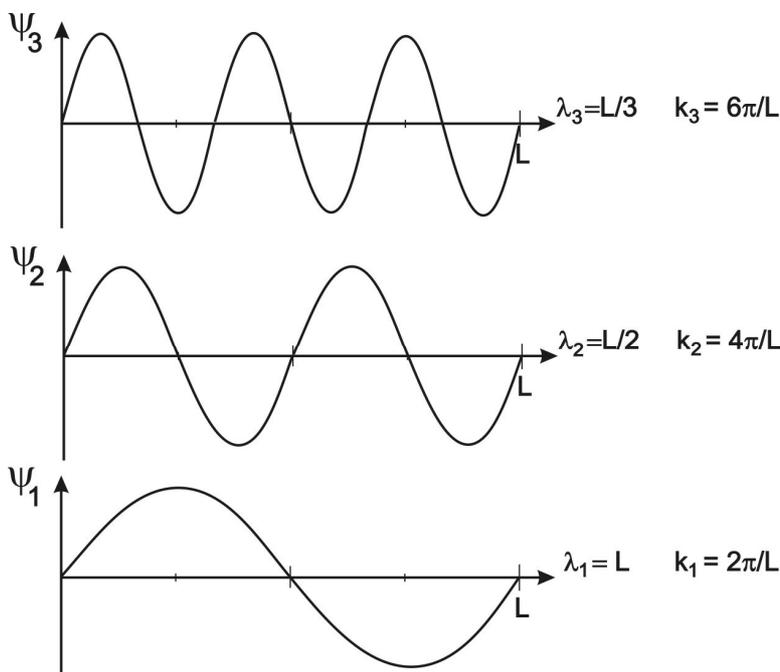


Abb. 5.25. Wellenfunktionen einer eindimensionalen Elektronenbewegung der Periodizität  $L$ .

Infolge Interferenz kommt es zur Auslöschung von solchen Wellen, deren Wellenlänge von  $L/n$  unterschiedlich ist. Derartige Zustände sind nicht stabil und können von Elektronen somit nicht angenommen werden.

Die Werte der kinetischen Energie dieser *erlaubten Zustände* sind wieder leicht zu berechnen. Allerdings ergeben sich durch die veränderten Randbedingungen bezüglich der Periodizität der Wellen andere Werte als beim vorher behandelten Potentialtopf. Da jetzt zwischen hin- und rücklaufenden Elektronen unterschieden wird, gehören zu jedem Energiewert  $E_n$  zwei Zustände, die durch unterschiedliche Impulse  $p_{\pm} = \frac{h}{L}(\pm n)$  gekennzeichnet sind

Energien des 1D – Elektronengases mit periodischen Randbedingungen	$E_n = \frac{h^2}{2mL^2} n^2 \text{ mit } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$	(5.24)
--	---	--------

Da der Elektronenzustand durch den Impuls (Wellenzahl) sowie den Elektronenspin (Eigendrehimpuls) festgelegt ist, gehören zu einem Energiewert  $E_n$  nach diesem Modell 4 verschiedene Elektronenzustände. Für eine große Elektronenzahl gilt  $n_F = N/4$ . Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sowohl für die Fermi-Energie  $E_F$  als auch die Zustandsdichte  $D$  die gleichen Ausdrücke (5.16) bzw. (5.18) gelten wie oben für das Elektron im Potentialtopf abgeleitet.

Die durch Glg. 5.24 ausgedrückten Verhältnisse beim eindimensionalen Elektronengas sind in Abb. 5.26 veranschaulicht.

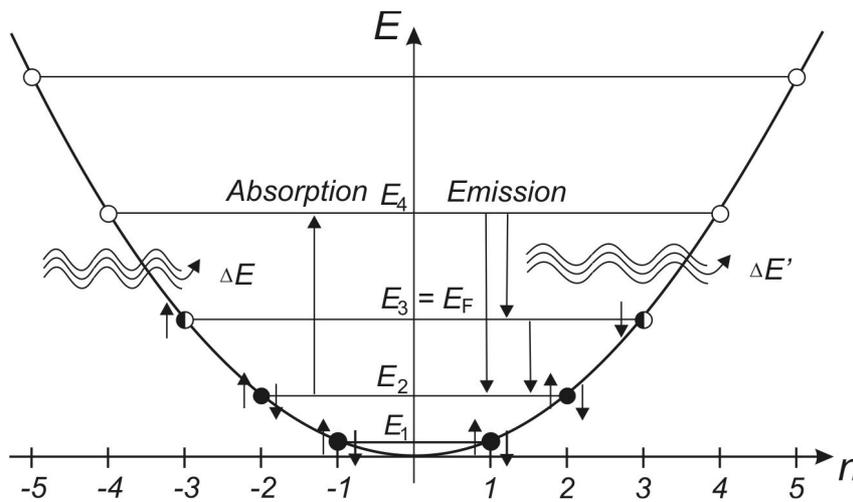


Abb.5.26 Energieniveaus des eindimensionalen freien Elektronengases mit periodischen Randbedingungen. Die schwarz eingezeichneten Positionen stellen besetzte Zustände dar. Je Energieniveau existieren 4 Zustände, die durch unterschiedliche Richtungen des Elektronenspins sowie des Impulses charakterisiert werden. Die Energie des bei 0 K höchsten besetzten Zustandes heißt *Fermi-Energie*.

### 5.3.3.2. Energiebänder

Im folgenden soll die Wechselwirkung der Elektronen mit den Ionen berücksichtigt werden. Somit wird in der Gesamtenergie neben der Kinetischen Energie ein Beitrag der Potentiellen Energie berücksichtigt. Da sich Elektronen und Ionen wechselseitig anziehen, liefert die Potentielle Energie einen negativen Beitrag. Von besonderer Wichtigkeit ist, dass dessen Größe unter bestimmten Bedingungen sowohl von der Wellenlänge als auch der Phasenlage der Wellenfunktion bezüglich des Gitters abhängt. Besonders augenscheinlich wird dieser Umstand bei einer Wellenlänge von  $\lambda=2a$  ( $a$ -Gitterkonstante), s. Abb. 5.27.

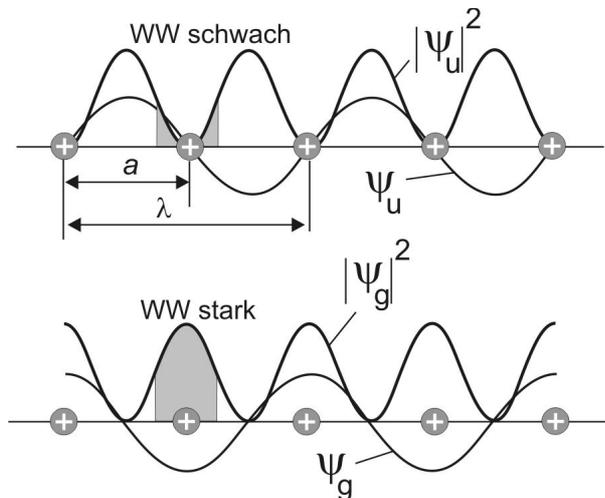


Abb. 5.27 Gerade, ungerade Wellenfunktionen und deren Wahrscheinlichkeitsdichten

Bei Wellenlängen  $\lambda = 2a$  kann man zwischen geraden und ungeraden Wellenfunktionen unterscheiden. Die ungerade WF weist an den Orten der Ionen Knoten auf, die gerade Schwingungsbäuche. Die unterschiedlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Elektronen in der Nähe der Ionen (graue Flächen) bewirken unterschiedliche Wechselwirkungsenergien ( $W_{pot} \approx 1/r$ ) trotz gleicher Wellenlänge und somit gleicher kinetischer Energien. Dies führt zu einem Sprung der Funktion  $E(k)$  bei  $k = \pm \pi/a$ . Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich für Wellen mit Wellenzahlen  $k = \pm n\pi/a$  (mit  $n$ -ganze Zahl) anstellen

Wie aus Abb.5.27 ersichtlich, führt eine Phasenverschiebung der Elektronenwelle um  $\lambda/4$  dazu, dass die Potentielle Energie, also die Wechselwirkungsenergie von Elektron und Ionen, einen anderen Wert annimmt. Für eine Wellenlänge mit  $k = \pi/a$  existieren somit zwei unterschiedliche Werte der Gesamtenergie. Addiert man den Beitrag der Potentiellen Energie zur Funktion der Kinetischen Energie  $E(k)$  von Abb.5.26 ergibt sich ein Kurvenverlauf, der durch *Energielücken* bei Wellenzahlen  $k = \pm n\pi/a$  gekennzeichnet ist. Es sind dies Bereiche von Energien, für die es keine Elektronenzustände gibt, die Zustandsdichte also verschwindet. Diese Bereiche werden auch *verbotene Zonen* genannt, dazwischen liegende *erlaubte Bereiche* bilden die *Energiebänder*.

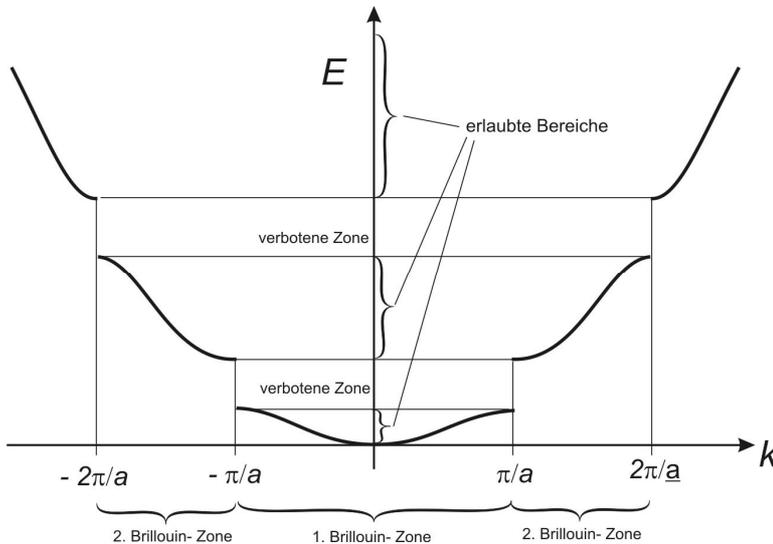


Abb. 5.28 Erweitertes Zonenschema für das 1D-Elektronengas

Dargestellt sind die untersten drei Energiebänder. Die Zustände mit Beträgen der Wellenzahlen zwischen Null und  $\pi/a$  bilden das tiefste Energieband. Man bezeichnet diesen Bereich als 1. BRILLOUIN<sup>61</sup>sche Zone. Zwischen diesen Zuständen und denen mit Wellenzahlbeträgen zwischen  $\pi/a$  und  $2\pi/a$  (diese gehören zur 2. Brillouin'schen Zone) klappt eine Energielücke, also ein Bereich von Energien, die von Elektronen nicht angenommen werden können.

Bei der Lösung mancher Probleme ist es hilfreich, den Inhalt höherer in die erste Brillouin-Zone zu überführen (z.B. kann ein Elektron bei einem Stoß vom Gitter leicht einen Impuls mit dem Wellenvektor  $k$  aufnehmen). Diese Darstellung bezeichnet man als *Reduziertes Zonenschema*. Ebenso wie das erweiterte Zonenschema ist es bezüglich einer Umkehr des Vorzeichens der Wellenzahl (bzw. des Wellenzahlvektors beim zwei- oder dreidimensionalen Gitter) symmetrisch. Aus diesem Grund wird bei mehrdimensionalen Gittern das Zonenschema für unterschiedliche Raumrichtungen dargestellt. Die Richtung des Wellenzahlvektors wird gewöhnlich mit den sogenannten *Millerschen Indizes* bezeichnet. Es handelt sich hierbei um ganze Zahlen, die als Koordinaten eines Richtungsvektors betrachtet werden können. [100] bezeichnet die Richtung der Körperkante eines Würfels, [110] und [111] Richtungen einer Flächen- bzw. Raumdiagonale. Da der Kristall in unterschiedlichen Richtungen unterschiedliche Periodizitäten aufweist, ergeben sich unsymmetrische Darstellungen, s. Abb. 5.29.

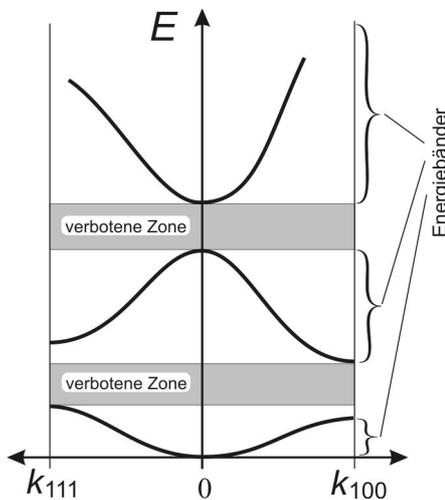


Abb. 5.29 Reduziertes Zonenschema für das 3D-Elektronengas  
Qualitativ dargestellt sind die untersten drei Energiebänder eines räumlichen Gitters.

### 5.3.3.3. Zahl der Quantenzustände in einem Band

Zunächst betrachten wir wieder einen linearen Kristall, bestehend aus einer Kette von gleichartigen Atomen im Abstand  $a$ . Sei  $N$  die Anzahl der primitiven Elementarzellen und somit  $L=Na$  die Länge des Kristalls. Werden über die Länge  $L$  wieder periodische Randbedingungen wie unter 5.3.3.1. angewendet, sind die erlaubten Werte der Wellenzahl  $k$  eines Elektrons in der ersten Brillouin-Zone

$k = \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{4\pi}{L}; \pm \frac{6\pi}{L}; \dots; \pm \frac{N\pi}{L}$ , was genau  $N$  verschiedene Wellenzahlen ergibt. Da man noch die

beiden Spineinstellungen zu berücksichtigen hat, ergibt sich die Zahl von genau  $2N$  Quantenzuständen in einem Energieband. Dieses Ergebnis gilt auch für den dreidimensionalen Kristall.

<sup>61</sup> Leon BRILLOUIN (1889-1969), franz. Physiker, Schüler von Marie Curie, Brillouin-Streuung, Paramagnetismus

Enthält jede primitive Elementarzelle ein einwertiges Atom, so ist das Band gerade halb besetzt. Enthält die primitive Elementarzelle zwei Valenzelektronen (entweder je eines von zwei einwertigen Atomen oder zwei Valenzelektronen von einem zweiwertigen Atom je EZ), so ist das Band genau voll besetzt.

### 5.3.3.4. Metalle und Isolatoren

Ist das höchste Band voll besetzt und zudem durch eine Energielücke vom nächst höheren Band getrennt, ist der Kristall ein Isolator. Ein äußeres elektrisches Feld kann keinen Stromfluss verursachen. Da alle Quantenzustände besetzt sind (zu jedem Elektron mit  $k$  existiert eines mit  $-k$ ), kann der Gesamtimpuls der Elektronen nicht geändert werden. Dies steht in krassem Unterschied zu den Verhältnissen bei freien Elektronen. Nur mit einer sehr hohen Spannung könnte durch Zerstörung der elektronischen Struktur ein Stromfluss bewirkt werden.

Eine Bedingung dafür, dass ein Kristall ein Isolator ist, besteht in der geraden Anzahl der Elektronen in der primitiven Einheitszelle. Ist diese erfüllt, muss noch untersucht werden, ob sich die Bänder eventuell energetisch überlappen oder nicht. Bei Bandüberlappung ergeben sich statt eines vollen Bandes mehrere teilbesetzte und damit Metallcharakter.

Da die Alkalimetalle ebenso wie die Edelmetalle ein Valenzelektron je primitiver Elementarzelle besitzen, ist ihr Metallcharakter offensichtlich. Die Erdalkalimetalle besitzen dagegen zwei Valenzelektronen je primitiver Elementarzelle, könnten somit Isolatoren sein. Jedoch überlappen ihre Bänder, was zu (allerdings nicht sehr ausgeprägten) metallischen Eigenschaften führt.

Diamant, Germanium und Silizium sind vierwertig und zu je zwei Atomen in einer primitiven Elementarzelle enthalten. Da ihre Bänder nicht überlappen, sind sie Isolatoren. Warum man aber bei Germanium und Silizium von Halbleitern spricht, wird im folgenden Abschnitt erklärt.

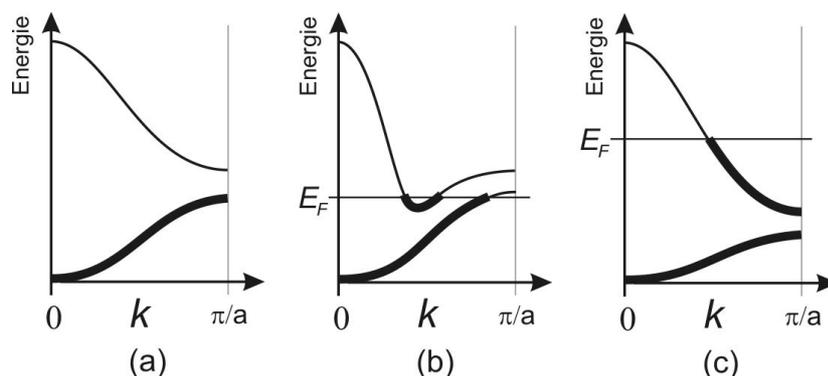


Abb. 5.30 Bandstrukturen

Es sind jeweils die beiden höchsten Energiebänder dargestellt für

(a) Isolator

(b) Metall durch Bandüberlappung

(c) Metall durch Elektronenkonzentration  
Durch dickere Linien sind die besetzten Zustände gekennzeichnet, deren Obergrenze wird durch die Fermi-Energie gebildet.

### Übungen

**5.1.\*** In einem eindimensionalen Leiter der Länge  $L = 1$  nm befinden sich 5 Elektronen. Berechnen Sie nach dem Modell des „1-D-Potentialtopfes“ die Werte der unteren 3 Energieniveaus und geben Sie die Lage des Fermi-Niveaus an! Durch Einstrahlung einer möglichst niederfrequenten elektromagnetischen Welle soll ein Elektron auf ein höheres Energieniveau gebracht werden. Zwischen welchen beiden Niveaus findet dieser Übergang statt und welche Wellenlänge ist hierzu notwendig?

**Lösung:** Nach dem Modell des Potentialtopfes steht für die Bewegung der 5 Elektronen ein linearer Bereich von 1 nm Länge zur Verfügung. Mögliche Energiewerte für die Elektronen sind nach Glg. 5.15

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man die gegebenen Größen ein, so erhält man für den unteren Energiewert  $E_1 = 5,9 \cdot 10^{-20}$  Ws. Analog für  $E_2 = 24 \cdot 10^{-20}$  Ws und  $E_3 = 54 \cdot 10^{-20}$  Ws.

Nach dem Pauli-Prinzip müssen sich die Elektronen innerhalb eines Systems in mindestens einem Merkmal unterscheiden. Da der Zustand eines Elektrons neben der Energie noch von der Projektion des Spins auf ein äußeres Feld (in Feldrichtung oder entgegen gerichtet), sind je Energiewert 2 Plätze vorhanden. Somit sind die unteren beiden Niveaus voll besetzt mit je zwei Elektronen, das dritte Energieniveau ist nur mit einem Elektron besetzt. Das ist somit auch das Fermi-Niveau.

Jetzt soll mit möglichst geringer Energiezufuhr ein Elektron auf ein höheres Niveau gehoben werden. Da wegen der quadratischen Abhängigkeit von der Energiequantenzahl  $n$  die Abstände benachbarter Energieniveaus mit

wachsenden  $n$  größer werden, finden niederenergetische Übergänge zwischen den niedrigsten Niveaus statt. Da  $E_2$  gefüllt und darüber  $E_3$  einen freien Platz aufweist, kann mit  $\Delta E = E_3 - E_2$  ein Übergang angeregt werden. Hierzu muss ein Lichtquant  $\Delta E = h \cdot f = h \cdot c / \lambda$  eingestrahlt werden. Die hierzu benötigte Wellenlänge ergibt sich zu  $\lambda = 660 \text{ nm}$ . Das ist tief rotes Licht

### 5.3.4. Ableitung des Bändermodells durch Analogiebetrachtung

Nach dem BOHR<sup>62</sup>schen Atommodell bewegen sich die Elektronen auf diskreten Bahnen um den Atomkern. Jedem dieser Bahnen (sog. *Zustände*) entspricht eine bestimmte Energie (auch *Energieniveau*). Nach dem Prinzip der Energieminimierung werden von den Elektronen vorwiegend die unteren Zustände besetzt. Darüber gibt es weitere, meist unbesetzte Zustände, in die Elektronen durch Energiezufuhr angeregt werden können. Werden nun zwei gleichartige Atome in räumliche Nachbarschaft gebracht, können sich ihre Elektronenbahnen berühren oder durchdringen. Da Elektronen nicht zwischen beiden Atomkernen unterscheiden können, werden sie Bahnen um beide Kerne ausbilden.

Betrachten wir je ein Elektron von jedem Atom im jeweils gleichen Zustand. Man sollte erwarten, dass diese beiden Elektronen der nun kontaktierten Atome auch gleiche Energien aufweisen. Es zeigt sich aber eine kleine Energiedifferenz zwischen beiden Elektronen, eine sog. Aufspaltung, die durch die Wechselwirkung der Elektronen verursacht wird. Diese ist gleich mehrfacher Art. Zunächst sind Elektronen geladene Teilchen, stoßen sich also ab, zum anderen gilt das *Pauli-Prinzip*, welches verbietet, dass zwei oder mehrere Elektronen den gleichen Zustand besetzen. Man kann sich die Energieaufspaltung leicht an einem System gekoppelter mechanischer Pendel veranschaulichen.

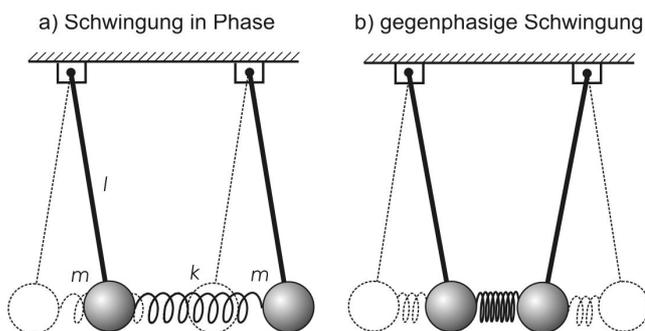


Abb. 5.31 Eigenschwingungen gekoppelter Pendel  
Zwei durch eine Wendelfeder gekoppelte gleichartige Pendel zeigen zwei unterschiedliche Schwingungsfrequenzen für die a) *in phase* und b) *out of phase* Schwingungen

Bekanntlich hat ein mathematisches Pendel der Länge  $l$  die Schwingungsfrequenz  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Ver-

bindet man beide Punktmassen  $m$  zweier gleichartiger Pendel durch eine Feder der Kraftkonstanten  $k$ , werden zwei unterschiedliche Frequenzen beobachtet. Schwingen beide Pendel im Gleichtakt (*in phase* s. Abb. 5.31 a), stimmt die gemessene Frequenz mit der Frequenz  $f_0$  der ungekoppelten Pendel überein. Werden beide Pendel gegenphasig ausgelenkt, so erhält man infolge der jetzt wirksam werden-

den Deformation der Koppelfeder eine höhere Frequenz  $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$  der *out of phase*-Schwin-

gung, s. Abb.5.31 b). Würde man ein drittes gleichartiges Pendel ankoppeln, führte dies zu drei unterschiedlichen Frequenzen. Bei  $N$  gekoppelten Pendeln gibt es dann auch  $N$  unterschiedliche Frequenzen. Der gleiche Effekt tritt bei der Elektronenbewegung auf. Bei einer linearen Kette von  $N$  Atomen spaltet jedes Energieniveau der Elektronen in  $N$  unterschiedliche Niveaus auf. Berücksichtigt man die beiden unterschiedlichen Einstellmöglichkeiten des Elektronenspins, ergibt sich aus dem Pauli-Prinzip, dass diese  $N$  Energieniveaus Platz bieten für maximal  $2N$  Elektronen. Makroskopische Festkörper bestehen aus einer ungeheuren Anzahl (etwa  $10^{23}$ ) von Atomen. Dementsprechend groß ist die Anzahl der Zustände, in welches jedes Energieniveau der Elektronenhülle eines isolierten Atoms aufspaltet. Die Gesamtheit der so durch Aufspaltung erzeugten Zustände wird deshalb als *Energieband* bezeichnet. Im dreidimensionalen Festkörper, der aus  $N$  *Elementarzellen* gebildet wird, beinhaltet jedes Energieband  $2N$  Zustände. Die unteren Energiebänder entstehen durch die Aufspaltung der Zustände von Elektronen

<sup>62</sup> Nils Henrik David BOHR (1885-1962), dän. Physiker; Atommodell, Korrespondenzprinzip, Komplementaritätsprinzip, (1922 NP)

innerer Schalen. Da diese vergleichsweise dicht am Atomkern verlaufen, wechselwirken diese Elektronen nur schwach mit denen benachbarter Atome. Folglich ist deren Aufspaltung geringer als die der Valenzelektronen bzw. der noch höher liegenden Zustände. Zwischen den Energiebändern gibt es Bereiche ohne Energieniveaus. Diese Bereiche werden als *verbotene Zonen* bezeichnet, deren Abstand als *Energie- oder Bandlücke*. Bei höheren Energiebändern können sich Bänder überlagern, dann fehlt zwischen ihnen die verbotene Zone, man bezeichnet diesen Fall mit *Bandüberlappung*.

Da die Elektronen danach trachten, die energetisch niedrigsten Zustände zu besetzen, sind bei einer geraden Anzahl von Elektronen je Elementarzelle die untersten Bänder voll besetzt, darüber liegende leer. Bei einer ungeraden Anzahl von Elektronen je Elementarzelle ist das oberste besetzte Band gerade halb voll.

Wird an den Kristall ein elektrisches Feld angelegt, wirkt auf die Elektronen die Feldkraft und beschleunigt sie. Dadurch erfahren die Elektronen eine Energiezufuhr und besetzen etwas höhere Plätze. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn diese Plätze frei sind. Dies ist im nur halb gefüllten Band stets der Fall. Die so angeregten Elektronen transportieren ihre Ladung durch den Kristall, der sich somit als elektrischer Leiter erweist. Das halb gefüllte oberste Energieband ist das Leitungsband. Diese Bandstruktur ist charakteristisch u.a. für die Metalle der ersten Hauptgruppe des Periodensystems.

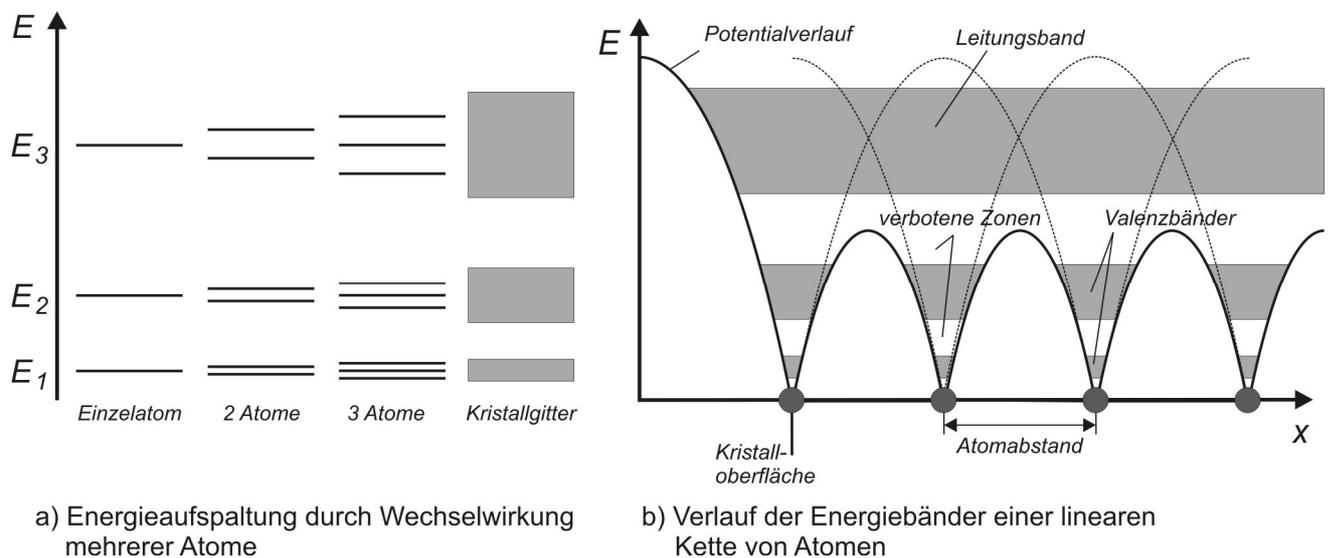
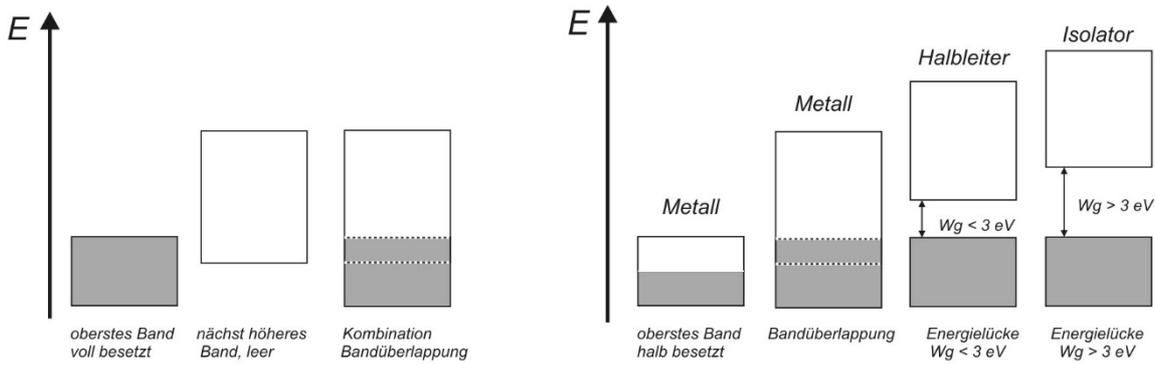


Abb. 5.32 Energieaufspaltung und Entstehung von Energiebändern

In a) ist die Aufspaltung der Elektronenenergien eines Einzelatoms infolge Wechselwirkung mit anderen Atomen verdeutlicht. In b) ist als Potentialverlauf die Überlagerung der Coulomb-WW benachbarter Kerne mit Elektronen dargestellt. Die Elektronen in den energetisch niedrigen Zuständen (*Valenzbänder*) sind durch diesen Potentialverlauf an die Nachbarschaft der Kerne gebunden. Zustände mit höheren Energien sind delokalisiert. Die Elektronen bewegen sich in diesem *Leitungsband* ungehindert durch das Kristallgitter

Bei einer geraden Anzahl von Elektronen sind die Energiebänder voll besetzt, die Elektronen können keine Energie aufnehmen, werden somit durch eine angelegte Spannung nicht beschleunigt, da diese Energiezufuhr nicht ausreicht, die Bandlücke  $W_g$  zu überwinden. Es ist zunächst notwendig, durch weitere Energiezufuhr Elektronen in das leere Leitungsband anzuregen. Das ist durch thermische Schwingungen möglich oder durch Einstrahlung von Licht. Die Energie der Gitterschwingungen ist von der Größe  $kT$  und tritt gegen die Breite der verbotenen Zone an. Offensichtlich ist bei 0 K keine thermische Anregung möglich, das System ist ein *Isolator*. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Wahrscheinlichkeit thermischer Anregung von Elektronen jedoch zu und damit die Leitfähigkeit. Diese bleibt jedoch deutlich hinter derjenigen von Metallen zurück, man nennt solche Stoffe *Halbleiter*.

Bei gerader Elektronenzahl je Elementarzelle kann metallische Leitfähigkeit auch durch Bandüberlappung entstehen. Dies trifft für Nebengruppenelemente zu.



a) Entstehung eines teilweise besetzten Bandes durch Überlappung eines vollen und eines leeren Bandes

b) Bandstruktur und Leitfähigkeit

### Abb. 5.33 Bandstrukturen

Die Elektronenkonzentration und Anordnung der Bänder ist für den Charakter eines Stoffes (Metall, Halbleiter, Isolator) ursächlich.

## 5.4. Ladungsträger in reinen Halbleitern

### 5.4.1. Bandstruktur

Halbleiter verhalten sich nur bei sehr tiefen Temperaturen wie Isolatoren, bei steigender Temperatur werden durch thermische Anregung zunehmend Elektronen aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregt und können den Ladungstransport realisieren. Da die Leitfähigkeit, verglichen mit derjenigen von Metallen, recht gering ist (zumal sie bei  $T = 0$  K Isolatoren sind) bezeichnet man diese Stoffe als Halbleiter. Im Unterschied zu Metallen sind Halbleiter wegen der mit Temperaturerhöhung verbundenen Erhöhung der Dichte der beweglichen Ladungsträger sogenannte *Heißleiter*. Bei Metallen sinkt wegen der abnehmenden Beweglichkeit die Leitfähigkeit bei Temperaturerhöhung. Metalle sind *Kaltleiter*. In welchem Temperaturbereich Halbleiter leitfähig werden, hängt von der Breite  $W_g$  der verbotenen Zone ab. Von Halbleitern spricht man, wenn  $W_g < 3$  eV.

Tab. 5.1: Breite der verbotenen Zonen von einigen Stoffen bei Zimmertemperatur (300 K)

Stoff	Ge	Si	S	Se	Te	Dia- mant	InSb	GaAs	GaP	InAs	CdS	PbS
$W_g$ / eV	0,67	1,12	2,6	1,74	0,34	5,2	0,18	1,43	2,24	0,36	2,42	0,37

Bei InSb, GaAs und GaP handelt es sich um Verbindungshalbleiter. Da sie aus je einem Element der 3. sowie 5. Hauptgruppe des Periodensystems bestehen, bezeichnet man sie auch als  $A_3B_5$ -Halbleiter. Ersetzt man z.B. die B<sub>5</sub>-Komponente durch eine Mischung zweier Elemente der 5. Hauptgruppe, erhält man einen sogenannten ternären Halbleiter, z.B. GaAsP. In einem solchen Mischkristall gibt es jedoch stets eine gleiche Anzahl von 3- und 5-wertigen Atomen. Von Vorteil ist, dass man über das Mischungsverhältnis von As und P die Möglichkeit erhält, die Breite der verbotenen Zone zu variieren.

Warum können Lichtemitterdioden (LED's) prinzipiell nicht aus Silizium hergestellt werden? Um das zu verstehen, müssen Sie sich doch durch Kap. 5.3. kämpfen. Ist es Ihnen egal, dann weiter bei 5.4.2. In den Zonenschemata (s. Abb. 5.29) werden erlaubte Energiewerte als Funktionen der Wellenzahlen dargestellt  $E = E(k)$ . Für Halbleiter typisch ist ein oberes voll besetztes Band (*Valenzband*) und ein durch die Energielücke  $W_g$  getrenntes darüber liegendes leeres Band (*Leitungsband*). Genau genommen wird die Breite der verbotenen Zone durch den energetischen Abstand des Maximums von Valenzband zum Minimum des Leitungsbandes bestimmt. Gehören beide Extrema zu verschiedenen Wellenzahlen  $k$  nennt man sie *indirekte* Halbleiter in Unterscheidung zu sogenannten *direkten* Halbleitern, bei denen beiden Extrema die gleichen Wellenzahlen zuzuordnen sind.

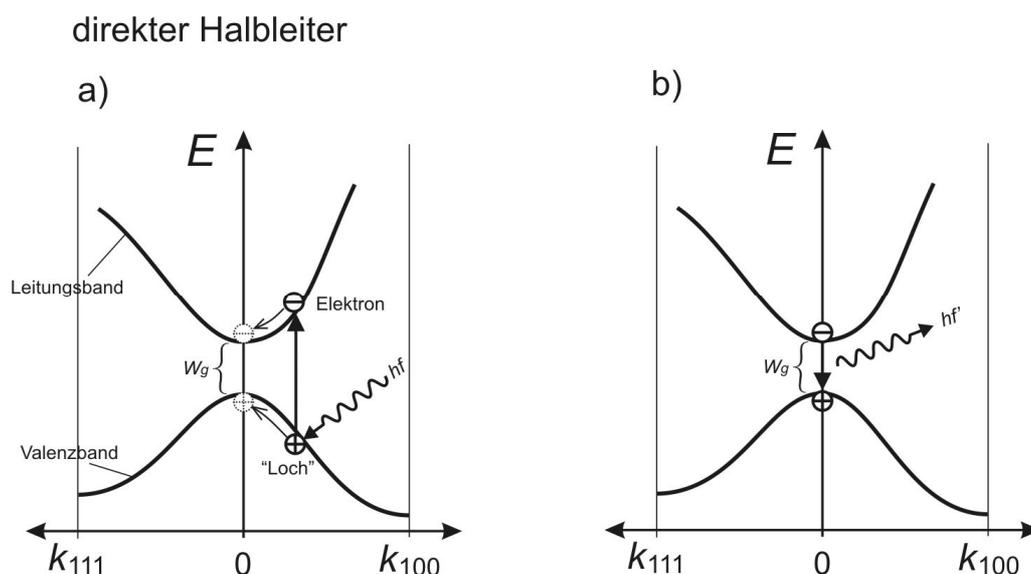


Abb. 5. 34 Anregung eines Elektrons ins Leitungsband a) und (strahlende) Deaktivierung b) bei einem direkten Halbleiter

Wird ein Elektron durch ein Lichtquant der Energie  $E = hf$  aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregt, so wird es nach ganz kurzer Zeit die energetisch niedrigste Position im Leitungsband einnehmen. Im Valenzband ist jetzt der ursprüngliche Zustand des Elektrons unbesetzt, wodurch die energetisch höheren Elektronen diesen Platz sofort einnehmen und der unbesetzte Zustand ans Maximum des Valenzbandes gelangt. Ein anschaulicher Vergleich: Im Leitungsband benehmen sich die Elektronen wie Murmeln im Murreloch, sie kullern zur tiefsten Stelle. Im Valenzband sind die unbesetzten Zustände Luftblasen in einer Flüssigkeit vergleichbar, sie steigen stets an die höchstmögliche Position. Beim indirekten Halbleiter (s. Abb. 5.34) befindet sich das Elektron energetisch direkt über einem freien Zustand mit der gleichen Wellenzahl. Hierdurch wird ein *strahlender* Übergang des Elektrons in das Valenzband möglich. Die Energie des hierbei emittierten Lichtquants entspricht gerade der Breite der verbotenen Zone.

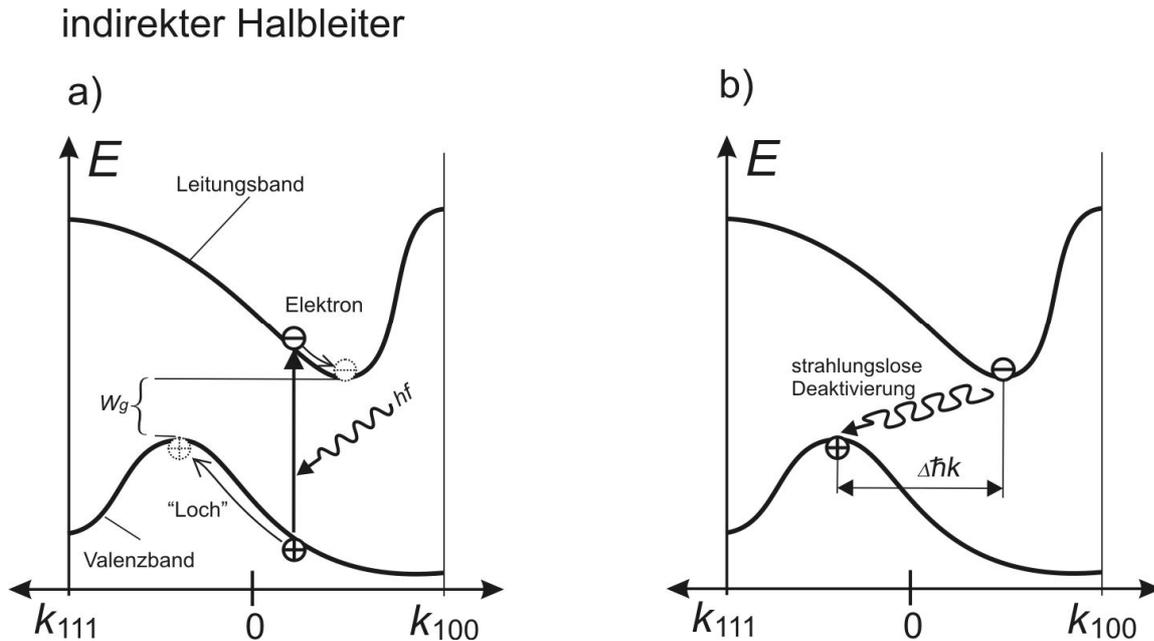


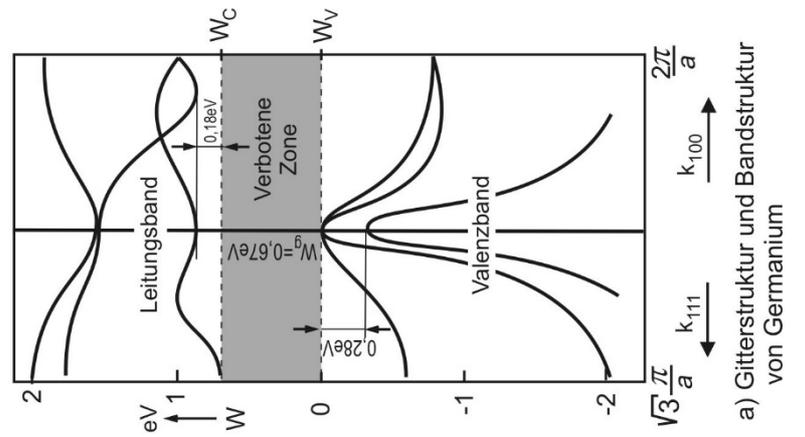
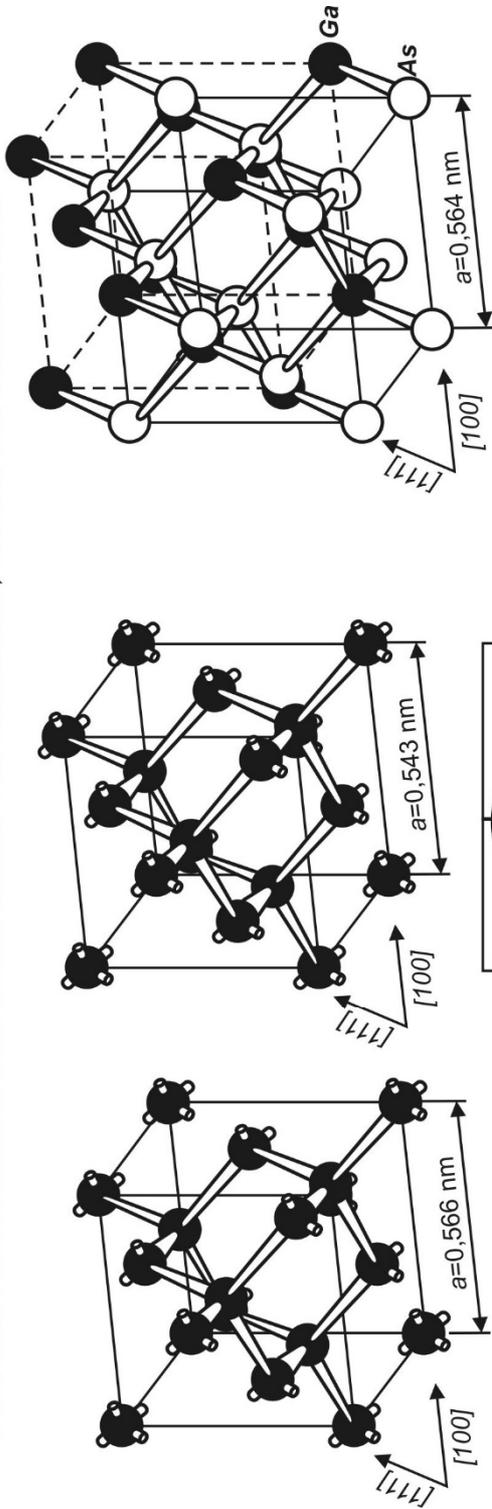
Abb. 5. 35 Anregung eines Elektrons ins Leitungsband a) und (strahlungslose) Deaktivierung b) bei einem indirekten Halbleiter

Beim indirekten Halbleiter ist ein Übergang des angeregten Elektrons in das Valenzband nur möglich unter Aufnahme eines Impulses  $p = \hbar \Delta k$  aus dem Gitter. Hierbei wird kein Lichtquant emittiert, es handelt sich um eine strahlungslose Deaktivierung (*Relaxation*), die Energie wird als Gitterschwingung (Wärme) umgesetzt (s. Abb. 5.35). Indirekte Halbleiter eignen sich somit nicht als Werkstoff zur Herstellung von Lichtemitterdioden (s.u.)!

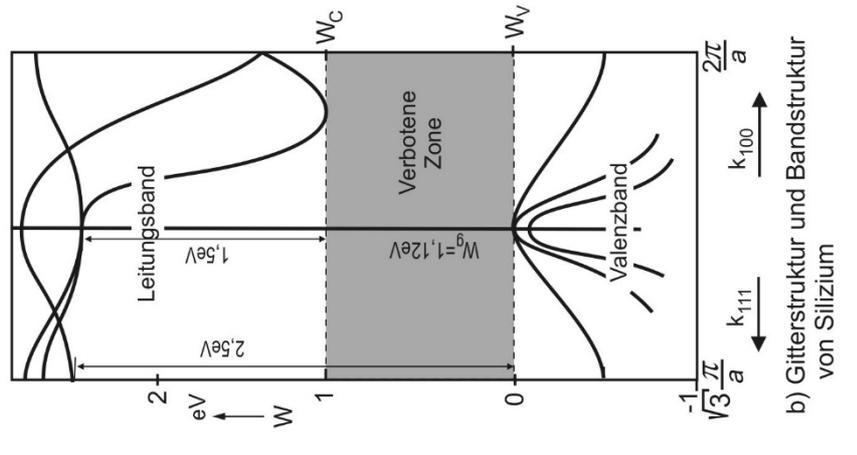
Gitterstrukturen und Energiebänder der drei am meisten verwendeten Halbleitermaterialien Germanium, Silizium und Galliumarsenid sind auf Abb. 5.36 dargestellt. Jedes Atom hat vier nächste Nachbarn, die wie die Eckpunkte eines Tetraeders angeordnet sind (s. Abb. 5.5). Dieses sog. Diamantgitter besteht aus zwei ineinander geschachtelten kubisch flächenzentrierten Gittern, beim Galliumarsenid besteht eines davon aus Galliumatomen (schwarz), das andere aus Arsenatomen (weiss).

Wie aus den Bandstrukturen in Abb. 5.36 hervorgeht, handelt es sich bei Germanium und Silizium um indirekte Halbleiter. Galliumarsenid ist ein direkter Halbleiter. Um durch Absorption von Lichtquanten Ladungsträger im Leitungsband zu erzeugen sind Wellenlängen im Bereich des nahen Infrarots notwendig. Bei Übergang des angeregten Elektrons in das Valenzband wird beim Galliumarsenid ein Quant mit der Wellenlänge von 860 nm emittiert. Zur Emission im Bereich des sichtbaren Lichtes werden Halbleiter mit größerem Bandabstand angewendet (s.Tab.5.1).

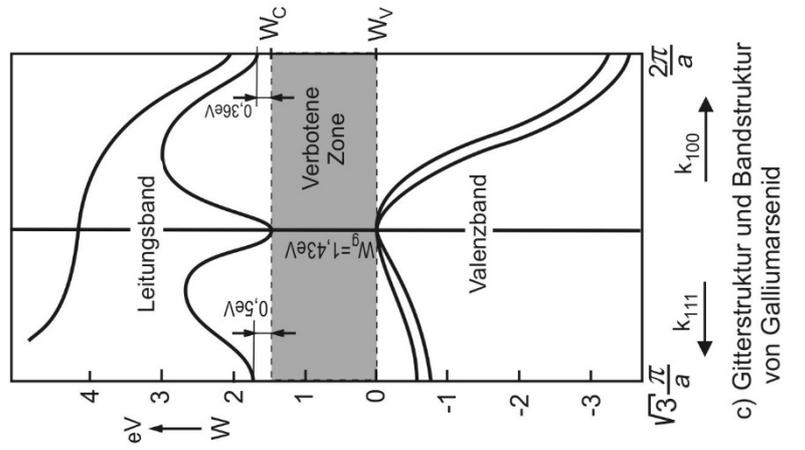
Abb. 5.36 Gitterstrukturen und Bandstrukturen von Germanium, Silizium und Galliumarsenid



a) Gitterstruktur und Bandstruktur von Germanium



b) Gitterstruktur und Bandstruktur von Silizium



c) Gitterstruktur und Bandstruktur von Galliumarsenid

## 5.4.2 Ladungsträgergeneration

### 5.4.2.1. Reiner Halbleiter - Eigenleitung

Nach der DULONG-PETIT'schen Regel beträgt die mittlere kinetische Energie eines Kristallions  $3k_B T$ . Bezogen auf Zimmertemperatur sind das etwa 0,026 eV. Dies ist sehr wenig im Vergleich mit der Breite der verbotenen Zone von Halbleitern. Hierbei handelt es sich aber um einen statistischen Mittelwert, Abweichungen davon sind also die Regel. Mit allerdings sehr kleiner Wahrscheinlichkeit kommt es deshalb trotzdem zur thermischen Anregung von Elektronen ins Leitungsband über die sehr viel breitere Bandlücke. Bei reinen Halbleitern ist die Anregung eines Elektrons ins Leitungsband stets mit der Erzeugung einer Fehlstelle im Valenzband verbunden. Das Elektron wird hierbei aus der kovalenten Bindung zweier benachbarter Atome gerissen und bewegt sich frei im Gitter. Die Fehlstelle ist positiv geladen, da hier das Elektron jetzt fehlt und somit eine Kernladung überschüssig ist. Die Konzentration der Elektronen im Leitungsband bezeichnet man mit  $n$ , die Konzentration der positiven Ladungen (sog. *Löcher*) mit  $p$ . Typisch für Halbleiter ist die Möglichkeit des Ladungstransports nicht nur durch Elektronen sondern auch durch Löcher. Das fehlende Elektron kann nämlich durch ein benachbartes Valenzelektron ersetzt werden, wodurch die Fehlstelle dorthin wandert. Unter dem Einfluss einer äußeren Feldkraft (angelegte Spannung) wandern die Fehlstellen in Feldrichtung und erzeugen den Löcherstrom. Nach dem Prinzip der Energieminimierung besetzen die Elektronen im Leitungsband die Zustände in der Nähe der unteren Bandkante des Leitungsbandes und die Löcher solche im Maximum des Valenzbandes. In einem vereinfachten Schema des Bändermodells gibt man die Energien  $W_V$  und  $W_C$  beider Bandkanten an, die *Fermienergie*  $W_F$  und die *Vakuumergie*  $-e\varphi$  ( $\varphi$  ist das sog. *Makropotential*). Um ein Elektron aus dem Gitter zu entfernen muss die Austrittsarbeit  $W_H = -e\varphi - W_F$  zugeführt werden. Ein von außen in das Gitter eindringende Elektron besetzt zunächst die Unterkante des Leitungsbandes und gibt dabei die Energie  $W_{EA} = -e\varphi - W_C$  ab ( $W_{EA}$  - *Elektronenaffinität*).

Die *Fermienergie* markiert die Energie, bei welcher ein dort befindlicher Zustand mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  besetzt wird. Da die obersten Zustände im Valenzband nahezu voll besetzt sind und die untersten Zustände im Leitungsband sehr wenig, liegt die *Fermienergie* bei Halbleitern im Bereich der verbotenen Zone, bei reinen Halbleitern etwa in deren Mitte.

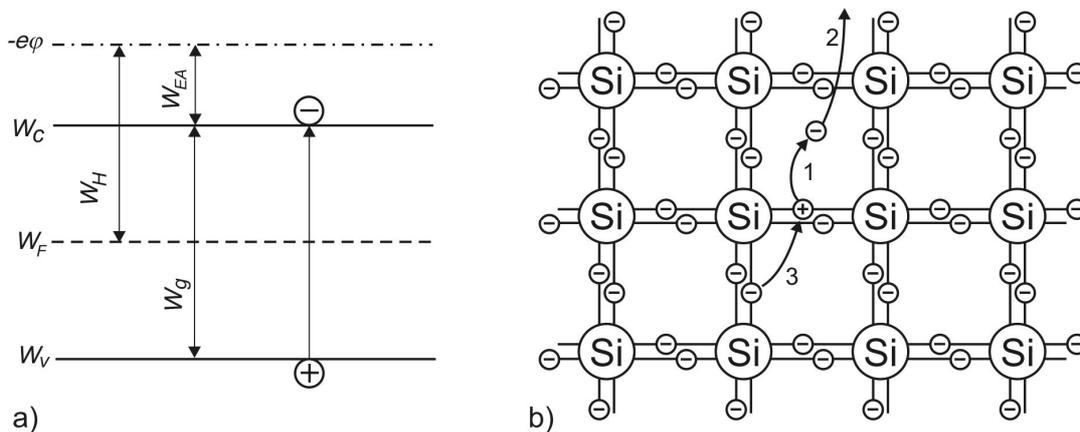


Abb.5.37 a) Bändermodell und b) Bindungsstruktur (zweidimensionale Veranschaulichung) eines Halbleiters bei Eigenleitung

a) Durch thermische Anregung wird ein Elektron vom Valenzband ins Leitungsband gehoben

b) Hierbei wird eine kovalente Bindung zwischen zwei benachbarten Si-Atomen aufgebrochen (1). Das nunmehr ungebundene Elektron wird zum beweglichen Ladungsträger der Elektronenleitung (2). Das bei der Anregung entstandene Fehlelektron (Loch) kann durch ein benachbartes Valenzelektron aufgefüllt werden, wodurch das Loch wandert (3).

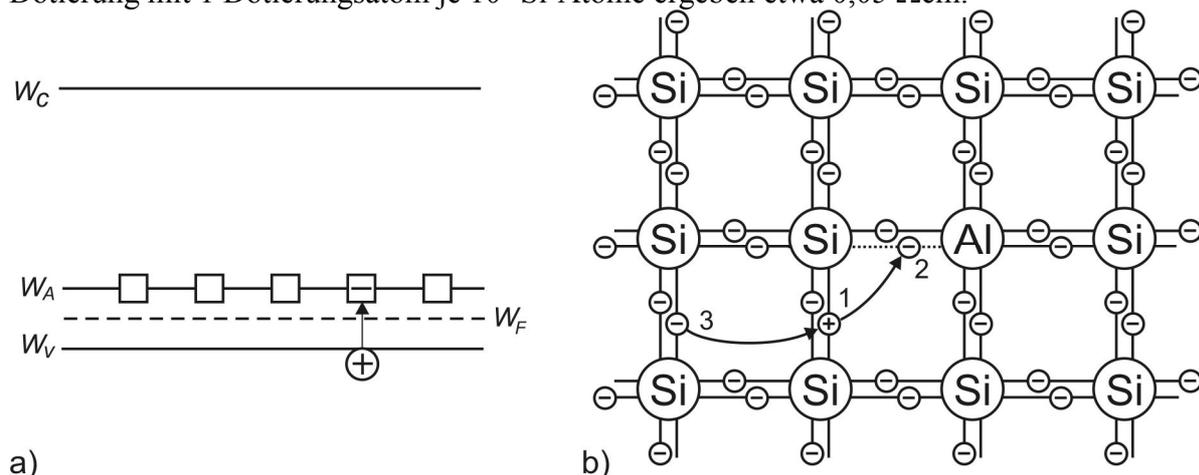
Die Ladungsträgerdichten infolge thermischer Anregung (Eigenleitung) bei Raumtemperatur betragen etwa  $n = p = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$  bei Silizium und  $n = p = 10^{19} \text{ m}^{-3}$  bei Germanium. Da dieser Wert um viele

Größenordnung unter dem von Metallen liegt, ist die Leitfähigkeit von reinen Halbleitern vergleichsweise gering.

### 5.4.2.2. Dotierte Halbleiter – Störstellenleitung

Bereits geringe Beimengungen von Fremdatomen bei der Kristallisation des Halbleitermaterials führen zu ganz erheblichen Veränderungen der elektronischen Eigenschaften. Dies wird bei der *Dotierung* gezielt ausgenutzt. Üblich ist die Beimengung von Elementen der 3. sowie 5. Hauptgruppe des Periodensystems. Diese besitzen 3 bzw. 5 Valenzelektronen. Wird mit 3-wertigem Material dotiert, kann in der Umgebung der Fehlstelle eine Bindung zu einem benachbarten Atom des Wirtsgitters nicht abgesättigt werden, da jedes dotierte Atom ein Elektron zu wenig hat, um die 4 benachbarten Atome kovalent zu binden. Durch thermische Anregung ist es möglich, ein Elektron aus einer benachbarten Bindung zu lösen und eine Bindung mit dem Fremdatom einzugehen. Das in der Nachbarschaft hierdurch entstehende Fehlelektron wandert als Loch durch das Gitter. Das auch als *Akzeptor* bezeichnete Fremdatom ist jetzt ionisiert und wird dadurch zu einer ortsfesten(!) negativen Ladung (*Haftstelle*). Mit 3-wertigem Material erzeugt man somit Löcherleitung, es ist *p*-dotiert. Die hierbei zur Anregung eines Lochs benötigte Energie ist wesentlich geringer als für die Erzeugung eines Elektron-Loch-Paars beim Eigenleitungsprozess. Im Bändermodell wird ein *Akzeptorniveau*  $W_A$  eingeführt. Symbolisch muss die Energie  $W_A - W_V$  zur Anregung eines Lochs aufgebracht werden. Da dies wesentlich weniger ist als die Breite der verbotenen Zone, sind bei Raumtemperatur bereits sehr viele Haftstellen ionisiert.

Übliche *p*-Dotierungsgrade von  $10^{-6}$  führen zu einem spezifischen Widerstand von  $2 \Omega\text{cm}$ , starke ( $p^+$ ) Dotierung mit 1 Dotierungsatom je  $10^4$  Si-Atome ergeben etwa  $0,05 \Omega\text{cm}$ .



a) Bändermodell und b) Bindungsstruktur (zweidimensionale Veranschaulichung) eines *p*-dotierten Halbleiters

a) Durch thermische Anregung werden Elektronen vom Valenzband auf das Akzeptorniveau gehoben, dabei wird je eine Haftstelle ionisiert. Betrifft dies weniger als die Hälfte aller Haftstellen, liegt das Fermi-niveau zwischen dem Akzeptorniveau und der Oberkante des Valenzbandes. Im Valenzband entstehen Löcher, das Material wird somit *p*-leitend.

b) Es wird eine kovalente Bindung zwischen zwei benachbarten Si-Atomen aufgebrochen (1) und die Bindung zwischen dem Akzeptor (Al-Atom) und einem Siliziumatom vervollständigt (2). Das bei der Anregung entstandene Fehlelektron (Loch) kann durch ein benachbartes Valenzelektron aufgefüllt werden, wodurch das Loch wandert (3).

Bei Dotierung mit 5-wertigem Material sind die Bindungen des Fremdatoms zu den benachbarten Atomen des Wirtsgitters abgesättigt, außerdem ist noch das 5. Valenzelektron am Dotanden gebunden. Es kann durch Energiezufuhr jedoch relativ leicht abgelöst werden und ist danach im Gitter frei beweglich. Durch Dotierung mit solchen *Donatoren* wird *n*-leitendes Material erzeugt. Die ionisierten Haftstellen sind positiv geladen. Im Bändermodell wird ein *Donatorniveau*  $W_D$  eingeführt. Die zur Ablösung eines Elektrons von einer Haftstelle ins Leitungsband benötigte Energie  $W_C - W_D$  ist wesentlich geringer als für die Erzeugung eines Elektron-Loch-Paars beim Eigenleitungsprozess. Übliche *n*-Dotierung von  $10^{-7}$  führt zu einem spezifischen Widerstand von  $5 \Omega\text{cm}$ , starke ( $n^+$ ) Dotierung mit 1 Dotierungsatom je  $10^4$  Si-Atome ergibt einen spezifischen Widerstand von etwa  $0,03 \Omega\text{cm}$ .

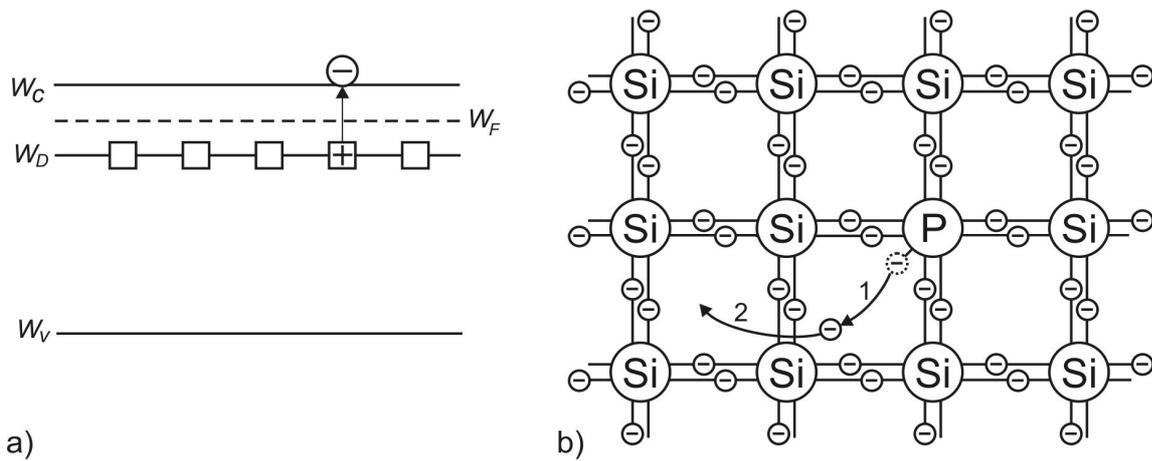


Abb.5.39 a) Bändermodell und b) Bindungsstruktur (zweidimensionale Veranschaulichung) eines  $n$ -dotierten Halbleiters

a) Durch thermische Anregung wird ein Elektron vom Donator abgelöst und ins Leitungsband gehoben, dabei wird die Haftstelle ionisiert. Durch die Elektronen im Leitungsband wird das Material  $n$ -leitend.

b) Es wird ein überzähliges Elektron durch thermische Anregung vom Phosphoratom abgetrennt (1), das dadurch positiv geladen wird. Das Elektron ist ungebunden und bewegt sich frei durch das Gitter (2).

Der Abstand zwischen Akzeptorniveau und Oberkante des Valenzbandes bzw. zwischen Donatorniveau und Unterkante des Leitungsbandes wird auch *Traptiefe* genannt. Bei tiefen Temperaturen ist die Störstellenleitung dominierend. Es entstehen hierdurch also weit mehr bewegliche Ladungsträger als durch Anregung von  $e$ - $h$ -Paaren (Eigenleitungsprozess), denn dazu ist ja eine höhere Energiezufuhr notwendig. Somit werden bei Temperaturerhöhung zunächst alle vorhandenen Haftstellen ionisiert. Bei Raumtemperatur ist dies in der Regel der Fall. Wird die Temperatur weiter erhöht, können nur noch durch den Eigenleitungsprozess weitere Ladungsträger erzeugt werden.

### 5.4.3 Ladungsträgerkonzentration und Leitfähigkeit

Im Unterschied zu Metallen ist die Ladungsträgerkonzentration bei Halbleitern stark abhängig von der Temperatur. Typisch für Anregungsprozesse hat diese Abhängigkeit einen exponentiellen Verlauf. Die Ursache hierfür liegt in der Struktur der Fermifunktion Glg. 5.19, welche die Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der bei der Temperatur  $T$  und der Fermienergie  $W_F$  ein vorhandener Zustand mit der Energie  $W$  besetzt wird. Auf die etwas anspruchsvolle Ableitung der Beziehungen für die Bestimmung der Ladungsträgerkonzentrationen soll hier verzichtet werden, es ergeben sich für die

$$\text{Konzentration der Elektronen im Leitungsband: } n = 2 \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{W_F - W_C}{kT} \right) \quad (5.25)$$

$$\text{Konzentration der Löcher im Valenzband: } p = 2 \left( \frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{W_V - W_F}{kT} \right) \quad (5.26)$$

Hierbei werden mit  $m_e$  bzw.  $m_h$  die sog. *effektiven Massen* von Elektron und Loch bezeichnet. Sowohl Elektron als auch Defektelektron unterliegen Wechselwirkungen mit den inneren Feldern des Kristalls. Somit bewegen sie sich unter der Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes nicht genau so wie freie Elektronen. Diesem wird dadurch Rechnung getragen, dass man für den Impuls von Elektron und Loch nicht die Ruhemasse des Elektrons sondern effektive Massen verwendet. Diese unterscheiden sich miteinander erheblich von der Ruhemasse des Elektrons und sind auch unterschiedlich für verschiedene Halbleiter.

Bildet man das Produkt aus  $n$  und  $p$  erhält man einen Ausdruck, in dem die Fermienergie nicht enthalten ist:

$$n \cdot p = 4 \left( \frac{2\pi kT}{h^2} \right)^3 (m_e m_h)^{\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{W_g}{kT} \right) \quad (5.27)$$

Das Produkt  $np$  ist somit weder von der Art der Dotierung noch deren Konzentration abhängig. Es enthält mit der Breite der verbotenen Zone  $W_g$  aber eine wichtige Größe, die den Halbleiterwerkstoff charakterisiert. Da für reine Halbleitern  $n = p = n_i$  (*i-intrinsic*), gilt für alle dotierten Halbleiter unabhängig vom Dotierungsgrad und der Traptiefe ein

$$\boxed{\text{Massenwirkungsgesetz } n \cdot p = n_i^2} \quad (5.28)$$

Die Bezeichnung begründet sich aus der Analogie zu chemischen Gleichgewichtsreaktionen. Die Leitfähigkeit eines Halbleiters wird also durch (s. Glg. 2.7)

$$\boxed{\sigma = n \cdot e \cdot \mu_e + p \cdot e \cdot \mu_h} \quad (5.29)$$

beschrieben. Die Beweglichkeiten der Elektronen  $\mu_e$  unterscheiden sich von denen der Löcher  $\mu_h$ . Wegen der starken Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentrationen ist die Leitfähigkeit von Halbleitern ebenfalls stark von der Temperatur abhängig. Bei Metallen nimmt die Beweglichkeit der Leitungselektronen mit zunehmender Temperatur ab, Metalle bezeichnet man deshalb als *Kaltleiter*. Bei Halbleitern verringert sich die Beweglichkeit mit wachsender Temperatur zwar ähnlich, dagegen steigt jedoch die Ladungsträgerkonzentration sehr viel rascher, so dass dieser Prozess dominierend wird. Da für reine Halbleiter gilt  $n = p$ , erhält man unter Vernachlässigung der vergleichsweise schwachen Temperaturabhängigkeit von  $\mu_e$  und  $\mu_h$  eine Proportionalität von  $\sigma$  und  $n_i$ . Vernachlässigt man darüber hinaus die potentielle gegenüber der exponentiellen Abhängigkeit in Glg. 5.27, erhält man näherungsweise für *reine* Halbleiter

$$\sigma(T) \cong C \cdot \exp\left(-\frac{W_g}{2kT}\right). \quad (5.30)$$

Trägt man experimentelle Werte der Leitfähigkeit in logarithmischem Maßstab über einer reziproken Temperaturskala auf, ergibt sich eine lineare Funktion. Aus deren Anstieg lässt sich leicht die Breite der verbotenen Zone bestimmen:

$$\frac{d \lg \sigma(T)}{d(1/T)} \cong -\frac{W_g}{2k} \lg e \quad (5.31)$$

Im Falle *dotierter* Halbleitern sind drei Bereiche zu unterscheiden:

Bei sehr tiefen Temperaturen wächst z.B. beim *n*-HL die Elektronendichte im Leitungsband zunächst nach Glg. 5.25 an. In diesem *Reservebereich* gilt  $n < N_D$  ( $N_D$  – Donatorkonzentration) und das Fermi-niveau liegt etwa mittig zwischen dem Donatorniveau und der benachbarten Bandkante (s. Abb. 5.39a), also  $W_C - W_D \cong 2(W_C - W_F)$ . Da  $n \gg p$  (bei *n*-HL sind die Elektronen sog. *Majoritäts-Ladungsträger*, Löcher die *Minoritäts-Ladungsträger*), kann die Löcherleitfähigkeit vernachlässigt werden und man erhält näherungsweise für den Reservebereich

$$\sigma(T) \cong C \cdot \exp\left(-\frac{W_C - W_D}{2kT}\right). \quad (5.32)$$

Logarithmische Darstellung der Leitfähigkeit über der inversen Temperaturskala liefert also auch hier eine lineare Funktion, aus deren Anstieg die Traptiefe bestimmt werden kann. Für *p*-dotierte Halbleiter ergibt eine ganz analoge Betrachtung

$$\sigma(T) \cong C \cdot \exp\left(-\frac{W_A - W_V}{2kT}\right). \quad (5.33)$$

Bei weiterer Temperaturerhöhung sind alle Fremdatome ionisiert, es gilt  $n = N_D$  (bzw.  $p = N_A$ ). Dieser Temperaturbereich wird *Störstellenschöpfung* oder *Erschöpfungsbereich* genannt. Die Ladungsträgerkonzentration bleibt konstant, deshalb verändert sich die Leitfähigkeit nur geringfügig. Dieser Bereich ist für die Anwendung besonders wichtig, da die HL-Bauelemente ihre spezifischen Eigenschaften aus wohl definierten Ladungsträgerprofilen erhalten.

Wird die Temperatur weiter erhöht, so wird die Erzeugung von *e-h*-Paaren möglich und schließlich dominant. In diesem *Eigenleitungsbereich* gilt wie im reinen Halbleiter Glg. 5.30.

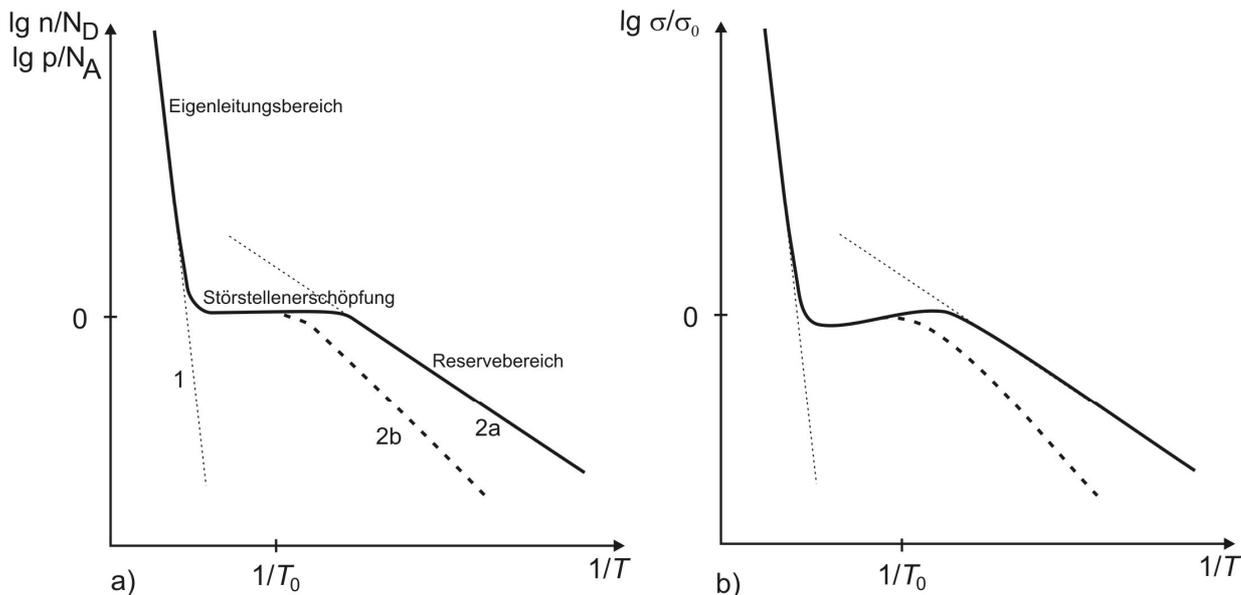


Abb. 5.40 Temperaturabhängigkeit von Ladungsträgerkonzentration (a) und Leitfähigkeit (b) von der reziproken Temperatur in logarithmischer Darstellung.

Der Verlauf der Funktionen in beiden Abbildungen ist ähnlich. Lediglich im Bereich der Störstellenerschöpfung weicht die Leitfähigkeitskurve durch den Temperaturgang der Beweglichkeit von einem konstanten Verlauf ab. Im Bereich der Eigenleitung werden e-h-Paare erzeugt, der Anstieg der linear genäherten Funktion (1) in diesem Bereich ermöglicht die Bestimmung der Breite der verbotenen Zone (Glg. 5.27). Im Reservebereich muss zur Ladungsträgergeneration die Energiedifferenz zwischen Dotierungsniveau und benachbarter Bandkante aufgebracht werden. Aus dem Anstieg der Funktionen (2a, b) in diesem Bereich lässt sich nach Glg. 5.32 bzw. Glg. 5.33 diese Energiedifferenz bestimmen

## Übungen

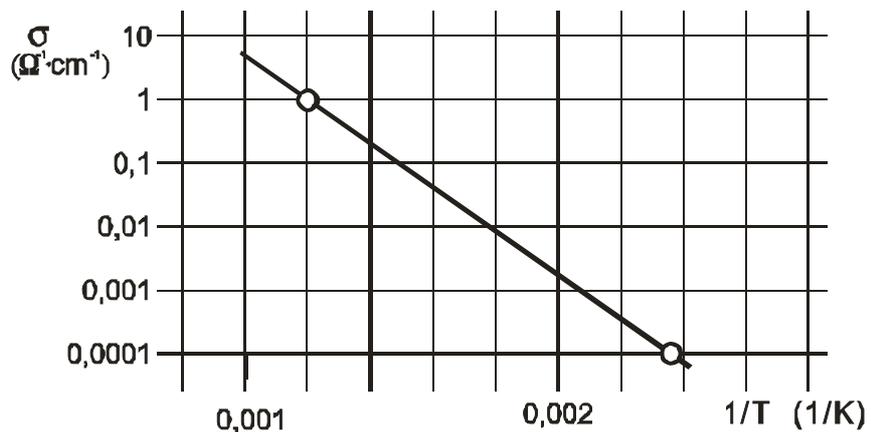
- 5.1. Ein Selenkristall wird von Licht durchstrahlt. Welche Wellenlängen bzw. Frequenzen hat das hindurch gelassene Licht?
- 5.2. Warum sind Halbleiter transparent für Infrarotes Licht?
- 5.3. Warum sind alle Metalle für Mikrowellen undurchlässig?
- 5.4. \* Suchen Sie im Periodensystem der Elemente die besten Leiter heraus. Welche Gemeinsamkeiten stellen Sie bezüglich des Schalenaufbaus der Elektronenhüllen fest?
- 5.5. Worauf ist bei der Auswahl eines Halbleiters als Fotowiderstand zu achten?
- 5.6. Glas wird bei höheren Temperaturen zum Halbleiter, bei sehr hohen zum Leiter. Wie ist das zu begründen? Will man die Eigenleitung von Halbleitern bestimmen, muss man bei tiefen Temperaturen sehr auf Verunreinigungen achten. Warum ist dies bei hohen Temperaturen nicht so wichtig?
- 5.7. \* Bestimmen Sie aus der Leitfähigkeitscharakteristik für einen reinen Halbleiter die Breite der verbotenen Zone (in eV). Um welches Halbleitermaterial handelt es sich vermutlich?

Geg.:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ ;

$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2$ ;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$

Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der reziproken Temperatur. Die Leitfähigkeit ist im logarithmischen Maßstab dargestellt



**Lösung**

Aus dem linearen Verlauf der Funktion im Bereich hoher Temperaturen ( $0,002 \text{ K}^{-1}$  entspricht  $T = 500 \text{ K}$ ) kann darauf geschlossen werden, dass es sich entweder um einen reinen Halbleiter handelt, oder einen dotierten HL im Eigenleitungsbereich. Die Konzentration von Elektronen und Löchern ist dann etwa gleich groß und dominiert die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit gegenüber den Beweglichkeiten  $\mu(T)$  beider Ladungsträgerarten.

$$\sigma(T) = n(T) \cdot e \cdot \mu_n(T) + p(T) \cdot e \cdot \mu_p(T) \approx n_i(T) \cdot C$$

$$\sigma(T) \approx C \cdot \exp\left(-\frac{W_C - W_V}{2kT}\right) \qquad \lg \sigma(T) \approx \lg C - \frac{W_C - W_V}{2kT} \lg e$$

$$\frac{\Delta \lg \sigma(T)}{\Delta \frac{1}{T}} \approx -\frac{W_C - W_V}{2k} \lg e$$

Mit den beiden Wertepaaren  $\{1/T_1 = 0,0012 \text{ K}^{-1}; \sigma_1 = 1 \text{ } \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}\}$  und  $\{1/T_2 = 0,00238 \text{ K}^{-1}; \sigma_2 = 10^{-4} \text{ } \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}\}$  erhält man

$$W_g = -\frac{2k}{\lg e} \cdot \frac{\lg \sigma_2 - \lg \sigma_1}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} = \frac{2k}{\lg e} \cdot \frac{\lg \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws K}^{-1}}{\lg e} \cdot \frac{\lg 10^{-4}}{(0,0012 - 0,00238) \text{ K}^{-1}}$$

$$W_g = 2,1543 \cdot 10^{-19} \text{ Ws} = \frac{e \cdot 2,1543 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = \underline{\underline{1,34 \text{ eV}}}$$

Es handelt sich somit wahrscheinlich um Galliumarsenid.

**5.8.** Berechnen Sie für Zimmertemperatur von  $20^\circ\text{C}$  die mittlere Energie der Teilchenschwingungen im Festkörper und vergleichen Sie diese mit der Bandlücke von Germanium  $W_g = 0,68 \text{ eV}$ .

*Hinweis:* Neben den drei Freiheitsgraden der Translation eines jeden Teilchens (kinetische Energie) ist ein gleich großer Anteil an potentieller Energie zu berücksichtigen.

**5.9.\*** Die Abbildung zeigt eine experimentell ermittelte Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit eines mit Arsen (5. Hauptgruppe) dotierten Halbleiters. Welche sind diesem Fall die Majoritätsladungsträger? Skizzieren Sie das Bändermodell mit Angabe des Dotierungsniveaus sowie der Fermienergie tiefer Temperatur - Reservebereich)! Bestimmen Sie die Traptiefe (Abstand des Dotierungsniveaus zur benachbarten Bandkante) Hilfe der Grafik!



**Lösungshinweis**

Die Dotierungsatome werden bei sehr tiefen Temperaturen Demzufolge ist der Tieftemperaturbereich der Funktion in Abbildung, also der rechte lineare Teil, auszuwerten. Dieser Funktionsverlauf wird durch eine Gerade approximiert, Anstieg nach der Methode s. ÜA 5.7. bestimmt wird. Da mit wurde, handelt es sich um einen  $n$ -Leiter, die Traptiefe ist die Energiedifferenz  $W_C - W_D$  zwischen Donatorniveau und Leitungsbandunterkante.

Die weiteren Lösungsschritte wie unter ÜA 5.7.

$$\sigma(T) = n(T) \cdot e \cdot \mu_n(T) \approx n_i(T) \cdot C$$

$$\sigma(T) \approx C \cdot \exp\left(-\frac{W_C - W_D}{2kT}\right)$$

$$\lg \sigma(T) \approx \lg C - \frac{W_C - W_D}{2kT} \lg e$$

$$\frac{\Delta \lg \sigma(T)}{\Delta \frac{1}{T}} \approx -\frac{W_C - W_D}{2k} \lg e$$

ionisiert.  
der  
deren  
Arsen dotiert

### 5.4.4. Kontaktelektronik

Wenn unterschiedliche Materialien aneinander grenzen, treten bestimmte Grenzflächenerscheinungen auf. Es sollen hier nur einige solcher Kombinationen aufgeführt werden, die von den technischen Anwendungen her interessant sind. Prinzipiell kann man solche Übergänge in drei Hauptgruppen einteilen, die *Homoübergänge*, *Heteroübergänge* und *Sandwichstrukturen*. Als Homoübergang bezeichnet man Übergänge zwischen unterschiedlich dotierten Gebieten ein und desselben Halbleitermaterials (*pn-Übergänge*), das Gitter hat jeweils die gleiche Struktur. Bei Heteroübergängen werden unterschiedliche Kristallstrukturen miteinander kontaktiert, bei Sandwichstrukturen sind mehrere Schichten übereinander vorhanden, z.B. Metall-Isolator-Halbleiter bei Feldeffekt-Transistoren.

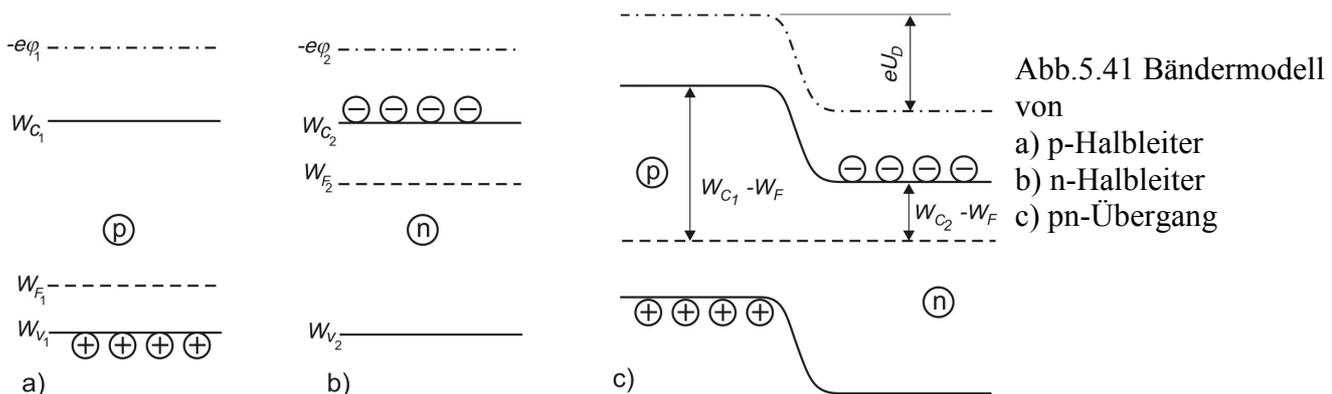
Bezüglich der Anwendung des Bändermodells für das Verständnis der Eigenschaften der Kontakte gelten folgende Regeln im thermodynamischen Gleichgewicht (stromloser Fall):

- Die Fermienergie ist für beide Gebiete anzugleichen ( $W_F$  hat „horizontalen“ Verlauf)
- Das Makropotential  $\varphi$  verläuft stetig (sofern keine Dipolladungen im Gebiet vorhanden sind)
- Die Bandkanten verlaufen parallel zum Makropotential, wenn sich die Kristalleigenschaften nicht ändern (Homo-Übergang)

#### 5.4.4.1 Der homogene pn-Übergang

##### -Bändermodell

Dieser Übergang bildet die Grundstruktur sehr vieler Halbleiterbauelemente. Mittels unterschiedlicher technologischer Verfahren wird hierbei auf ein oft bereits dotiertes Trägermaterial eine gegendotierte Schicht aufgetragen oder komplementär wirkende Fremdatome eingebracht.



Die Majoritätsträger in den einzelnen Bereichen sind angegeben. Die Diffusions- oder Kontaktspannung  $U_D$  führt zur Separation der Ladungsträger, so dass ein inneres Gegenfeld aufgebaut wird und  $U_D$  von außen nicht messbar wird. Im Unterschied zur Kontaktspannung zwischen Metallen sind beim pn-Übergang mehr Elektronen im Gebiet mit der niedrigeren Austrittsarbeit (n-Gebiet) als in dem mit der hohen Austrittsarbeit (p-Gebiet).

Die Diffusionsspannung ergibt sich aus den unterschiedlichen Abständen des Fermi-Niveaus zur Unterkante des Leitungsbandes infolge der unterschiedlichen Dotierungen. Es gilt

$$eU_D = W_{C1} - W_{C2} = (W_{C1} - W_F) - (W_{C2} - W_F) = (W_F - W_{V1}) - (W_F - W_{V2}). \quad (5.34)$$

Verwendet man anstelle von Glg.5.25 und Glg. 5.26 für beide Bereiche die Ausdrücke

$$n = N_C \exp\left(\frac{W_F - W_C}{kT}\right); \quad p = N_V \exp\left(\frac{W_V - W_F}{kT}\right),$$

ergibt sich durch Logarithmieren

$$\ln n_1 = \ln N_C + \left(\frac{W_F - W_{C1}}{kT}\right) \quad \text{und} \quad \ln n_2 = \ln N_C + \left(\frac{W_F - W_{C2}}{kT}\right).$$

Führt man den Begriff der

$U_T = \frac{kT}{e}$

(5.35)

ein, erhält man nach Einsetzen in Glg.5.34 für die Diffusionsspannung die Beziehung

$$U_D = U_T \ln \frac{n_2}{n_1} = U_T \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (5.36)$$

**-elektronisches Modell**

Abb. 5.42 zeigt eine schematische Darstellung des stromlosen  $pn$  - Überganges (Dotierung beispielsweise mit Bor und Phosphor). Durch thermische Anregung werden bereits bei Zimmertemperatur nahezu alle Fremdatome ionisiert. Dabei löst sich jeweils ein Elektron von einem Phosphoratom und bewegt sich leicht im Gitter des Halbleiters, während das Phosphorion eine ortsfeste positive Ladung darstellt. Ganz analog nimmt ein Boratom von einem benachbarten Si - Atom ein Elektron auf und bildet damit eine ortsfeste negative Ladung. An die entstandene Fehlstelle am Si - Ion springt leicht ein benachbartes Elektron, so dass diese als positive Ladung (Loch) im Gitter leicht beweglich ist. In Abb. 5.42a sind die ortsfesten Ladungen durch Quadrate, die beweglichen durch Kreise gekennzeichnet. Elektronen sowie Löcher sind gleichermaßen gut beweglich und demzufolge bestrebt, die starken Konzentrationsunterschiede durch Diffusion auszugleichen. Elektronen wandern ins  $p$  - Gebiet, Löcher ins  $n$  - Gebiet. Der hiermit verbundene Ladungstransport heißt Diffusionsstrom. Die Teilchendiffusion in Richtung eines Konzentrationsgefälles wird durch die Wärmebewegung aktiviert. Hierauf beruht die starke Temperaturabhängigkeit der damit verbundenen physikalischen Prozesse.

Begegnen sich Elektronen und Löcher, kann ein solches Elektron-Loch-Paar ( $e - h$  - Paar) rekombinieren. Hierdurch entsteht eine an beweglichen Ladungsträgern verarmte Schicht am  $pn$  - Übergang, so dass durch die ortsfesten Ionen eine Raumladung der Ladungsdichte

$$\rho(x) = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{A' dx} \quad (5.37)$$

resultiert. Die weiter entfernt liegenden Bereiche sind nach wie vor elektrisch neutral, da dort die Konzentration von Ionen und freien Ladungsträgern ausgeglichen ist. Die Verhältnisse in Abb. 5.42b sind vergleichbar mit einem aufgeladenen Kondensator. Ein Teil des  $p$  - dotierten Bereiches am  $pn$  - Übergang ist negativ geladen, gleich daneben befindet sich im  $n$  - Gebiet eine positive Ladung. Zwischen beiden ist eine an Ladungsträgern stark verarmte Zone, die somit wie ein Isolator wirkt. Die elektrisch neutralen Bereiche (sogenannte Bahngebiete) sind gut leitfähig, analog den Anschlüssen eines Kondensators.

Die Raumladungen im  $pn$  - Gebiet erzeugen ein inneres elektrisches Feld

$$E_x = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x) dx \quad (5.38)$$

mit dem Potentialverlauf

$$V_x = - \int E_x dx \quad (5.39)$$

Das innere Feld bewirkt somit eine Potentialdifferenz (Diffusionsspannung  $U_D$ ) zwischen  $p$  - und  $n$  - dotierten Bereichen. Im Bereich des Feldes wirkt die Feldkraft  $F_x = \pm e E_x$  auf die dort befindlichen Löcher und Elektronen. Dies hat einen Driftstrom zur Folge, der dem Diffusionsstrom entgegengesetzt gerichtet ist. Somit wird ein Eindringen weiterer Ladungsträger in die  $pn$  - Schicht verhindert, die aus diesem Grund als Sperrschicht bezeichnet wird.

Wird eine äußere Spannung  $U$  angelegt, addieren sich  $U_D$  und  $U$ . Legt man den Minuspol an das  $p$  - dotierte Gebiet und den Pluspol an das  $n$  - dotierte, vergrößert sich die Potentialdifferenz über der Sperr-

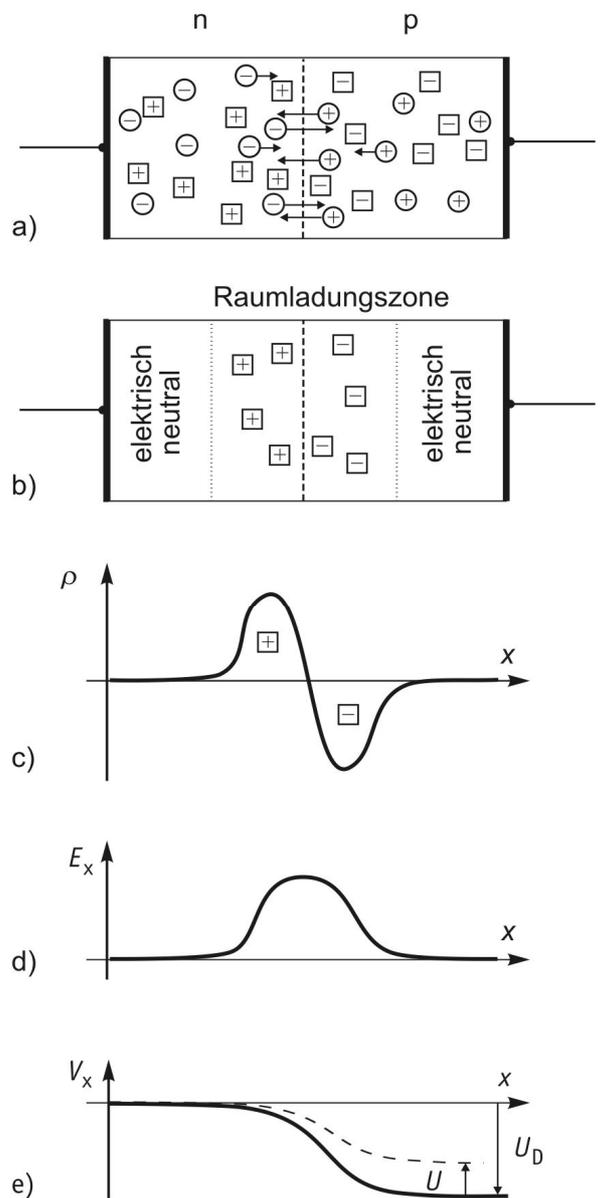


Abb. 5.42 Wirkungsweise des  $pn$  - Überganges

schicht um diese Spannung, so dass nur ein sehr geringer Sperrstrom  $I_S$  (einige nA) fließt. Entgegen- gesetzt gepolt (Durchlassrichtung, s. Abb. 5.42e) erfolgt mit zunehmender Spannung  $U$  ein rascher Anstieg des Durchlassstromes  $I_D$ , da nun äußeres und inneres Feld entgegengesetzt gerichtet sind. Ein solcher  $pn$ -Übergang wird *Diode* genannt. Es gilt für die Abhängigkeit  $I(U)$  – die *Kennlinie* der Diode näherungsweise (SHOCKLEY-Gleichung)

$$I_D = I_S (\exp(U/n U_T) - 1) \quad (5.40)$$

mit  $n$  dem sog. Emissionskoeffizient ( $n = 1 \dots 2$  in Flussrichtung;  $n > 2$  in Sperrrichtung).

#### 5.4.4.2 Der Heteroübergang

Bringt man die Oberflächen zweier unterschiedlicher Metalle (oder Halbleiter) in Kontakt, so laden sie sich gegeneinander auf, eine *Kontaktspannung* in der Größenordnung von 1 Volt wird aufgebaut, die für die Paarung beider Stoffe charakteristisch ist. Die Ursache für diesen bereits von VOLTA gefundenen Effekt liegt in unterschiedlichen Austrittsarbeiten beider Partner. Ist die Austrittsarbeit  $W_{H1}$  kleiner als  $W_{H2}$ , so werden mehr Elektronen von 1 nach 2 übertreten als umgekehrt. Dabei lädt sich 2 gegen 1 negativ solange auf, bis die sich aufbauende Kontaktspannung  $U_K$  der Einseitigkeit der Elektronenbewegung Einhalt gebietet. Da im thermodynamischen Gleichgewicht die Fermienergien beider Stoffe angeglichen sind, gilt  $-eU_K = W_{H2} - W_{H1}$ . Die Kontaktspannung kann mit einem Voltmeter gemessen werden. Bei einer Aneinanderreihung unterschiedlicher Materialien (VOLTAsche Kette) ergibt sich die Kontaktspannung aus den äußersten Gliedern der Kette.

Die direkte Messung der Kontaktspannung ist diffizil, da durch das an der Kontaktstelle im Prozess der Ladungstrennung auftretende innere Elektrische Feld die Kontaktspannung sofort kompensiert wird. Das in Abb.5.43 dargestellte Voltmeter zeigt also erst einmal keinen Ausschlag. Beim Auseinanderziehen der Kontaktstelle verschwindet das innere Feld, da die Ladungen getrennt werden. Dann zeigt das Voltmeter die Kontaktspannung an. Aber das setzt voraus, dass sich die Ladungen nicht noch am allerletzten Berührungspunkt der Kontaktflächen ausgleichen. VOLTA löste das Problem durch Verwendung hochglänzend polierter Metallflächen und ruckartiges Auseinanderziehen. Mit besserem Ergebnis verwendet man eine ultradünne schlecht leitende Folie zwischen beiden Kontaktflächen. Bei längerem Kontakt fließen die Ladungen durch die Folie und bilden die Kontaktspannung heraus, bei raschem Trennen der Kontaktflächen kommt es dann zu keinem Ladungsausgleich.

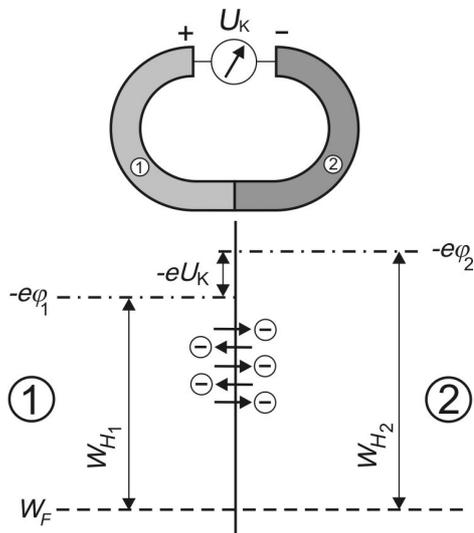


Abb. 5.43 Kontaktspannung

Im oberen Teilbild sind zwei Materialien mit unterschiedlichen Austrittsarbeiten kontaktiert. Die an der Verbindungsstelle auftretende Kontaktspannung wird im Moment der Auftrennung der Kontaktstelle mit einem Voltmeter gemessen. Das untere Teilbild zeigt das zugehörige Bändermodell. Aus dem Material (1) mit der niedrigeren Austrittsarbeit treten mehr Elektronen in (2) über als umgekehrt. Hierdurch wird (2) gegen (1) negativ aufgeladen was die Kontaktspannung verursacht.

Da die Elektronenbewegung auf einem Anregungsprozess basiert, hängt die Kontaktspannung exponentiell von der reziproken Temperatur ab. Sind  $n_1$  und  $n_2$  die Elektrodichten in 1 und 2, gilt näherungsweise  $n_1/n_2 = \exp(eU_K/kT)$ , woraus für die Spannung folgt

$$U_K = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (5.41)$$

Diese Gleichung gilt übrigens auch als NERNST<sup>62</sup>sche Gleichung für Elektrolyte verschiedener Ionenkonzentrationen auf beiden Seiten einer Membran.

<sup>62</sup> Walther NERNST (1864-1941) dt. Physiker und Chemiker; Elektrochemie, 3. Hauptsatz der Thermodynamik, 1920 NP für Chemie

Entfernt man das Voltmeter und kontaktiert beide Enden der Metalle, kompensieren sich beide Kontaktspannungen zu Null, da sie entgegengesetzt gerichtet sind. Aus Glg. 5.41 folgt jedoch, dass eine Differenz verbleibt, sofern beide Kontaktstellen auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten werden. Es resultiert eine *Thermospannung*

$$U_{th} = \frac{k}{e} \Delta T \ln \frac{n_1}{n_2}, \tag{5.42}$$

die einen Strom durch den Leiterkreis treibt. Bei niederohmiger Ausführung (große Leiterquerschnitte) können beachtliche Stromstärken erreicht werden. Beide Drähte bilden ein *Thermoelement*, von SEEBECK<sup>63</sup> 1821 entdeckt. Wenn man einen der Drähte unterbricht und ein Voltmeter zwischen schaltet, zeigt dies die Thermospannung an. Damit lassen sich Temperaturdifferenzen messen. Meist wird die Temperatur einer Kontaktstelle als Referenz mit schmelzendem Eis auf 0°C gehalten. Der SEEBECK-Effekt ist umkehrbar. Im PELTIER<sup>64</sup>-Element entsteht eine Temperaturdifferenz zwischen beiden Kontaktstellen als Folge eines Stromflusses. Effektiv sind großflächige Kontaktstellen, über die größere Wärmeströme fließen können. Weiterhin werden anstelle von Metallen Halbleiter eingesetzt. Praktisch eingesetzt werden PELTIER-Elemente vorwiegend zur Kühlung. Man kann die Verlustwärme von elektronischen Bauelementen an einen Kühlkörper transportieren oder Lebensmittel im Autokühlschrank frisch halten. Bei allen Anwendungen gilt es, die richtige Polung einzuhalten, sonst stirbt der Prozessor den Wärmetod oder die Limo kocht im Kühlschrank über.

### 5.4.4.3 Der Metall-Halbleiter-Übergang

Der Metall-Halbleiter-Übergang ist ein spezieller Heteroübergang. Als Kontaktierung von Halbleiterzonen bei HL-Bauelementen sollte er möglichst niederohmig sein. Es zeigt sich, dass dieser Übergang unter bestimmten Voraussetzungen auch gute Gleichrichtereigenschaften aufweist, die zur Herstellung von Dioden (sog. SCHOTTKY<sup>65</sup>-Dioden) insbesondere in der Mikrowellen- und Nanosekundenimpulstechnik ausgenutzt werden.

Ist die Austrittsarbeit der Elektronen im Metall  $W_M$  größer als die im Halbleiter  $W_H$  (s. Abb. 5.44a,b), so können beim Kontakt Elektronen entsprechend hoher Energie leichter vom Halbleiter ins Metall übergehen als umgekehrt. Hierdurch wird eine negative Aufladung der Metalloberfläche erreicht. In der Halbleiterrandschicht erzeugen die jetzt überschüssigen (von ihren Elektronen entblößten) positiven Donatorionen eine positive Aufladung. Bei einem *n*-Halbleiter wie in Abb. 5.44c bedeutet dies eine Verarmung an Majoritätsladungsträgern in der Randschicht, ähnlich einem *p-n*-Übergang. Diese *Verarmungsrandschicht* bewirkt einen hochohmigen Widerstand, der zudem durch eine äußere Spannung gesteuert werden kann und für die Gleichrichtereigenschaften verantwortlich ist.

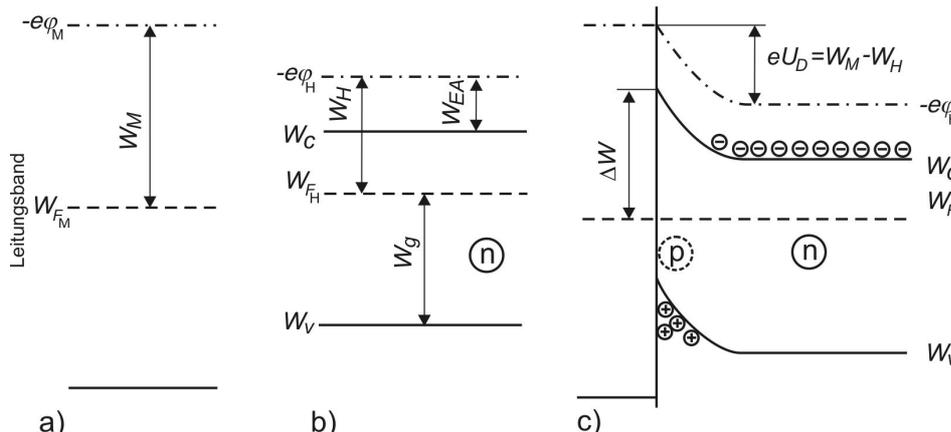


Abb. 5.44 Bändermodell eines Metall-Halbleiter-Übergangs mit großer Austrittsarbeit des Metalls (Verarmungsrandschicht)

a) Bändermodell des Metalls  
 b) Bändermodell des *n*-Halbleiters

c) zusammengesetztes Bändermodell im thermodynamischen Gleichgewicht

Ist die Austrittsarbeit der Elektronen im Metall  $W_M$  kleiner als die im Halbleiter  $W_H$  (s. Abb. 5.45a,b), tritt eine Anreicherung der Randschicht des Halbleiters mit Elektronen auf. Diese *Anreicherungsschicht* ist niederohmig, wie sie bei der Kontaktierung von Halbleitermaterial erwünscht ist.

<sup>63</sup> Thomas SEEBECK (1770-1831) dt.-balt. Physiker; Entdeckung der optischen Aktivität von Zuckerlösung, thermoelekt. Spannungsreihe, entdeckte Ferromagnetismus von Nickel und Cobalt

<sup>64</sup> Jean Charles Athanase PELTIER (1785-1845) franz. Physiker; Thermoelektrizität, Peltier-Effekt, Peltier-Element

<sup>65</sup> Walter SCHOTTKY (1886-1976) dt. Physiker und Elektrotechniker; Elektronenröhre, HL-Physik

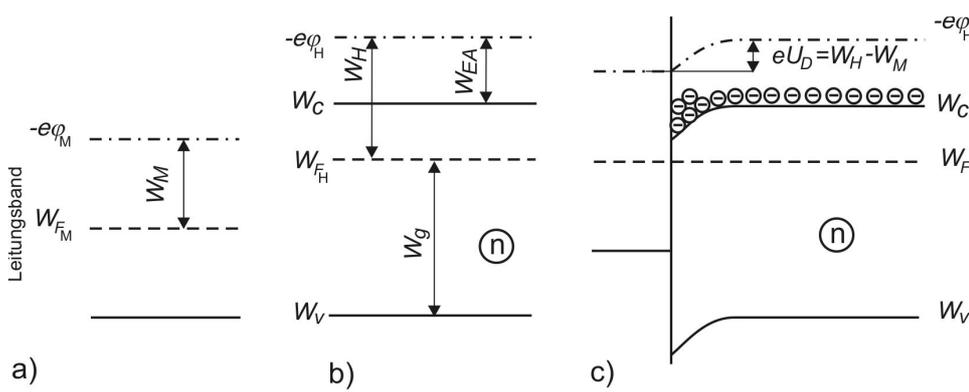


Abb. 5.45 Bändermodell eines Metall-Halbleiter-Überganges mit kleiner Austrittsarbeit des Metalls (Anreicherungsrand-schicht)  
 a) Bändermodell des Metalls  
 b) Bändermodell des *n*-Halbleiters  
 c) zusammengesetztes Bändermodell im thermodynamischen Gleichgewicht

Ganz analoge Überlegungen können auch für einen *p*-Halbleiter angestellt werden. Es gilt

	$W_M > W_H.$	$W_M < W_H.$
<i>n</i> -Halbleiter	Verarmung	Anreicherung
<i>p</i> -Halbleiter	Anreicherung	Verarmung

Nach dieser vereinfachten Kontakttheorie ergibt sich die Barrierenhöhe  $\Delta W = W_M - W_{EA}$ , für die Diffusionsspannung gilt  $eU_D = W_M - W_H$ . Diese Betrachtung lässt allerdings außer Acht, dass an Grenzflächen häufig Störungen auftreten durch Inhomogenitäten im Kristallaufbau, dünne Oxidschichten, Verunreinigungen. Diese Störungen erzeugen zusätzliche erlaubte Zustände im Bereich der *Oberfläche (Oberflächenzustände)*, welche weitere Bandverbiegungen verursachen.

**5.4.4.4 Der Metall-Isolator-Halbleiter-Übergang**

Die Metall-Isolator-Halbleiterstruktur hat als Steuerelektrode große praktische Bedeutung. Werden Metall, Isolator und Halbleiter als Sandwichstruktur aneinandergesetzt, ergibt sich das in Abb. 5.46 skizzierte Bändermodell.

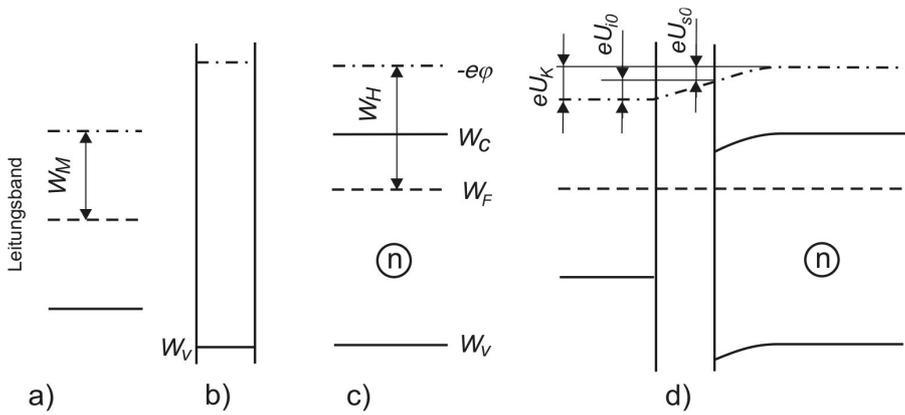


Abb. 5.46 Bändermodell eines Metall-Isolator-Halbleiter-Überganges  
 a) Bändermodell des Metalls  
 b) Bändermodell des Isolators  
 c) Bändermodell des *n*-Halbleiters  
 d) zusammengesetztes Bändermodell im thermodynamischen Gleichgewicht (Fermi-niveau verläuft waagrecht, Makropotential ist stetig)

Die Kontaktspannung über Metall und Halbleiter  $U_K = (W_H - W_M)/e$  fällt teilweise als (innere) Spannung  $U_{i0}$  über dem Isolator ab. Ein weiterer (innerer) Spannungsabfall  $U_{s0}$  ergibt sich aus der Bandverbiegung im Bereich der Oberfläche des Halbleiters:  $U_K = U_{i0} + U_{s0}$ .

## 6. Halbleiterbauelemente

### 6.1. Technologische Prinzipien der Herstellung

Die Herstellung von modernen Halbleiterbauelementen erfordert einen extrem hohen Standard der Beherrschung technologischer Prozesse. Folge davon ist die gegenwärtig nahezu globale Arbeitsteilung auf diesem Gebiet. Das Halbleitermaterial muss zunächst in hoher chemischer Reinheit hergestellt und daraus Einkristalle gezüchtet werden. Eine effektive Beseitigung von Verunreinigungen im Rohmaterial stellt das *Zonenschmelzverfahren* dar. Hierbei wird das Ausgangsmaterial langsam durch eine Heizung gezogen und dabei partiell aufgeschmolzen. Bei der Rekrystallisation werden die Verunreinigungen seltener wieder ins Kristallgitter eingebaut und reichern sich in der Schmelzzone an. Nach etlichen Wiederholungen des Prozesses ist das Material schließlich ausreichend sauber. Zur Erzeugung von großen Einkristallen wird das CZOCHRALSKI<sup>66</sup>-Verfahren angewendet s. Abb. 6.1.

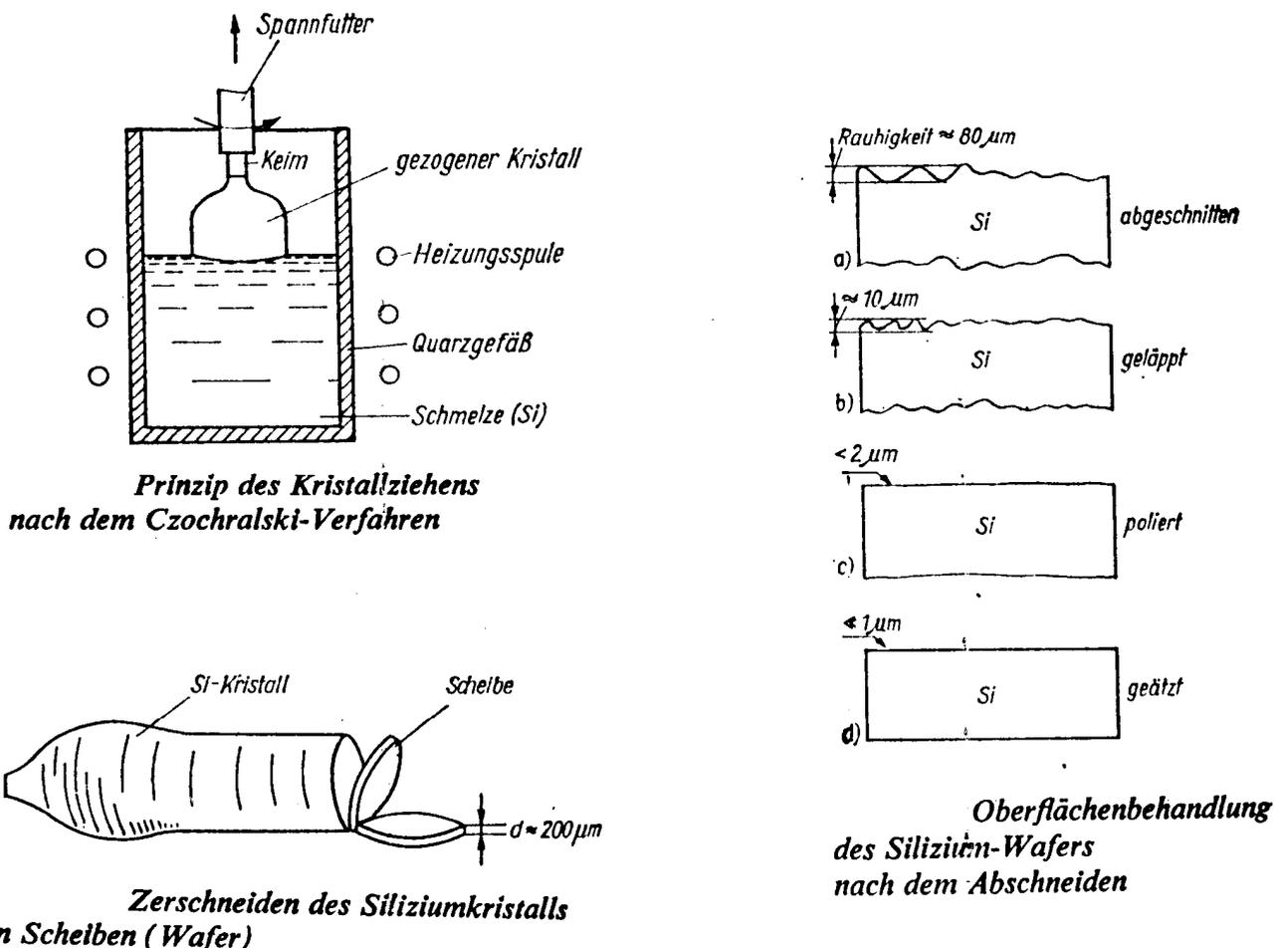


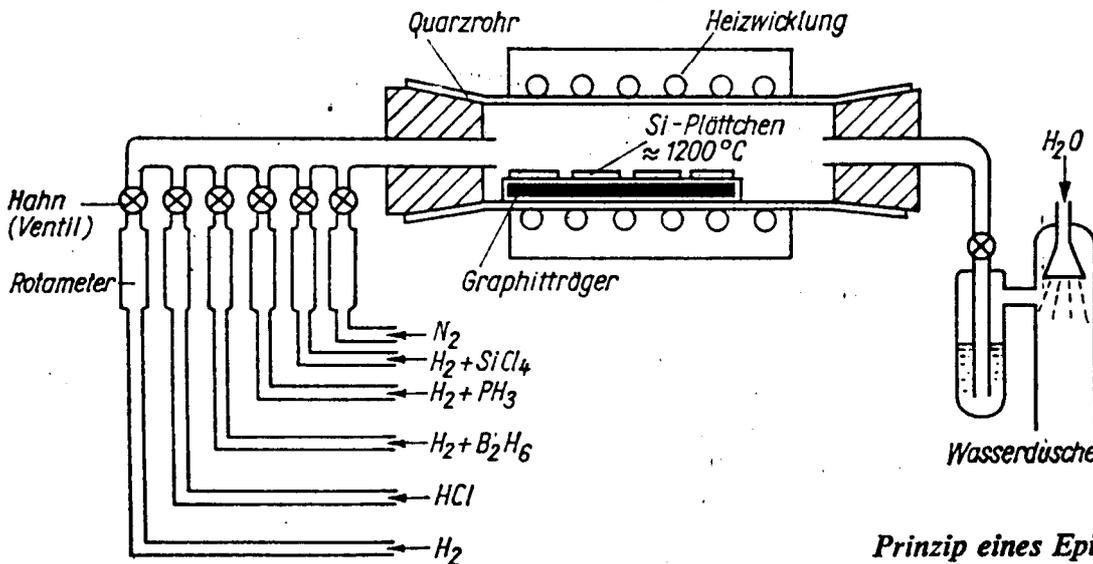
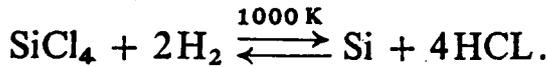
Abb. 6.1 Verfahren zur Kristallzüchtung und Bearbeitung von Einkristallen

In eine Schmelze des Halbleiters wird ein Impfkristall eingebracht, der über seine Halterung gekühlt wird und nur partiell aufschmilzt. Der Kristall wird unter Drehung langsam aus der Schmelze gezogen und wächst dabei. Es entstehen birnenförmige Einkristalle von bis zu 30cm Durchmesser. In die Schmelze können Fremdatomen gegeben werden, wodurch das Grundmaterial schon *p*- bzw. *n*-leitend ist. Anschließend wird der Einkristall in ca. 0,5mm dünne Scheiben geschnitten, deren Oberfläche durch Schleifen, Polieren und Ätzen fein bearbeitet wird. Zur Erzeugung von *pn*-Schichten wird entweder ein bereits dotiertes Grundmaterial mit komplementären Fremdatomen dotiert oder es werden aufeinander folgend unterschiedliche Dotierungen eingebracht. Hierzu werden unterschiedliche Verfahren angewendet. Bei der *Epitaxie* wächst aus der Gasphase auf dem Wafer eine dünne einkristalline Schicht des gleichen HL-Materials auf, wobei gleichzeitig zugeführte Störatome

<sup>66</sup> Jan CZOCHRALSKI (1885-1953) poln. Chemiker; Ziehen von Einkristallen aus der Schmelze

mit ins Gitter eingebaut werden. Verändert man die Zusammensetzung des Gasgemisches im Verlaufe des Prozesses werden Profile aus *p*- und *n*-Schichten aufgebaut s. Abb. 6.2.

### Tetrachloridprozeß

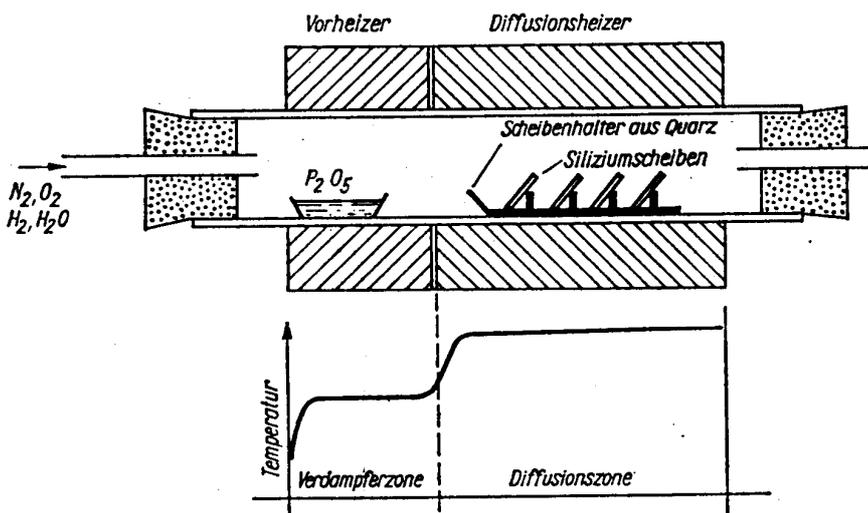


Prinzip eines Epitaxiereaktors

Abb.6.2 Dotierung von Halbleitern durch Epitaxie

Die Wafer werden stark erhitzt, so dass  $\text{SiCl}_4$  zerfällt und Si auf der Waferoberfläche kristallisiert. Dabei werden Fremdatome mit eingebaut.

### Prinzip einer Diffusionsanlage

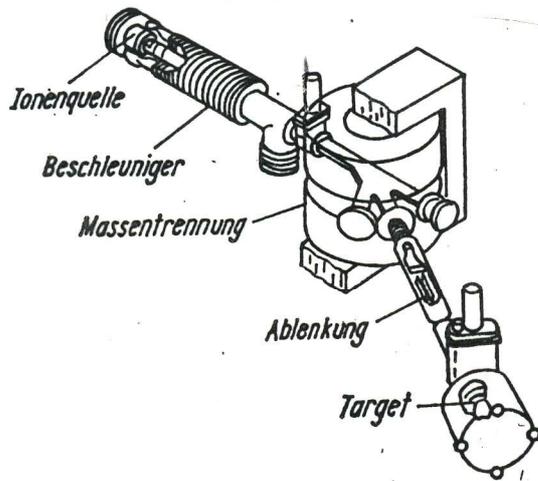


$$N(x) = N_0 \exp - \frac{x^2}{L_D^2}$$

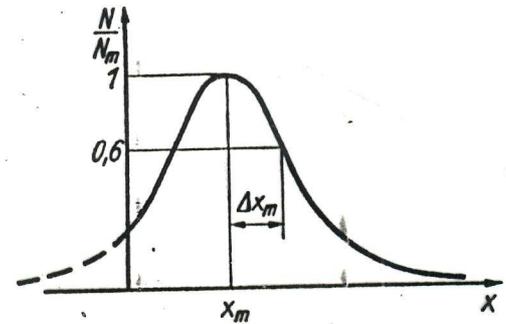
Abb. 6.3 Dotierung von Halbleiteroberflächen durch Diffusion

Durch *Diffusion* können Dotanten in eine HL-Oberfläche eingebracht werden. Da bei hohen Temperaturen die Fremdatome im HL-Gitter in Richtung des Konzentrationsgefälles wandern (diffundieren), bildet sich ein für Diffusionsprozesse typisches Tiefenprofil  $N(x)$  der Dotierungskonzentration heraus (Gauss-Glockenkurve), s. Abb. 6.3.

Eine moderne Methode ist die Ionenstrahlimplantation. Hierbei werden ionisierte Fremdatome in einem elektrischen Feld beschleunigt und auf die HL-Oberfläche geschossen. Dabei dringen die Ionen in eine bestimmte Tiefe des HL-Materials vor, die mit der Beschleunigungsspannung eingestellt werden kann. Da sich Ionen überdies gut fokussieren lassen, ermöglicht diese Methode die Erzeugung lateral strukturierter „verloreener“ Störstellenprofile s. Abb. 6.4.



**Prinzip  
einer Ionenimplantationsanlage**



**Störstellenprofil  
bei Ionenimplantation**

Abb.6.4 Aufbau einer Anlage zur Ionenimplantation (links) und Störstellenprofil(rechts)

### 6.3. Bipolartransistoren

#### 6.3.1. Aufbau und Wirkungsweise

Als im Dezember 1947 BARDEEN, BRATTAIN und SHOCKLEY der Bau des ersten Transistors gelang, ahnte niemand, dass dies nicht nur eine der populärsten Erfindungen des 20. Jahrhunderts werden sollte, sondern auch neue Horizonte in Technik, Wirtschaft und Wissenschaft eröffnen würde. Der *Bipolartransistor* (Transistor als Abkürzung von *transfer resistor*) besteht ähnlich wie die Halbleiterdiode sowohl aus p- als auch aus n-dotiertem Werkstoff (im Unterschied zum *unipolaren* Transistor s.u.). Charakteristisch ist die Schichtfolge n-p-n für den npn-Transistor und analog p-n-p für den pnp-Transistor. Somit bilden sich stets zwei Sperrschichten heraus. Obwohl jede für sich genommen wie eine Diode zu betrachten ist, besteht ein großer Unterschied zu zwei durch Lötten verbundene diskrete Dioden darin, dass die beiden Sperrschichten eines Transistors in unmittelbarer räumlicher Nachbarschaft (wenige  $\mu\text{m}$  Abstand) angeordnet sind. Die pnp-Transistoren basieren meist auf Germanium während Siliziumtransistoren meist vom npn-Typ sind. Der Wirkungsmechanismus ist bei beiden Typen analog, die Strukturen elektronischer Schaltungen können durch Vertauschen der Polarität der Anschlüsse ineinander überführt werden.

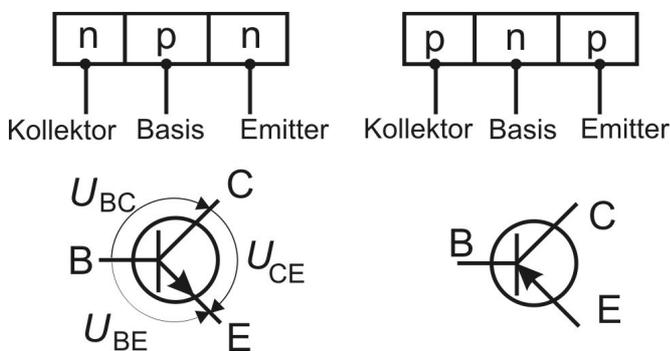


Abb. 6.22 Struktur und Schaltsymbol von npn- und pnp-Transistoren

Beim linken Schaltsymbol sind die Potentialdifferenzen zwischen den Transistoranschlüssen gekennzeichnet. Die Schichtfolge erweckt den Eindruck, dass Kollektor und Emitter identisch sind und vertauscht werden könnten. Unterschiede resultieren jedoch schon aus technologischen Gründen. Bei Leistungstransistoren ist meist der Halbleiterkristall am Kollektor mit dem Gehäuse verbunden.

In der Hauptbetriebsart „aktiv normal“ des Transistors sind die Spannungen zwischen den einzelnen Anschlüssen so gewählt, dass eine der Sperrschichten in Fluss-, die andere in Sperrrichtung betrieben wird. Hierbei setzt sich der Basisstrom aus vier Anteilen zusammen:

1. Rekombinations-Generationsstrom in der Sperrschicht zwischen Basis und Emitter,
2. Injektionsstrom in das Bahngebiet des Emitters,
3. Rekombinationsstrom in der Basis,
4. Sperrstrom des Kollektor-Basis-Überganges.

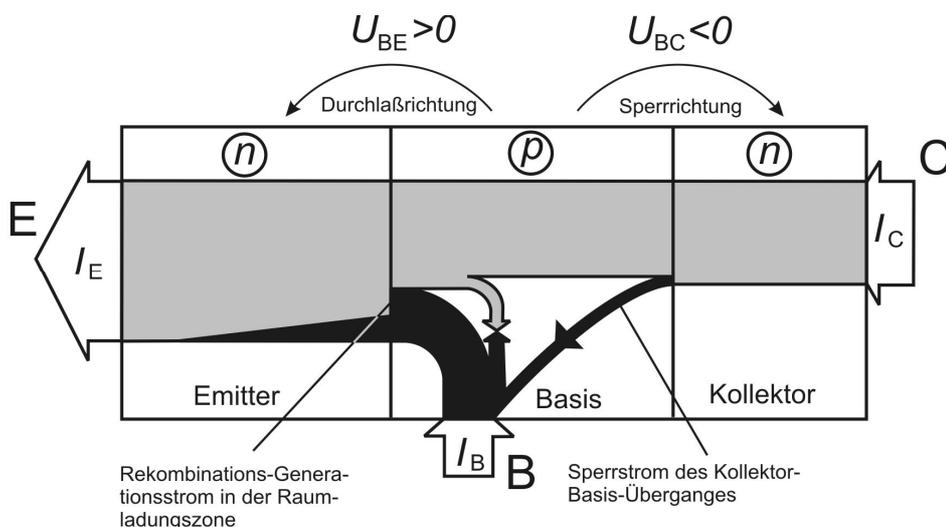


Abb. 6.23 Spannungen und Ströme am Transistor in der Betriebsart „aktiv normal“

Das Funktionsprinzip des Transistors beruht auf dem Umstand, dass die *pn*-Sperrschicht für Majoritätsladungsträger sperrt, für Minoritätsladungsträger jedoch leitet. Im Betriebsfall aktiv normal s. Abb.6.23, 24 läuft folgender Mechanismus ab:

- Elektronen gelangen durch die in Durchlassrichtung betriebene *pn*-Schicht vom Emitter in die Basis, sind dort *Minoritätsladungsträger*.
- Die Basis ist sehr schmal ( $<10\mu\text{m}$ ), folglich rekombinieren dort nur wenige Elektronen, viele gelangen in den Bereich der Basis-Kollektor-Sperrschicht.
- Die Sperrrichtung gilt für die *Majoritätsladungsträger*, Elektronen sind aber hier *Minoritätsladungsträger*, werden also sofort durch die Sperrspannung zum Kollektor „gesaugt“.
- Der kleine Basisstrom erhält den Basis-Emitter-Übergang in Durchlassrichtung, damit wird der vergleichsweise große Kollektorstrom gesteuert.

Bei  $U_{BE} < U_{F0}$  sperrt der Transistor. Die Transistorwirkung setzt bei Silizium-Transistoren somit erst bei Werten  $U_{BE} > 0,5\text{V}$  ein. Die Strombilanz am Transistor ergibt  $I_E = I_C + I_B$ . Zur Steuerung des Transistors können sowohl der Basisstrom als auch der Kollektorstrom verwendet werden. Bei Steuerung mit dem Emitterstrom ergibt sich ein Stromverstärkungsfaktor

$$A_N = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E} . \quad (6.11)$$

Da  $I_C$  stets kleiner ist als  $I_E$ , ist  $A_N < 1$  (z.B.  $A_N = 0,99$ ). Bei Steuerung des Transistors mit dem Basisstrom kann jedoch eine wirkliche Stromverstärkung erreicht werden

$$B_N = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{A_N}{1 - A_N} \gg 1 . \quad (6.12)$$

Charakteristisch für den *Bipolartransistor* ist, dass am Steuermechanismus beide Ladungsträgerarten beteiligt sind, was den Namen erklärt (im Unterschied zu den *Unipolaren* Transistoren mit nur jeweils einer am Ladungstransport beteiligten Ladungsträgerart, s. Kap. 6.4). In Abb. 6.25 sind einige Bauformen von Transistoren zusammengestellt.

### 6.3.2. Grundschaltungen von Transistoren

Je nach Wahl der Bezugs Elektrode unterscheidet man Basis-, Emitter- und Kollektorschaltung.

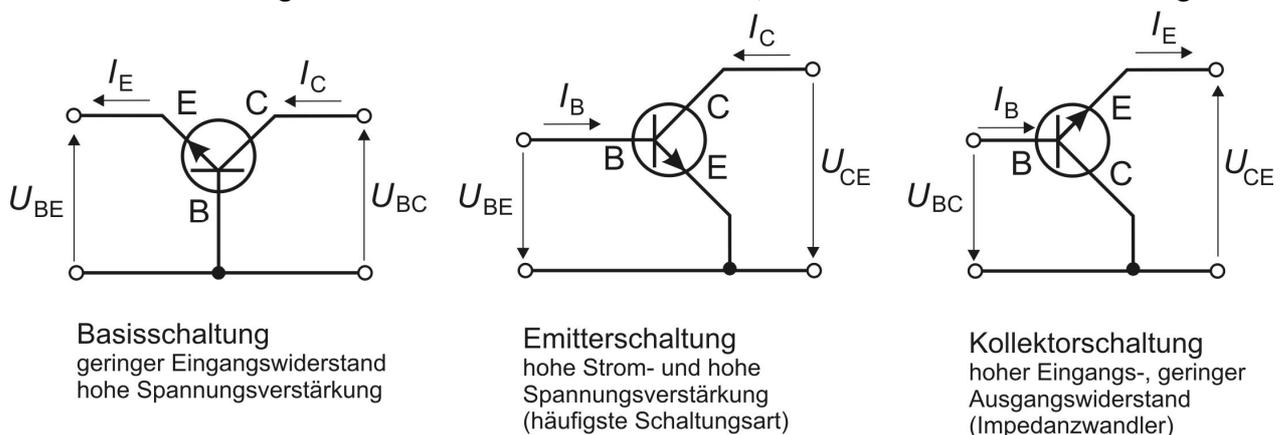
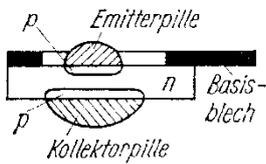
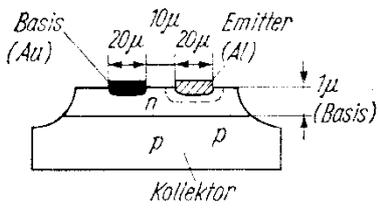
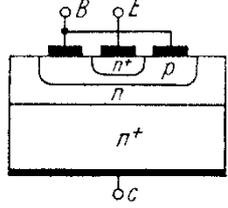
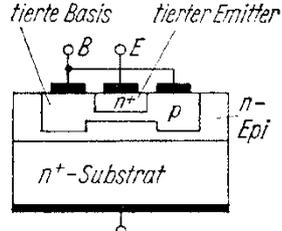
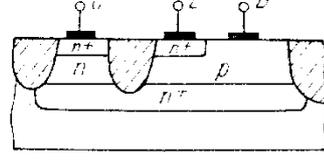
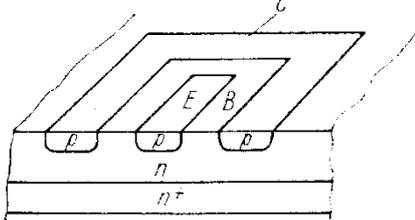


Abb. 6.24 Grundschaltungen von Transistoren

Je nach der Polarität der angelegten Spannungen  $U_{BC}$  und  $U_{BE}$  unterscheidet man die folgenden Betriebsfälle:

Betriebsfall	$U_{BC}$	$U_{BE}$	Bemerkungen
Aktiv, normal	$< 0$	$> 0$	Kollektor gesperrt, Emitter in Durchlassrichtung
Aktiv, invers	$> 0$	$< 0$	Emitter gesperrt, Kollektor in Durchlassrichtung
Sättigung	$> 0$	$> 0$	Emitter und Kollektor in Durchlassrichtung
Sperrbereich	$< 0$	$< 0$	Emitter und Kollektor gesperrt

Abb. 6.25. Bauformen von Bipolartransistoren (nach Möschwitzer/Lunze)

Bezeichnung	Bauform	Eigenschaften
a) Legierungs- transistor	<p><i>Plättchenbauform</i></p> 	<p>Von beiden Seiten eines Halbleiterplättchens werden Dotierungspillen einlegiert. Die Basisweite kann nicht wesentlich kleiner als 10 <math>\mu\text{m}</math> gemacht werden. Außerdem entstehen hohe Sperrschichtkapazitäten infolge des im wesentlichen abrupten Störstellenprofils (meist pnp). Hoher Emitterwirkungsgrad; mäßige Hochfrequenzeigenschaften (bis 10 MHz)</p>
b) Diffundiert- legierter Mesatransistor	<p><i>Mesabauform</i></p> 	<p>In ein homogenes (z.B. p-) dotiertes Halbleiterplättchen werden Donatoren eindiffundiert, es entsteht ein pn-Übergang, der Kollektor-Basis-Übergang. Danach erfolgte das Einlegieren des Emitters (Al) und die Kontaktierung der Basis (Au) sowie die Ätzung der Mesostruktur. Ausgezeichnete Hochfrequenzeigenschaften</p>
c) Diffundierter Epitaxie- Planartransistor		<p>Durch ein niederohmiges <math>n^+</math>-Substrat, auf dem durch Epitaxie eine dünne n-leitende Schicht erzeugt wird, kann der Kollektorbahnwiderstand reduziert werden, ohne die Spannungsbelastbarkeit zu erniedrigen. Die Einbringung von Basis und Emitter erfolgt durch zweimalige Diffusion</p>
d) Ionenimplantierter Planartransistor	<p><i>B-implantierte Basis</i>    <i>As-implantierter Emitter</i></p> 	<p>Besonders für Mikrowellentransistoren ist die Anwendung der Dotierung durch Ioneneinpfanzung vorteilhaft. Durch äußerst präzise reproduzierbare Störstellenprofile mit extrem kleinen Lateral- (einige <math>\mu\text{m}</math>) und Vertikaldimensionen (0,1 bis 0,5 <math>\mu\text{m}</math>) können Grenzfrequenzen von 10 GHz erreicht werden</p>
e) Isoplanar- transistor		<p>Mit Hilfe des LOCOS-Verfahrens werden isolierte Inseln geschaffen (dickes, im Halbleiter versenktes <math>\text{SiO}_2</math>). Dadurch ist der nach oben herausgezogene Kollektoranschluß von der Basis getrennt. Die übrigen Prozeßschritte sind im wesentlichen die gleichen wie beim Epitaxie-Planartransistor. Sehr gute elektrische Eigenschaften, hohe Fertigungsausbeute, hohe Packungsdichte</p>
f) Lateral- transistor		<p>Auf <math>n^+</math>-Schicht wird eine dünne Epitaxieschicht (z.B. n-Schicht) aufgebracht. In dieser Epitaxieschicht werden dann durch Diffusion oder Legierungsdotierung mit dem Elektronenstrahl bzw. durch Ionenimplantation gleichzeitig Emitter und Kollektor realisiert. Die Herstellung erfordert wenig Prozeßschritte, die elektrischen Eigenschaften sind aber im Vergleich mit planaren Strukturen schlechter</p>

### 6.3.3. Strom-Spannungs-Kennlinien

Da ein Transistor mit Basis, Emittter und Kollektor über drei Anschlüsse beschaltet wird, sind je 2 Ströme und Spannungen linear unabhängig voneinander (die Summe über die drei Ströme sowie Spannungen sind jeweils gleich Null). Abhängigkeiten zweier Größen voneinander mit einer dritten als Parameter werden in Kennlinienfeldern veranschaulicht. Die Kennlinienfelder sind für die drei Grundschaltungen unterschiedlich und natürlich abhängig vom betrachteten Transistortyp. Im folgenden soll die Emitterschaltung eingehender behandelt werden, sie ist wegen der hohen Spannungs- und Stromverstärkung sowie der logischen Funktion als Inverter besonders interessant für praktische Anwendungen.

#### *Kennlinien in Emitterschaltung*

Der Eingangsstrom ist laut Abb.6.24 der Basisstrom  $I_B$ , der Ausgangsstrom der Kollektorstrom  $I_C$ . Die Ausgangsspannung ist die Kollektor-Emittter-Spannung  $U_{CE}$ , die Eingangsspannung ist die Basis-Emittter-Spannung  $U_{BE}$ . Die *Ausgangskennlinien* für die Emitterschaltung geben den Zusammenhang zwischen Kollektorstrom  $I_C$  und der Kollektor-Emittter-Spannung  $U_{CE}$ , mit dem Basisstrom  $I_B$  bzw. der Basis-Emittterspannung  $U_{BE}$  als Parameter an.

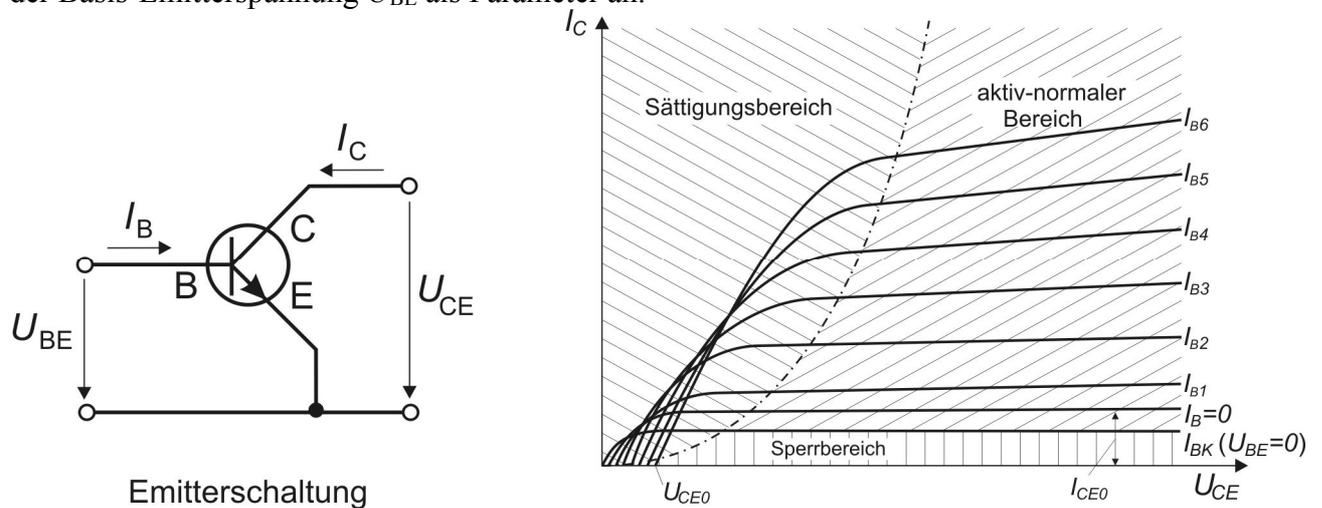


Abb. 6.26 Ausgangskennlinien des Bipolartransistors in Emitterschaltung

Bei großen Ausgangsspannungen  $U_{CE}$  ist  $I_C$  unabhängig von  $U_{CE}$  und direkt proportional zum Basisstrom. Der Stromverstärkungsfaktor ergibt sich aus Glg.6.12. Interessant ist die Grenzkurve zwischen dem aktiv-normalen Betriebsfall ( $U_{BC} < 0$ ) und Sättigung des Transistors ( $U_{BC} > 0$ ). Die entsprechende sog. *Durchlasskennlinie*  $I_C = f(U_{CE})$  mit  $U_{BC} = 0$  (entsprechend gilt für diesen Fall gilt  $U_{BE} = U_{CE}$ ) ist in Abb.6.26 strichpunktiert dargestellt.

Auf Abb. 6.27 sind zusätzlich zu den Ausgangskennlinien (1. Quadrant) die Stromübertragungskennlinien (2. Quadrant) und die Eingangskennlinien (3. Quadrant) dargestellt. Die Spannungs-Rückwirkungs-Kennlinien im 4. Quadranten vervollständigen das Kennlinienfeld. Bemerkenswert die Verlustleistungshyperbel im 1. Quadranten. Die am Transistor in Wärme umgesetzte Verlustleistung, die im Wesentlichen aus dem Produkt von Kollektorstrom  $I_C$  und Kollektor-Emittter-Spannung  $U_{CE}$  gebildet wird, darf einen für jeden Transistortyp festgelegten Maximalwert nicht übersteigen. Wird dieser Maximalwert ausgeschöpft, ist für eine vorschriftsmäßige Kühlung des Transistors zu sorgen. Bei Leistungen unter 200mW (z.B. sog. Miniplast-Transistoren) sind keine Maßnahmen erforderlich, bei höheren Leistungen bis unter 1W werden oft Kühlsterne aufgesetzt, darüber hinaus sind Kühlbleche und großflächige profilierte Kühlkörper vorgeschrieben. Welche Werte von Strömen und Spannungen aktuell anliegen (sog. *Arbeitspunkt*), hängt von der Beschaltung sowie anliegenden Eingangssignalen. Das Funktionieren des Transistors setzt eine zweckmäßige Festlegung des Arbeitspunktes voraus.

## vollständiges Kennlinienfeld des Bipolartransistors in Emitterschaltung

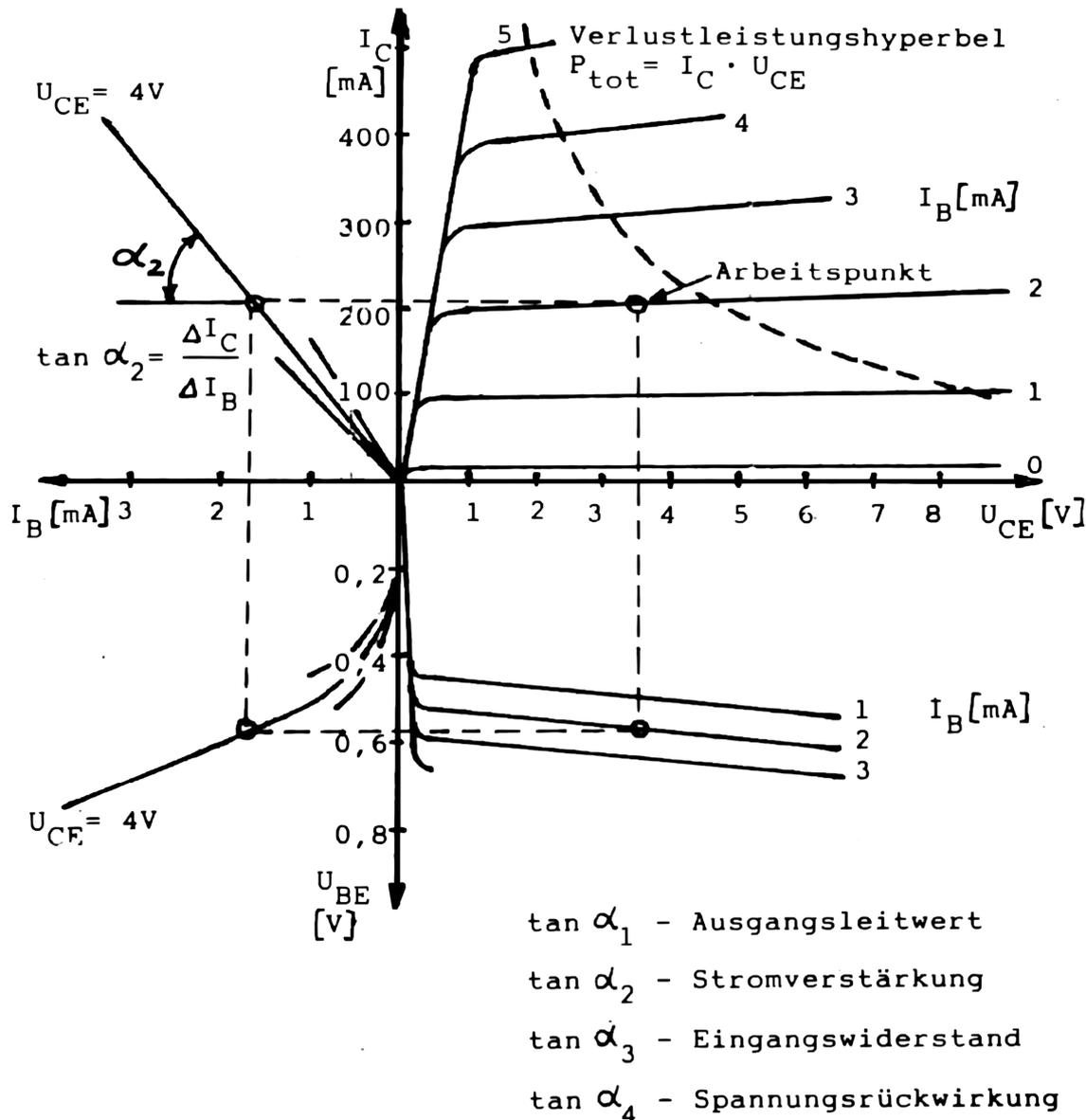


Abb. 6.27. Vier-Quadranten-Kennlinienfeld des Bipolartransistors in Emitterschaltung

## 6.3.4. Dimensionierung eines NF-Verstärkers in Emitterschaltung

Das Übertragungsverhalten eines Transistors hängt erheblich von der Frequenz ab. Ladungsträger müssen in die Basis injiziert werden, Sperrschichtkapazitäten und Widerstand der Bahngebiete erzeugen Zeitkonstanten für Umladungsprozesse. Bei hohen Frequenzen des Eingangssignals müssen deshalb spezielle Ersatzschaltbilder angewendet werden, die diesen Eigenschaften Rechnung tragen. Bei niedrigen Frequenzen kann man darauf verzichten, hierbei ist „NF“ relativ zu betrachten und immer dann relevant, wenn zwischen Eingangs- und Ausgangssignalen keine Phasenverschiebungen auftreten. Derartige Verzögerungseffekte werden durch Umladen der Sperrschichtkapazitäten und durch Ladungsspeicherung insbesondere in der Basis verursacht. Ziel der Dimensionierung besteht in der Beschaltung des Transistors mit Bauelementen, die eine sichere Funktion als Verstärker oder Schalter gewährleisten, also eine möglichst proportionale Übertragung des Eingangssignals auf den Ausgang sowie Schutz gegen mögliche Überlastung sichern.

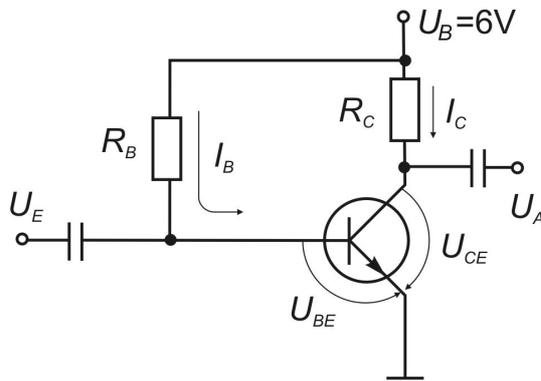


Abb. 6.28 Transistorverstärker in Emitterschaltung

Eingangs- und Ausgangssignale werden über Kondensatoren ausreichend hoher Kapazitäten ein- bzw. ausgekoppelt. Der Kollektorwiderstand  $R_C$  begrenzt den Maximalstrom und die maximale Verlustleistung. Der Basisvorwiderstand  $R_B$  dient zur Einstellung des Basisstroms im stationären Zustand, also ohne Eingangssignal (Festlegung des *Arbeitspunktes*).

Die Dimensionierung des Verstärkers erfolgt auf der Grundlage der im Datenblatt angegebenen Eigenschaften des Transistors. Insbesondere interessieren zunächst die maximale Verlustleistung  $P_{\text{tot}}$ , die am Transistor anfallen darf sowie der maximal zulässige Kollektorstrom  $I_{C\text{max}}$ . Von den Kennlinienfeldern ist das Ausgangskennlinienfeld (1. Quadrant in Abb. 6.27) das wichtigste. Im Folgenden werden anhand der Kennlinien des Transistortyps SF126 die beiden Widerstände  $R_C$  und  $R_B$  bestimmt sowie die Verstärkungsfaktoren der Schaltung.

### 1. Bestimmung der *Arbeitsgeraden* (oft auch *Widerstandsgerade* genannt)

Zwischen Kollektorstrom  $I_C$  und Kollektor-Emitterspannung  $U_{CE}$  gibt es einen linearen Zusammenhang, denn es gilt laut Abb. 6.28 die Beziehung  $U_B = R_C I_C + U_{CE}$  und somit

$I_C(U_{CE}) = (U_B - U_{CE})/R_C$ . Diese Funktion trägt die Bezeichnung *Arbeitsgerade* oder *Widerstandsgerade*. Die in Abhängigkeit von der aktuellen Aussteuerung des Transistors anliegenden Werte  $I_C$  und  $U_{CE}$  entsprechen einem Punkt auf dieser Gerade, dem *Arbeitspunkt*.

Eine einfache Methode zur Festlegung der Arbeitsgeraden besteht darin, die beiden Punkte zu bestimmen bei denen der Transistor sperrt bzw. leitet.

- Transistor sperrt (bei  $I_B = 0$ ):  $I_C \cong 0$ , folglich  $U_{CE} \cong U_B = 6 \text{ V}$
- Transistor durchgesteuert:  $I_{C\text{max}} = (U_B - U_{CES})/R_C$ .

Bei  $I_B = 0$  sperrt der Transistor genau genommen zwar nicht ganz, das ist aber für die Festlegung der Arbeitsgerade nicht wesentlich. Wichtig ist dagegen zu beachten, dass die Arbeitsgerade möglichst steil verläuft (ergibt hohe Verstärkung), aber keineswegs den Bereich der Verlustleistungshyperbel schneidet. Bei Betrieb in diesem Bereich würde trotz Kühlmaßnahmen der Transistor zerstört werden. In einem solchen Fall muss die Arbeitsgerade flacher gelegt werden und der Maximalstrom fällt geringer aus als  $I_{C\text{max}}$  laut Datenblatt. Selbst bei Maximalstrom fällt am Transistor eine kleine Spannung ab, die Kollektor-Emitter-Restspannung  $U_{CES}$  in der Größe von 0,2 V-0,3V. Der Kollektorwiderstand begrenzt den Maximalstrom und die maximale Verlustleistung. Im gegebenen Beispiel:

$$R_C = \frac{U_B - U_{CES}}{I_{C\text{max}}} = \frac{6\text{V} - 0,3\text{V}}{0,5\text{A}} = 11,85\Omega \cong 12\Omega. \quad (6.13)$$

### 2. Festlegung des Arbeitspunktes

Bei einem Verstärker soll der Arbeitspunkt in der Mitte der Arbeitsgeraden liegen, wenn kein Eingangssignal anliegt. Dies gewährleistet eine symmetrische Übertragung auf den Ausgang. Man wählt hierzu zweckmäßig einen Schnittpunkt der Arbeitsgeraden mit einer Kennlinie, etwa bei  $U_{CE} \cong U_B/2$ . Im Beispiel ergeben sich für den Arbeitspunkt folgende Werte aus dem Kennlinienfeld:  $U_{CE}^{AP} = 2,9\text{V}$ ;  $U_{BE}^{AP} = 0,5\text{V}$ ;  $I_C^{AP} = 270\text{mA}$ ;  $I_B^{AP} = 4\text{mA}$ .

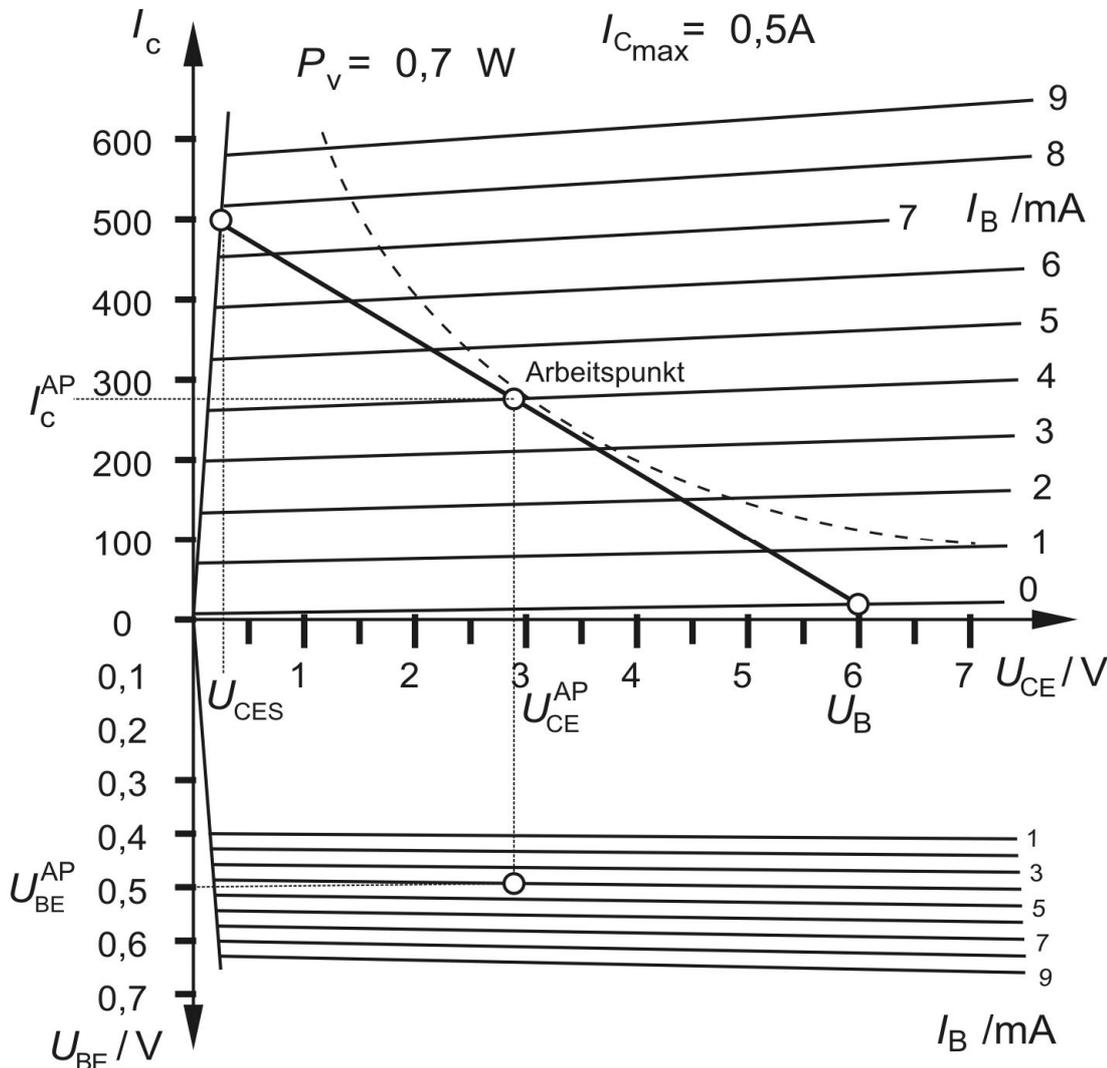


Abb. 6.29 Kennlinienfeld mit Arbeitsgerade

3. Bestimmung des Basisvorwiderstandes  $R_B$

Laut Abb. 6.29 ergibt sich für den Basisvorwiderstand

$$R_B = \frac{U_B - U_{BE}^{AP}}{I_B^{AP}} = \frac{6V - 0,5V}{4mA} = 1375\Omega \cong 1,4k\Omega. \tag{6.14}$$

4. Bestimmung der Verstärkungsfaktoren

Wenn z.B. ein positives Eingangssignal anliegt, lädt sich der Koppelkondensator am Eingang auf, es ändert sich die Basis-Emitterspannung um  $\Delta U_{BE}$  und es fließt ein zusätzlicher Basisstrom  $\Delta I_B$ . Der Arbeitspunkt verschiebt sich gemäß dieser Variation auf der Widerstandsgeraden von AP1 nach AP2 (s. Abb. 6.30), wobei sich die Kollektor-Emitterspannung um  $\Delta U_{CE}$  verringert und der Kollektorstrom um  $\Delta I_C$  anwächst. Aus dieser Verschiebung des Arbeitspunktes ergeben sich mit den Werten aus Abb. 6.30 die Verstärkungsfaktoren zu  $V_U = \Delta U_{CE} / \Delta U_{BE} = -28$  und  $B_N = V_I = \Delta I_C / \Delta I_B = 63$  und somit eine Leistungsverstärkung von etwa 1700. Die negative Spannungsverstärkung ist eine wesentliche Eigenschaft der Emitterschaltung. Das Ausgangssignal ist gegenüber dem Eingangssignal um  $180^\circ$  in der Phase verschoben. Logisch handelt es sich hierbei um einen *Inverter*.

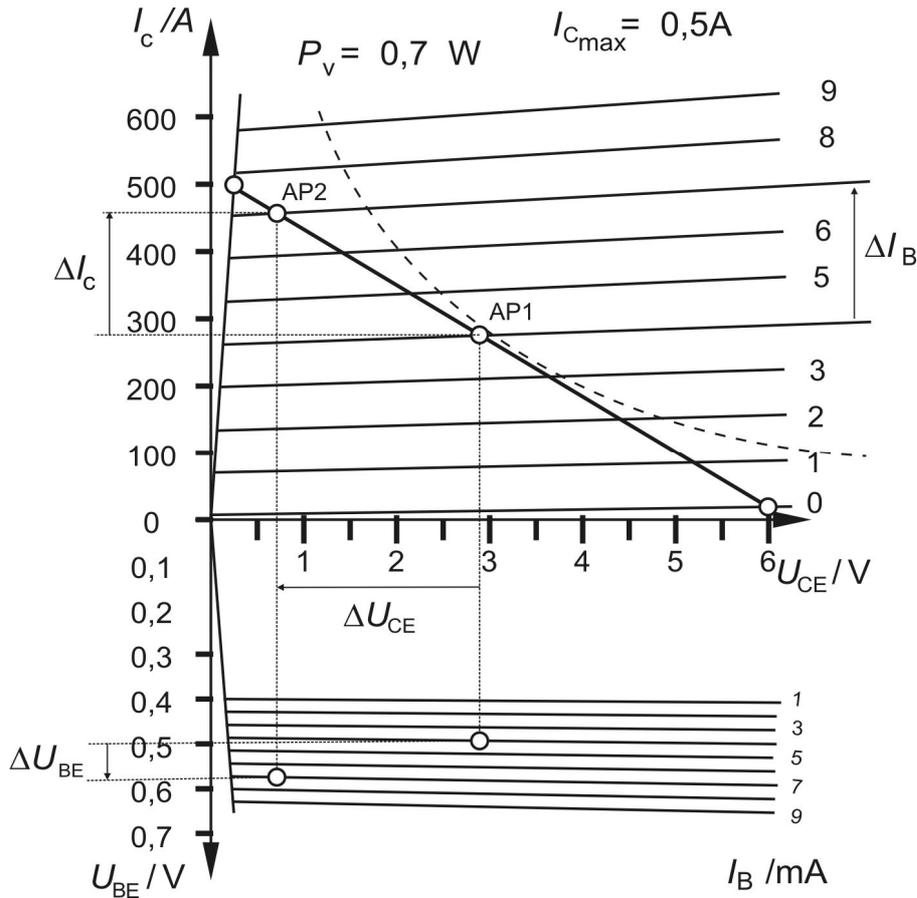


Abb. 6.30 Kennlinienfeld mit Aussteuerung des Arbeitspunktes

Der Arbeitspunkt AP1 in Ruhelage (ohne Eingangssignal) wird durch eine Änderung des Basisstromes  $\Delta I_B = 3 \text{ mA}$  auf der Arbeitsgeraden zum Arbeitspunkt AP2 verschoben. Dieser Verschiebung entsprechen Änderungen  $\Delta I_C = 190 \text{ mA}$ ,  $\Delta U_{BE} = 0,08 \text{ V}$ ,  $\Delta U_{CE} = -220 \text{ mV}$ .

### 6.3.5. Der Transistorverstärker mit Gegenkopplung

Bei der Dimensionierung von Transistorschaltungen ist die starke Streuung der Parameter der einzelnen Transistoren von Nachteil, außerdem die generell starke Temperaturabhängigkeit der Eigenschaften von HL-Bauelementen. Bei der Produktion hoher Stückzahlen wäre es viel zu aufwendig, jede einzelne Transistorstufe individuell zu optimieren. Die Temperaturabhängigkeit führt zur Instabilität des Arbeitspunktes und folglich asymmetrischer Verstärkung mit hohem Klirrfaktor. Die Standardmethode einer Stabilisierung der Eigenschaften der Verstärkerschaltung besteht in der Verwendung einer sogenannten *Gegenkopplung*. Hierbei wird erreicht, dass die Eigenschaften der Verstärkerschaltung nicht in erster Linie durch die der verwendeten Halbleiterbauelemente bestimmt werden, sondern durch Ohmsche Widerstände. Die sind in ihren Parametern sehr gut beherrschbar, was die Herstellung anbetrifft und zudem sehr wenig von der Temperatur abhängig.

#### **Stromgegenkopplung**

Eine einfache Maßnahme zur Stabilisierung des Arbeitspunktes stellt die Stromgegenkopplung dar. Hierbei wird zusätzlich ein Widerstand am Emitter eingesetzt. Der Emitterstrom erzeugt durch seinen Spannungsabfall  $U_E$  über den Emitterwiderstand ein etwas höheres Potential am Ausgang. Bei einer Temperaturerhöhung steigt die Leitfähigkeit des Transistors, der Kollektorstrom wächst um  $\Delta I_C$  und der stationäre Arbeitspunkt (kein Eingangssignal  $\Delta U_E$ ) des Transistors verschiebt sich zu niedrigeren Werten von  $U_{CE}$ . Der um  $\Delta U_{CE}$  höhere Spannungsabfall über den Emitterwiderstand wirkt erhöhend auf das Basispotential des Transistors zurück, über  $R_B$  fällt dadurch weniger Spannung ab, folglich

verringert sich der Basisstrom. Dies wiederum verschiebt den Arbeitspunkt wieder zurück in die Mitte der Arbeitsgeraden. Die Stromgegenkopplung verringert also die Temperaturabhängigkeit der Arbeitspunkteinstellung.

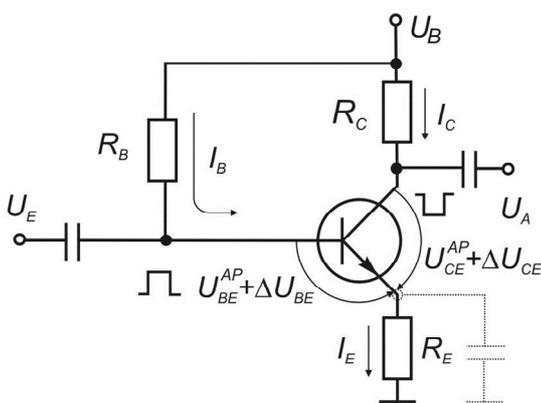


Abb. 6.31 Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

Die **Strom**gegenkopplung wird durch einen gegenüber der Schaltung in Abb. 6.28 zusätzlichen Emitterwiderstand erreicht. Der Emitterstrom erzeugt einen Spannungsabfall über den Emitterwiderstand, der sich zur Basisspannung beaufschlagt.

Oft wird ein Kondensator parallel zum Emitterwiderstand geschaltet, wodurch die Gegenkopplung bei höheren Frequenzen verringert wird.

Da der Gegenkopplungswiderstand  $R_E$  in Reihe zur Kollektor-Emitter-Strecke des Transistors liegt, bezeichnet man diese Schaltungsvariante auch als Reihengegenkopplung. Ein gründliche quantitative Analyse dieser Schaltung (s. z.B. G.Koß, W. Reinhold „Lehr- und Übungsbuch Elektronik“) liefert unter der Voraussetzung schwacher Gegenkopplung  $R_C \gg R_E$  und eines großen Stromverstärkungsfaktors des Transistors für die Spannungsverstärkung  $V'_U$  des gegengekoppelten Verstärkers die einfache Beziehung

$$V'_U = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E} \cong - \frac{R_C}{R_E} \quad (6.15)$$

Die Spannungsverstärkung des gegengekoppelten Verstärkers wird also in idealer Weise hauptsächlich von den Werten der Ohmschen Widerstände bestimmt und weniger von den Eigenschaften des Transistors.

Häufig wird zusätzlich ein Kondensator parallel zum Emitterwiderstand geschaltet. Hierdurch wird eine von der Frequenz  $f$  abhängige Gegenkopplung erzielt. Der Scheinwiderstand einer solchen Parallelschaltung ergibt sich zu  $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}$ . Mit zunehmender Frequenz  $f$  des Eingangssig-

nals sinkt somit die Gegenkopplung. Hierdurch wird ausgeglichen, dass die Spannungsverstärkung eines Transistors frequenzabhängig ist und bei höheren Frequenzen sinkt.

## Spannungsgegenkopplung

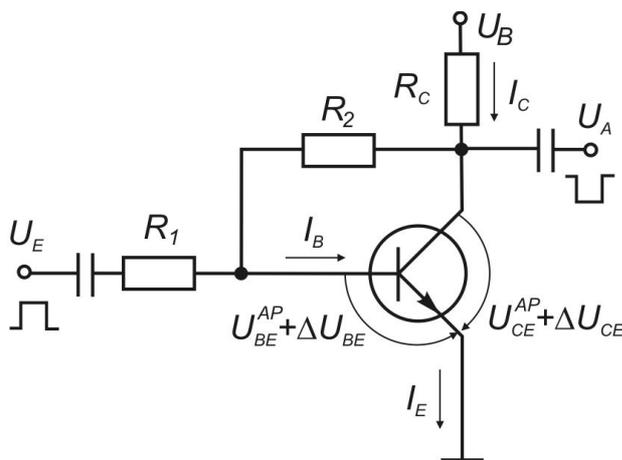


Abb. 6.32 Emitterschaltung mit Spannungsgegenkopplung

Die **Spannungs**gegenkopplung wird durch einen Widerstand  $R_2$  zwischen Kollektor und Basis erreicht. Dieser bildet mit  $R_1$  einen Spannungsteiler, wodurch ein Teil der Kollektor-Emitterspannung auf die Basis des Transistors zurückgeführt wird.

Als Widerstand  $R_1$  kann auch der Ausgangswiderstand der Signalquelle betrachtet werden. Man bezeichnet diese Art der Gegenkopplung auch als Parallelgegenkopplung, da der Gegenkopplungswiderstand  $R_2$  parallel liegt zur Kollektor-Basis-Strecke des Transistors. Betreffs einer ausführlichen quantitativen Behandlung sei auch hier auf die Elektronik-Lehrbücher verwiesen (z.B. Koß, Reinhold „Elektronik“). Unter der Voraussetzung einer schwachen Gegenkopplung  $R_2 \gg R_1$  und eines großer Stromverstärkungsfaktor des Transistors erhält man wieder eine einfache Beziehung für die Spannungsverstärkung  $V'_U$  des gegengekoppelten Verstärkers:

$$V'_U = \frac{\Delta U_A}{\Delta U_E} \cong -\frac{R_2}{R_1} \quad (6.1)$$

Die Spannungsverstärkung des gegengekoppelten Verstärkers wird also in idealer Weise hauptsächlich von den Werten der Ohmschen Widerstände bestimmt und weniger von den Eigenschaften des Transistors.

### 6.3.6. Der Transistor als Schalter

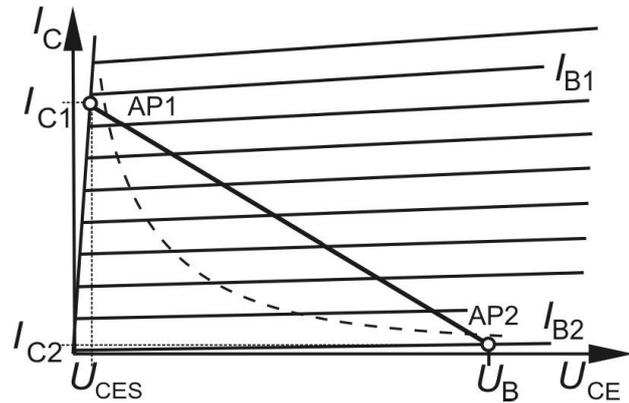
Zur Realisierung eines elektronischen Schalters ist ein Bipolartransistor vorzüglich geeignet. Da das Verhältnis von geschalteter Spannung zu Schaltspannung  $\Delta U_{CE}/\Delta U_{BE}$  sowie geschaltetem Strom zum Schaltstrom  $\Delta I_C/\Delta I_B$  bei der Emitterschaltung am größten ist, eignet sie sich besonders für die Schalteranwendung. Mit kleinen Steuerleistungen lassen sich große Schaltleistungen realisieren.

#### Statische Eigenschaften

Der Transistorschalter besitzt zwei stationäre Arbeitspunkte (AP1 und AP2 in Abb. 6.33). Im AP1 fließt ein ausreichend hoher Basisstrom  $I_{B1}$ , der den Transistor durchsteuert so dass ein hoher Kollektorstrom  $I_{C1}$  fließt. Über den so geschlossenen Schalter fällt nur die kleine Kollektor-Emitter-Restspannung  $U_{CES}$  ab. Im AP2 sperrt infolge  $I_{B2} = 0$  der Transistor, an dem die volle Betriebsspannung anliegt. Der verbleibende Kollektorstrom  $I_{C2}$  ist vernachlässigbar gering. Da der Übergang zwischen beiden Arbeitspunkten sehr rasch erfolgt, kann die Arbeitsgerade so gelegt werden, dass sie die Verlustleistungshyperbel schneidet, wenn der Übergang vom durchgeschalteten in den Sperrzustand und umgekehrt schnell genug erfolgt und nicht zu häufig. Wichtig ist dann nur, dass sich die beiden stationären Arbeitspunkte unterhalb der Verlustleistungshyperbel befinden. Ein Transistor kann deshalb eine *Schaltleistung* realisieren, die ein Vielfaches seiner maximal zulässigen Verlustleistung betragen kann.

Abb. 6.33 Kennlinienfeld mit stationären Arbeitspunkten des Transistorschalters

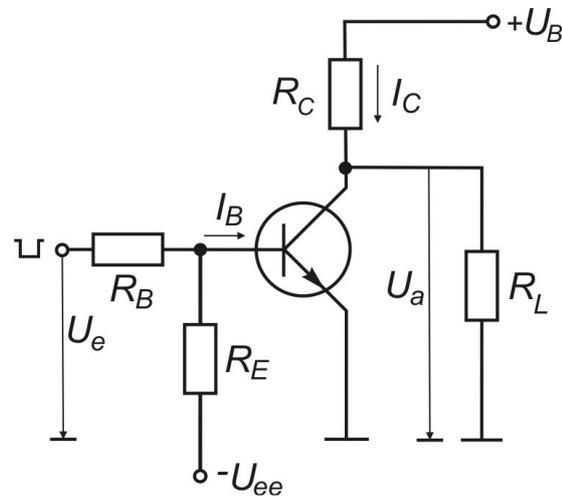
Der Arbeitspunkt AP1 in Schalterstellung „geschlossen“ wird durch einen ausreichend hohen Basisstrom  $I_{B1}$  erreicht. Der Transistor ist gut leitfähig. Bei geöffnetem Schalter im AP2 fließt kein Basisstrom und der Kollektorreststrom ist sehr gering.



Die Schaltung in Abb.6.34 stellt einen solchen Transistorschalter dar. Die Eingangsspannung wird von einem Impulsgenerator bereitgestellt oder einer vorgeschalteten Verstärkerstufe. Dies ist versinnbildlicht durch die an Betriebsspannung bzw. Masse liegenden Widerstände  $R_1$  bzw.  $R_2$  und dem mechanischen Schalter.  $R_1$  wird so dimensioniert, dass sich der Basisstrom  $I_1$  einstellt.  $R_C$  begrenzt den Kollektorstrom.

Abb. 6.34 Transistor als Schalter

Die Eingangsspannung  $U_E$  ist rechteckförmig. Bei hohem Potential fließt über den Basisvorwiderstand ein ausreichend starker Basisstrom  $I_B$ , der den Transistor voll durchsteuert. Es fließt ein starker Kollektorstrom  $I_C$ , am Ausgang liegt die niedrige Sättigungsspannung  $U_{CES}$  von 0,1-0,2V an. Ist die Eingangsspannung niedrig, sperrt der Transistor und am Ausgang liegt eine hohe Spannung  $U_{CE} \approx U_B$  an. Eine Verringerung der Speicherzeit und somit schnelleres Schalten in den Sperrbereich des Transistors wird durch den Widerstand  $R_E$  bewirkt, über den kurzzeitig ein negativer Basisstrom auf das negative Potential  $-U_{EE}$  abgeleitet wird.



Die Dimensionierung der Schaltung in Abb.6.34 anhand des Kennlinienfeldes in Abb. 6.33 birgt einen großen Nachteil: Da die Kenndaten der individuell eingesetzten Transistoren in der Regel erheblich voneinander abweichen, ist gar nicht sicher, ob bei dem nach dem Kennlinienfeld bestimmten Basisstrom  $I_{B1}$  der Transistor wirklich voll durchgesteuert ist. Eine Unabhängigkeit von der Baumusterstreuung lässt sich jedoch leicht erreichen, indem der Basisstrom deutlich vergrößert wird. Da die Kennlinien im Sättigungsbereich sehr eng benachbart sind und der Transistor durch den höheren Basisstrom nicht geschädigt wird, werden Übersteuerungsfaktoren  $m$  im Bereich zwischen 3 und 10 angewendet

$$I_B = m \frac{I_{C1}}{B_N} \tag{6.17}$$

mit

$$I_C = \frac{U_B - U_{CE1}}{R_C}$$

Die am Ausgang entstehende Sättigungsspannung  $U_{CE1} = U_{CES} \approx 0,1V \dots 0,2V$ . Bei niedriger Eingangsspannung  $U_e = 0$  muss der Transistor gesperrt sein. In diesem Arbeitspunkt AP2 wird wegen  $I_{B2} = 0$  die Ausgangsspannung durch die Betriebsspannung  $U_{CE2} \approx U_B$  bestimmt. Der Reststrom durch den Transistor kann in der Regel vernachlässigt werden.

**Dynamisches Verhalten**

Wechselt der Pegel des Eingangssignals z.B. von  $U_{CE1}$  auf 0, vergeht eine gewisse Zeit, bevor der Transistor sperrt und die Ausgangsspannung ansteigt. Bei der Schalteranwendung sind diese Schaltzeiten wichtig. Auf der Abb. 3.35 sind die Zeitverläufe von Kollektor- und Basisstrom sowie der Basis-Emitterspannung im Schalterbetrieb gezeigt.

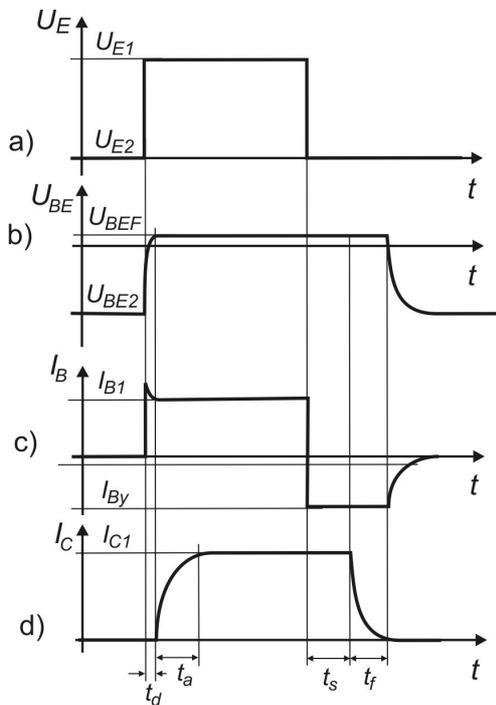


Abb. 6.35 Zeitverlauf von Spannungen und Strömen am Transistor während des Schaltvorganges. Die charakteristischen Zeitabschnitte werden jeweils auf 10% bzw. 90% des Signalhubes bezogen.

a) Die Eingangsspannung  $U_E$  ist rechteckförmig und alterniert zwischen Null und einem für die Aussteuerung des Transistors ausreichend hohen Wert (z.B.  $U_B$ )

b) Im durchgesteuerten Zustand entspricht  $U_{BE1}$  der Flussspannung der Basis-Emitter-Diode. Für Siliziumtransistoren gilt  $U_{BEF} \approx 0,6V$ . Im Sperrbereich ist die Basis-Emitterspannung  $U_{BE2}$  negativ.

c) Im Sperrbereich ist der Basisstrom Null. Im durchgesteuerten Zustand wird der Basisstrom  $I_{B1}$  um den Übersteuerungsfaktor  $m$  größer gewählt als aus dem Kennlinienfeld an AP1 folgt. Negativer Basisstrom  $I_{By}$  bewirkt ein beschleunigtes Sperren des Transistors.

d) Das Ausgangssignal ist durch die Schaltvorgänge gegenüber dem Eingangssignal zeitlich versetzt mit exponentiell ansteigenden bzw. abfallenden Flanken.

**Einschaltverzögerung  $t_d$ :** Beim Übergang des Transistors vom Sperrzustand in den aktiven Bereich werden die Sperrspannungen über den Kollektor- und Emittersperrschichtkapazitäten abgebaut, bis sich an der Basis-Emitter-Diode die Flussspannung  $U_{BEF}$  von etwa 0,6 V (bei Si-Transistoren) einstellt. Während der Basisstrom eine Umladespitze aufweist, bleibt der Kollektorstrom annähernd Null. Die Einschaltverzögerung ist meist klein gegenüber den anderen Zeiten.

**Anstiegszeit  $t_a$ :** Der Aufbau der Basisladung sowie die Umladung der Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität erfolgen über den konstanten Basisstrom  $I_{B1}$ . Mit einem für den Transistor konstruktionsbedingten Parameter  $\tau_a$  folgt für die Anstiegszeit

$$t_a = \tau_a \ln \frac{m}{m-1}. \quad (6.18)$$

Ein hoher Übersteuerungsfaktor  $m$  verringert also die Anstiegszeit. Allerdings baut sich nach Durchsteuern des Transistors eine zusätzliche Speicherladung (Übersteuerungsladung)  $Q_S$  in der Basis auf. Danach befindet sich der Transistor im stationären Zustand des AP1.

**Speicherzeit  $t_s$ :** Nach dem Umschalten der Steuerspannung auf L muss zunächst die Speicherladung  $Q_S$  abgebaut werden, damit der Transistor den Übersteuerungsbereich verlassen kann. Dies geschieht durch den negativen Basisstrom  $I_{By}$ . Dabei bleiben Kollektorstrom und Basis-Emitterspannung unverändert. Mit dem Transistorparameter  $\tau_s$  ergibt sich für die Speicherzeit

$$t_s = \tau_s \ln \frac{k+m}{k+1} \quad (6.19)$$

mit dem Ausschaltfaktor  $k = \frac{-I_{By} B_N}{I_{C1}}. \quad (6.20)$

Ein großer Ausschaltfaktor beschleunigt die Entladung und verkürzt die Speicherzeit.

**Abfallzeit  $t_f$ :** Zum Übergang in den Sperrbereich ist die Diffusionsladung in der Basis abzubauen. Gleichzeitig verringert sich der Kollektorstrom. Die Abfallzeit berechnet sich nach

$$t_f = \tau_a \ln \frac{k+1}{k}. \quad (6.21)$$

Besonders ungünstig ist die Speicherzeit  $t_s$ , da sie den Ausschaltvorgang deutlich verzögert. Einer zu deutlichen Verringerung des Übersteuerungsfaktors  $m$  entgegen steht aber die Notwendigkeit der stabilen Einstellung des Arbeitspunktes AP1 und eine möglichst geringe Ausgangsspannung  $U_{CE1}$ .

Sind die Anforderungen an die Geschwindigkeit beim Umschalten in den gesperrten Zustand gering, kann auf den Widerstand  $R_E$  in Schaltung auf Abb. 6.34 verzichtet werden.

### Bipolarer Schottky-Transistor

Eine deutliche Verringerung der Speicherzeit wird durch Parallelschaltung einer Schottky-Diode zwischen Basis und Kollektor des Transistors erreicht. Sobald beim Durchsteuern des Transistors und damit verbundenem Absinken des Kollektorpotentials die Basis-Kollektorspannung die Flussspannung der Diode erreicht hat, wird diese niederohmig und leitet den Basisstrom größtenteils direkt auf den Kollektor. Hierdurch wird ein Überschwemmen der Basis mit Majoritätsladungsträgern verhindert, so dass diese beim nachfolgenden Sperren nicht ausgeräumt werden müssen. Das Sperren erfolgt wesentlich rascher. Der Zeitgewinn gestattet es, die ganze Schaltung hochohmiger auszuführen, was die Strom- und damit Leistungsaufnahme deutlich senkt. Schottky-Dioden (s. unter 6.2.6) haben den Vorteil einer gegenüber Si-pn-Dioden geringeren Flussspannung von 0,3V, wodurch die Übersteuerung klein gehalten werden kann.

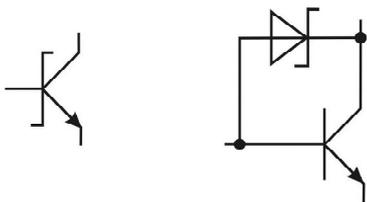


Abb. 6.35a Schaltsymbol und Ersatzschaltbild (rechts) des Schottky-Transistors

### 6.3.7. Logische Schaltungen mit Transistoren

Mit Transistorschaltern lassen sich vorteilhaft logische Schaltungen realisieren. In der Emitterschaltung ist bereits eine Grundfunktion gegeben – die Negation. Da mit Diodenschaltungen die logischen Funktionen OR, AND usw. erzeugt werden können, erhält man durch eine nachfolgende Emitterschaltung die Negation dieser Funktionen, also NOR, NAND, usw.

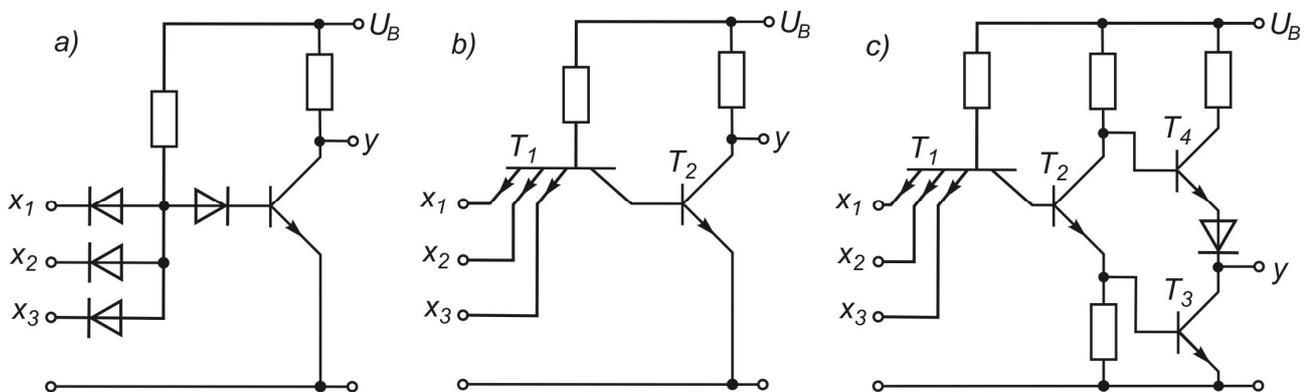


Abb. 6.36 NAND-Glied mit drei Eingängen  $y = \overline{x_1 \cap x_2 \cap x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3}$

- in Dioden-Transistor-Logik (DTL)
- in Transistor-Transistor-Logik (TTL)
- mit zusätzlicher Gegentaktendstufe

Ein Vorteil der Transistorlogik besteht in der zusätzlichen Verstärkung der Eingangssignale. In Abb.6.36 a) ist die vor der Basis des Transistors eingesetzte Diode logisch unwirksam, sorgt aber für die richtige Funktion des Transistors. Dioden werden oft verwendet, wenn eine Potentialdifferenz erzeugt werden soll, die nur wenig von der Stromstärke abhängt. Über eine in Flussrichtung betriebene Diode ist das die Flussspannung  $U_{F0}$  von 0,3V bzw. 0,7V für Germanium- bzw. Siliziumdioden. Liegt einer oder mehrere der Eingänge auf niedrigem (Null-) Potential, so würde an der Basis des Transistors eine Spannung  $U_{BE} = U_{F0}$  anliegen. Folglich sperrt der Transistor nicht sauber. Dieses Problem wird durch die davor geschaltete Diode behoben.

Im *Multi-Emittertransistor* T1 in Abb.6.36 b) sind die die AND-Verknüpfung bildenden Dioden durch drei parallele Basis-Emitterdioden ersetzt worden. Wenn der Transistor T2 durchgesteuert ist, wird der Ausgang niederohmig an das tiefe Potential gelegt. Bei sperrendem Transistor liegt der Ausgang jedoch hochohmig über dem Kollektorwiderstand am hohen Potential. Zur Realisierung eines niederohmigen Ausgangs auch für den H-Pegel wird die Schaltung noch durch eine Zwischenverstärkerstufe mit Gegentaktansteuerung für die Ausgangsstufe ergänzt, s. Abb. 6.36 c).

**Elektrische Daten:** Wesentliche elektrische Parameter der TTL-Schaltungen sind:

- Betriebsspannung +5V
- Eingangspegel Low:  $U_{eL} = 0V \dots +0,8V$   
High:  $U_{eH} = +2V \dots +5V$
- Ausgangspegel Low:  $U_{aL} = 0V \dots +0,4V$   
High:  $U_{aH} = +2,4V \dots +5V$

### 6.3.8. Kippstufen

Mit Kippstufe oder Multivibrator bezeichnet man elektronische Schaltungen, die sich in zwei Zuständen befinden, zwischen denen sie selbständig oder von außen gesteuert hin- und herschalten. Unter Verwendung von bipolaren Transistoren sind diese Zustände durch die jeweiligen Betriebsarten zweier wechselseitig gekoppelter Transistoren bestimmt, von denen jeweils einer sperrt und der andere leitet.

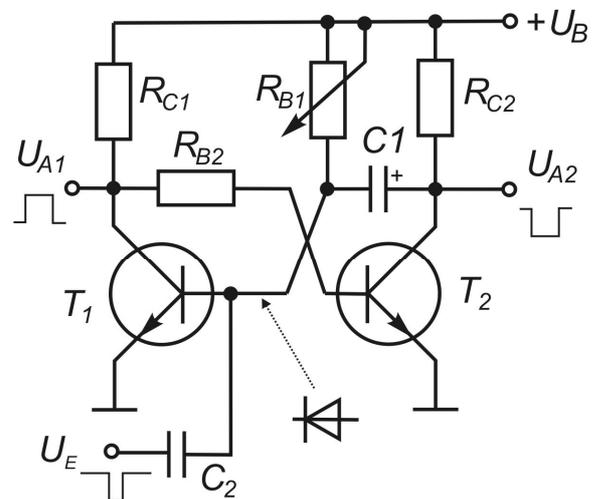
#### 6.3.8.1. Monostabiler Multivibrator (Monoflop, Univibrator)

Die monostabile Kippstufe hat nur einen stabilen Zustand, deshalb die Bezeichnung monostabil. Durch einen geeigneten äußeren Steuerimpuls ändert die Schaltung für eine gewisse Zeit den Schaltzustand, um dann wieder selbstständig in die Ruhelage zurückzukehren. Diese Zeit, die durch die Dimensionierung von Bauelementen der Schaltung bestimmt wird, kann zur Steuerung peripherer Baugruppen genutzt werden.

Abb. 6.37 Monostabile Kippstufe mit Bipolartransistoren

Diese Schaltung ist ein *nicht retriggerbares* Monoflop. *Retriggerbar* bedeutet, dass ein während der Haltezeit eintreffendes weiteres Steuersignal die interne Zeit erneut startet und der aktive Zustand entsprechend länger dauert. Ist das Monoflop nicht nachtriggerbar, hat ein Steuersignal während der Haltezeit keine Wirkung.

Im Ruhezustand ist T<sub>1</sub> leitend und T<sub>2</sub> sperrt. Ein negativer Impuls sperrt T<sub>1</sub>, Ausgang A<sub>1</sub> wird hoch gesetzt, T<sub>2</sub> wird leitend, wodurch Ausgang A<sub>2</sub> tiefes Potential erhält. Über den Widerstand R<sub>B1</sub> wird C<sub>1</sub> aufgeladen. Nach der Haltezeit t<sub>H</sub> steuert T<sub>1</sub> durch und T<sub>2</sub> sperrt. Dieser Zustand bleibt bis zum nächsten Steuersignal erhalten.

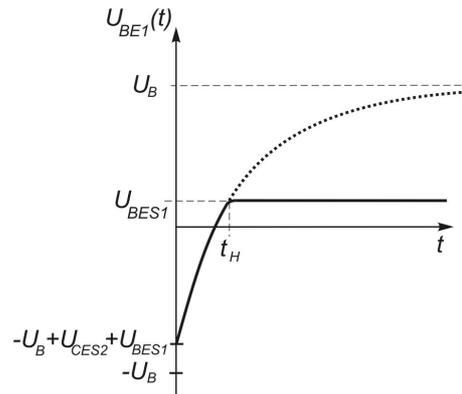


Im Ruhezustand sperrt T<sub>2</sub>, wohingegen T<sub>1</sub> leitet und somit über C<sub>1</sub> die Spannung  $U_B - U_{BE1}$  abfällt. Wenn T<sub>1</sub> durch einen negativen Impuls getriggert wird und sperrt, wird T<sub>2</sub> leitend, wodurch sich das Ausgangspotential  $U_{A2}$  auf den Wert  $U_{CES2}$  einstellt, also Low gesetzt wird. An der Basis von T<sub>1</sub> verringert sich in diesem Moment die Spannung um  $(U_B - U_{CES2})$  auf den Wert  $-U_B + U_{CES2} + U_{BE1}$ . Über R<sub>B1</sub> wird C<sub>1</sub> aufgeladen. Sobald das Potential an der Basis von T<sub>1</sub> soweit angestiegen ist, dass  $U_{BE1} = U_{BE1} \geq 0,7V$ , steuert der Transistor durch und T<sub>2</sub> sperrt nach der Haltezeit t<sub>H</sub>. Der Spannungsanstieg  $U_{A2}(t)$  wird durch die Aufladung von C<sub>1</sub> über R<sub>C2</sub> kontrolliert und erfolgt näherungsweise mit der Zeitkonstanten  $\tau = R_{C2} \cdot C_1$  nach der Beziehung  $U_{A2}(t) \approx U_B (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

Wenn  $T_2$  beim Triggerimpuls durchsteuert, wird  $U_{BE1}$  negativ in der Größenordnung  $-U_B$ . Bei Bipolartransistoren darf dieser Wert in der Regel 5V nicht überschreiten. Zum Schutz des Transistors wird deshalb bei höheren Betriebsspannungen eine Diode vor den Eingang von  $T_1$  geschaltet.

Abb. 6.38 Zeitverhalten von  $U_{BE1}$  nach Triggerung

Der Zeitverlauf der Spannung an einem Kondensator während des Aufladeprozesses über einen Widerstand wurde in 4.1.1. behandelt. Abweichend davon hat die Anfangsspannung nicht den Wert  $U(0) = 0$ , sondern  $U_{BE1}(0) = -U_B + U_{CES2} + U_{BES1}$  mit der Ladespannung  $+U_B$ . Der gestrichelt dargestellte Verlauf dient nur zur Veranschaulichung und wird nicht realisiert, da bei Erreichen von  $U_{BES1}$  der Transistor durchsteuert.



Unter Annahme der Abbruchbedingung für die Haltedauer  $U_{BE1}(t_H) = U_{BES1}$  berechnet man für  $U_{BE1}(t) = U_B - (2U_B - U_{BES1} - U_{CES2}) \exp(-t / R_{B1} C_1)$  eine Haltedauer von

$$t_H = R_{B1} C_1 \ln \frac{2U_B - U_{BES1} - U_{CES2}}{U_B - U_{BES1}}$$

Sind die Sättigungsspannungen ( $U_{CES2} \approx 0,2V$ ;  $U_{BES1} \approx 0,6V$ ) klein gegen die Betriebsspannung  $U_B$ , so ergibt sich als Näherungswert für die Haltezeit

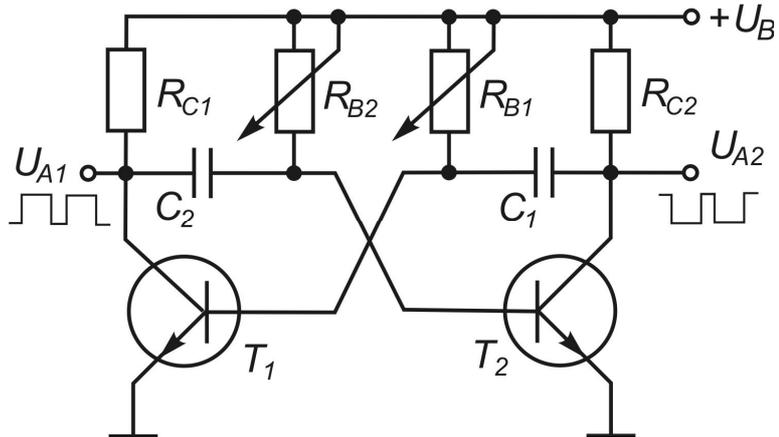
$$t_H \approx R_{B1} C_1 \ln 2. \tag{6.22}$$

### 6.3.8.2. Astabiler Multivibrator

Der astabile Multivibrator hat keinen stabilen Zustand. Die beiden miteinander gekoppelten Transistoren schalten wechselseitig zwischen leitendem und sperrendem Zustand hin und her. Auch hierbei werden die Schaltzeiten durch RC-Glieder bestimmt. Astabile Multivibratoren finden somit als Taktgeber Verwendung. Durch Anschluss eines Piezoschwingers erhält man eine einfache akustische Signalquelle.

Abb. 6.39 Astabile Kippstufe mit Bipolartransistoren

Im Vergleich mit dem Monoflop sind beide Transistoren kapazitiv an den Kollektor des Partners gekoppelt. Die Kollektorwiderstände  $R_C$  begrenzen den maximalen Kollektorstrom und sind klein gegen die Basiswiderstände  $R_B$ , die für einen ausreichenden Basisstrom zur Durchsteuerung des jeweils leitenden Transistors sorgen.



Nach Einschalten der Betriebsspannung fließen Basisströme. Einer der Transistoren wird zuerst leitend und zieht die Spannung am Kollektor auf einen Wert von ca. 0,2V. Dieser Ausgang liegt somit tief. Welcher der Transistoren zuerst leitfähig wird, hängt von den aktuellen Bauteilwerten ab. Nehmen wir an, es sei  $T_1$ . Basisstrom fließt über den sich dadurch aufladenden Kondensator  $C_1$  und über  $R_{B1}$ . Dieser Widerstand sorgt für einen ausreichend hohen Basisstrom, auch nachdem sich  $C_1$  voll auf eine Potentialdifferenz  $U_B - U_{BES1}$  aufgeladen hat. Im Augenblick des Durchsteuerns von  $T_1$  sinkt dessen Ausgangsspannung  $U_{A1}$  von  $U_B$  auf  $U_{CES1} \approx 0,2V$ . Um die Differenz  $U_B - U_{CES1}$  wird die Basissspannung  $U_{BES2}$  von  $T_2$  verringert (auf einen Wert deutlich unter Null), wodurch der Transistor weiter sperrt. Im folgenden Zeitintervall wird  $C_2$  über  $R_{B2}$  aufgeladen, bis die Spannung an der Basis von  $T_2$  einen Wert von  $U_{BES2} \approx 0,6V$  erreicht und den Transistor durchsteuert.  $C_1$  wurde zwischenzeitlich durch  $R_{C2}$  auf eine Spannung  $U_B - U_{BES1}$  aufgeladen. Im Moment des Durchsteuerns von  $T_2$  verringert sich die Ausgangsspannung  $U_{A2}$  von  $U_B$  auf  $U_{CES2} \approx 0,2V$ .

Die Spannung  $U_{\text{BES1}}$  an der Basis von  $T_1$  verringert sich auf  $-U_B + U_{\text{BES1}} - U_{\text{CES2}}$ , wird also negativ und  $T_1$  sperrt. Analog wiederholt sich dieser Vorgang, so dass beide Transistoren abwechselnd sperren und leiten.

Der Spannungsanstieg  $U_{A2}(t)$  wird durch die Aufladung von  $C_1$  über  $R_{C2}$  kontrolliert und erfolgt näherungsweise mit der Zeitkonstanten  $\tau = R_{C2} \cdot C_1$ .

Analoges gilt für die Impulsvorderseite von  $U_{A1}(t)$ .

Eine ganz analoge Betrachtung wie bei der Berechnung der Haltezeit des Monoflop führt hier zu einer Näherungsformel für die Haltezeiten der beiden Schaltphasen von  $t_{\text{H1,2}} \approx \ln 2 R_{\text{B1,2}} C_{1,2}$ .

Die Schaltfrequenz eines astabilen Multivibrators berechnet sich somit aus

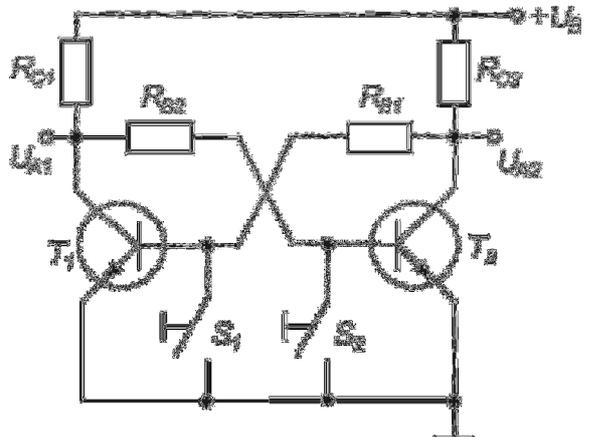
$$f \approx \frac{1}{\ln 2 \cdot (R_{\text{B1}} C_1 + R_{\text{B2}} C_2)}. \quad (6.23)$$

### 6.3.8.1. Bistabiler Multivibrator (Flipflop)

Der bistabile Multivibrator hat zwei stabile Einstellungen. Durch eine kurzzeitige äußere Störung durch einen positiven oder ggf. negativen Spannungsimpuls kippt die Schaltung in die jeweils andere Ruhelage.

Abb. 6.40 Bistabile Kippstufe mit Bipolartransistoren  
Beim Flipflop sind beide Transistoren galvanisch miteinander gekoppelt. Bei Einschalten der Betriebsspannung steigt bei beiden zunächst noch sperrenden Transistoren die Basisspannung an. Der zuerst durchsteuernde Transistor beispielsweise  $T_1$ , sperrt über die Gegenkopplung sofort den anderen Transistor. Beide Transistoren behalten diesen Zustand bei.

Wird an die Basis des leitenden Transistors  $T_1$  eine negative Spannung gelegt, das geschieht hier durch Tastendruck, sperrt  $T_1$  und  $T_2$  steuert durch.

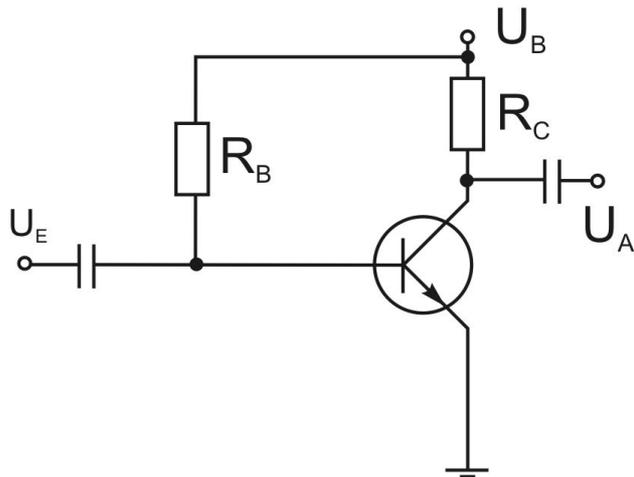


Um einen speziellen Transistor bei Inbetriebnahme durchzusteuern, muss nur dafür gesorgt werden, dass er schneller in diese Betriebsart gelangt. Dieses wird einfach durch die Verringerung des Basisvorwiderstandes erreicht. Soll die Schaltung mit  $T_1$  durchgesteuert starten, muss folglich  $R_{\text{B1}} < R_{\text{B2}}$ . Dann ist  $A_1$  tief und  $A_2$  hoch.

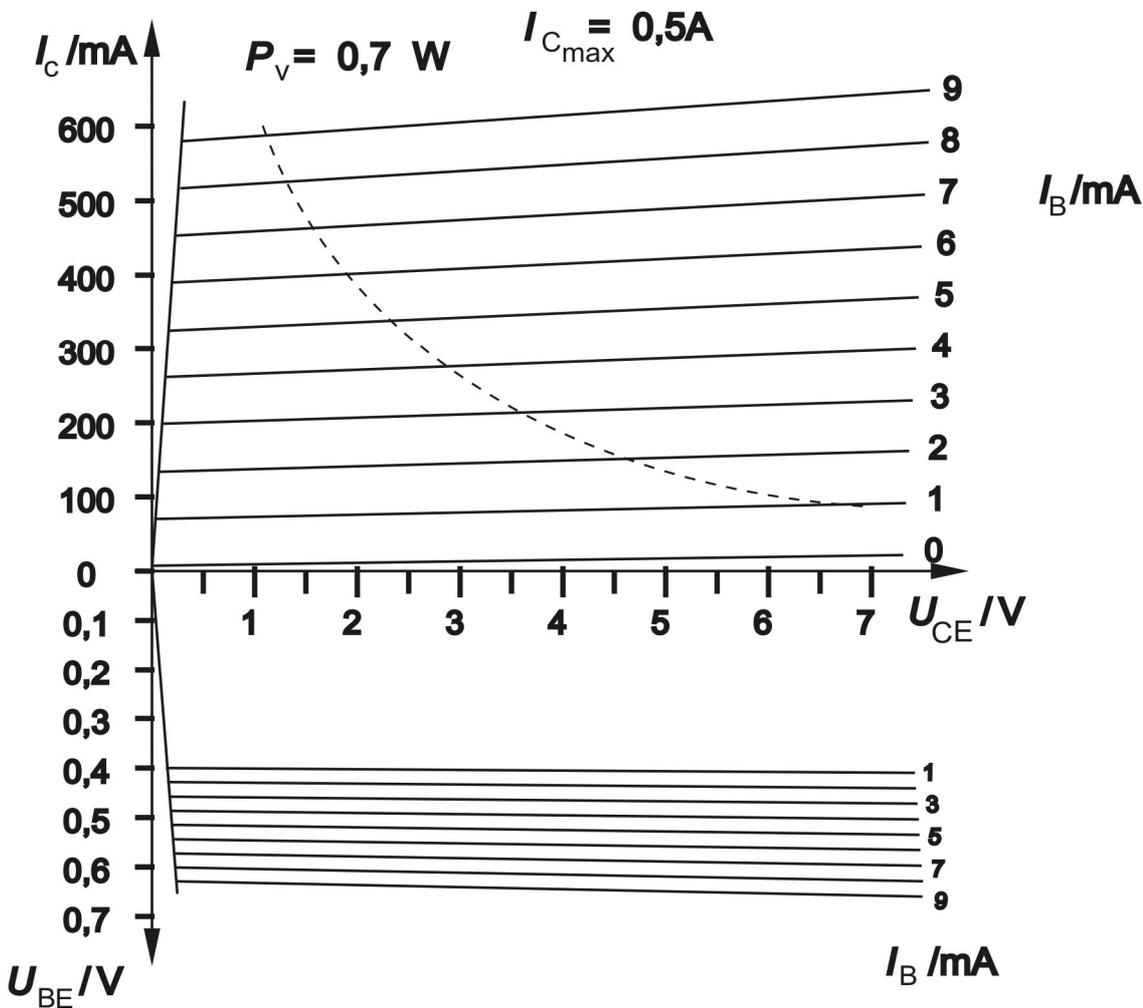
Da zwei stabile Schalterstellungen eingenommen werden, stellt der Flipflop einen 1bit-Speicher mit einem zusätzlichen invertierten Ausgang dar.

**Übungen**

6.8. Unter Verwendung eines npn-Transistors soll nach der abgebildeten Schaltung ein NF-Verstärker aufgebaut werden. Die Betriebsspannung beträgt  $U_B = 7,5\text{ V}$ , der Ausgangswiderstand der Signalquelle ist vernachlässigbar klein.



- Bestimmen Sie die Größe des Kollektorwiderstandes in Hinblick auf maximal mögliche Verstärkung! Tragen Sie die Arbeitsgerade in das Kennlinienfeld ein und kennzeichnen Sie die optimale Lage des Arbeitspunktes im Leerlauf (kein NF-Signal) sowie bei kleinen Aussteuerungen!
- Welchen Wert muss der Basisvorwiderstand haben, damit der Arbeitspunkt optimal eingestellt ist?
- Berechnen Sie die Werte für Strom- und Spannungsverstärkung mit Hilfe des Kennlinienfeldes.



**6.9.** Es soll eine Verstärkerschaltung dimensioniert werden, die als Treiberstufe Steuersignale einer elektronischen Schaltung ( $L: I_B = 0, U_{BE} = 0$ ;  $H: I_B = \hat{I}, U_{BE} = \hat{U}$ ) für die Ansteuerung eines mechanischen Relais (Türöffner) auswertet (s. Abb. 1). Das Relais benötigt zum Betrieb einen Strom von  $0,5\text{ A}$  und hat einen Widerstand  $R_R = 2\ \Omega$ . Als Betriebsspannung stehen  $5\text{ V}$  zur Verfügung. Bestimmen Sie die Größe des Kollektorzustandes  $R_C$  unter Verwendung der Transistordaten und der Kennlinien in Abb. 2!

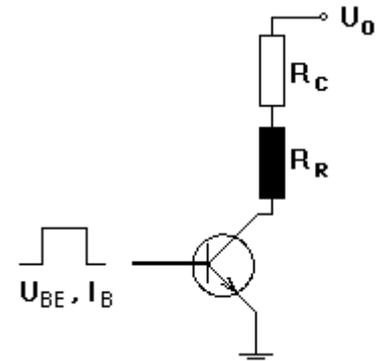
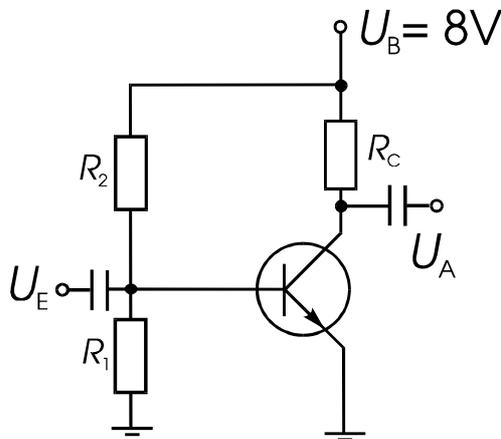


Abb. 1 Verstärkerschaltung

a) Zeichnen Sie die Widerstandsgerade in das Kennlinienfeld ein und kennzeichnen Sie die beiden Lagen des Arbeitspunktes, bei dem das Relais "zieht" bzw. in Ruhestellung ist!

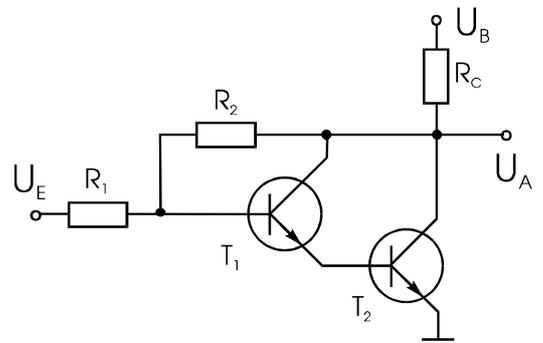
b) Welche Anforderungen an die Eingangsgrößen  $\hat{I}$  und  $\hat{U}$  müssen erfüllt sein?

c) Bei der praktischen Erprobung dieser Schaltungsanordnung könnte es evtl. passieren, dass beim Umschalten des Transistors vom leitenden in den gesperrten Zustand der Transistor plötzlich zerstört wird. Welche Erklärung haben sie dafür, wie könnte man dem vorbeugen?!

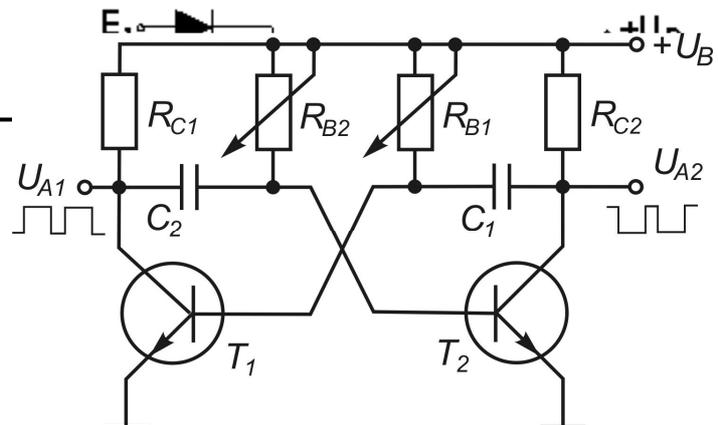
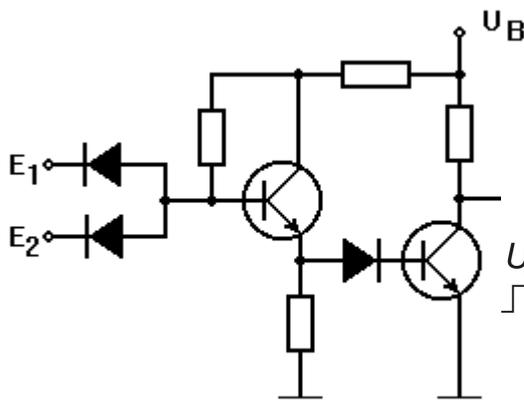


**6.10\*.** Nebenstehend ist eine Verstärkerschaltung dargestellt. Die Basisspannung wird hierbei durch einen sogenannten Basisspannungsteiler eingestellt. Dimensionieren Sie unter Verwendung des Kennlinienfeldes s.o. die Schaltung (Berechnung der Widerstände) und bestimmen Sie die Spannungs- und Stromverstärkung des Verstärkers im quasistationären Betrieb! *Hinweis:* Der Querstrom über den (unbelasteten) Basisspannungsteiler soll etwa das 10fache des Basisstromes im stationären Arbeitspunkt betragen.

**6.11.** Nebenstehend ist eine Verstärkerschaltung dargestellt. Charakterisieren Sie den Schaltungsaufbau (wozu dienen  $R_1, R_2$  und die Verknüpfung beider Transistoren)! Wie groß ist die Spannungsverstärkung des Verstärkers im quasistationären Betrieb?



**6.12.** Kennzeichnen Sie die logischen Funktionen einzelner Baugruppen und geben Sie für die logischen Schaltungen die logischen Funktionen an oder die Schalttabellen!



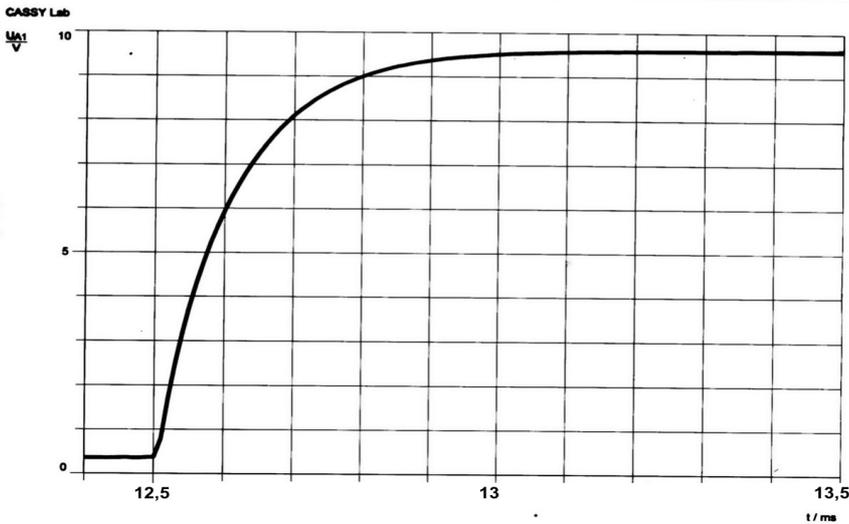
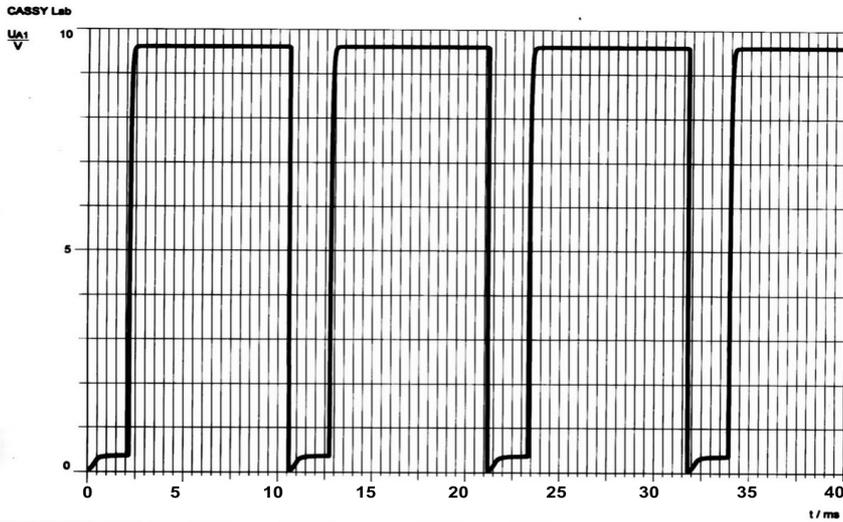
**6.13.\*** Ein astabiler Multivibrator wurde nach nebenstehender Schaltung

(s. Abb.6.39) aufgebaut. Eine Messung der Ausgangsspannung  $U_{A1}$  liefert die dargestellte Zeitabhängigkeit (s. Grafik).

a) Bestimmen Sie aus der Grafik die Werte der veränderlichen Widerstände  $R_{B1}$  und  $R_{B2}$ , sowie die Zeitkonstante  $\tau$  für den Impulsanstieg von  $U_{A1}(t)$ .

b) Welchen Wert hat der Widerstand  $R_{C1}$  in der gekennzeichneten RC-Kombination? Zur besseren Auswertung ist in einer zweiten Grafik ein Ausschnitt  $U_{A1}(t)$  zeitlich gedehnt dargestellt.

Geg.:  $C_1 = C_2 = 35\text{nF}$



## 6.4. Feldeffekttransistoren (FET)

Prinzipiell für FET ist die Steuerung der Leitfähigkeit oder des Querschnitts eines elektrischen Kanals parallel zur Oberfläche durch das elektrische Feld einer Steuerelektrode. Der Ladungstransport erfolgt durch Ladungsträger eines Typs. Die Steuerelektrode ist gegenüber dem Kanal isoliert. Man unterscheidet die Isolation durch ein Dielektrikum (MISFET, MOSFET, IGFET) oder durch einen gesperrten pn-Übergang bzw. Schottky-Übergang (SFET, JFET, MESFET)

### 6.4.1. MOSFET

Das Wirkprinzip dieser Feldeffekttransistoren beruht auf der in Abb. 6.41 dargestellten Anordnung. Auf der Oberfläche eines dotierten Halbleiters ist eine dünne Schicht eines Isolators aufgebracht, deren äußere Oberfläche durch aufgedampftes Metall leitfähig ist.

Abb. 6.41 eindimensionales Modell der Metall-Isolator-Halbleiter-(MIS-) Struktur eines  $p$ -dotierten Halbleiters

a) Querschnitt mit Ladungsverteilungen.

Die Metallelektrode ist gegenüber dem Halbleiter positiv vorgespannt. Es kommt an dessen Oberfläche zur Anreicherung von Elektronen und Verarmung an Löchern. Feldlinien enden dort an negativen Überschussladungen (Elektronen bzw. Akzeptorionen).

b) Das Diagramm stellt die Ortsabhängigkeit der Dielektrischen Verschiebung  $D_x(x)$  dar, deren Feldlinien in a) durch Pfeile verdeutlicht sind. Die relative Permittivität  $\varepsilon$  von Isolator und Halbleiter ist unterschiedlich.  $D_x(x)$  ergibt sich aus der Ladungsträgerdichte  $\rho(x)$  unter Anwendung des Gaußschen Satzes (Glg. 1.12).

c) Potentialverlauf  $\varphi(x) = -\int E_x dx$  der MIS-Struktur

Der Knick bei  $x=0$  hat seine Ursache in unterschiedlichen Werten  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_s$  von Isolator bzw. Halbleiter.

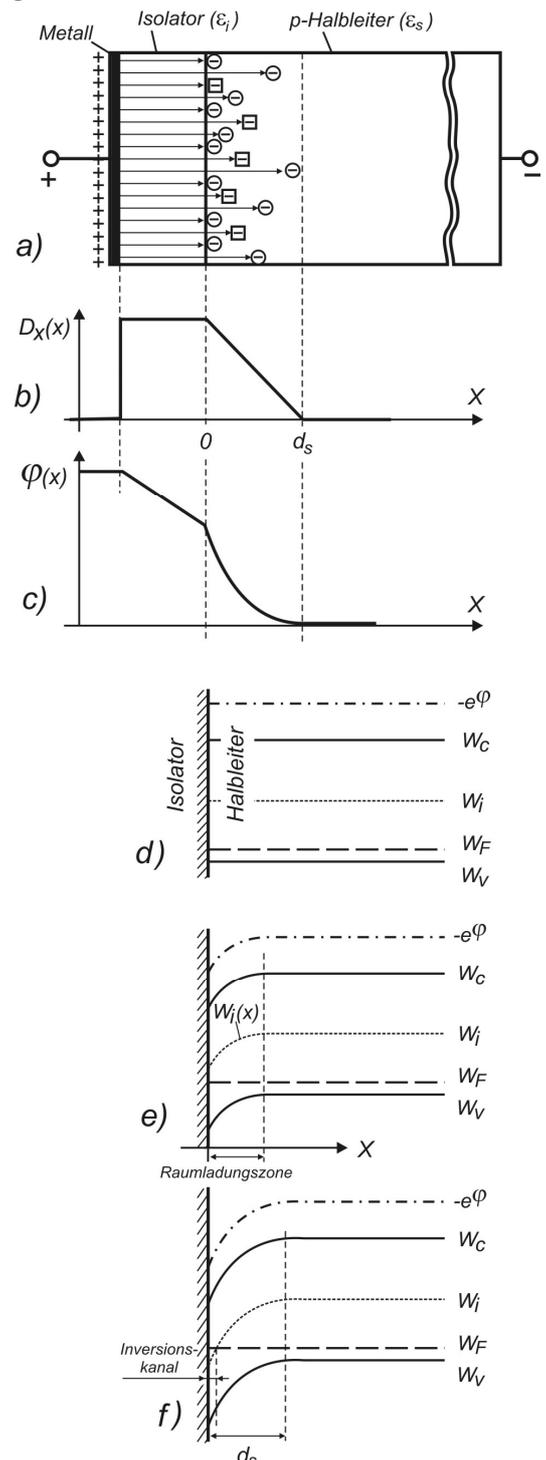
Durch die angelegte Spannung werden sowohl auf der Metallelektrode als auch auf der Oberfläche des Halbleiters Ladungen beeinflusst. Das sind beim Halbleiter die Elektronen, also Minoritätsträger, die sich infolge der elektrostatischen Feldkraft  $F_x = -eE_x$  in einer Schicht der Dicke  $d_s$  (Raumladungszone) ansammeln. Außerhalb dieser Schicht (rechts davon) ist die Feldstärke Null und das Potential konstant.

d) Bändermodell des Halbleiters ohne äußere Spannung, ohne Störung durch die Oberfläche. Der Verlauf der Bandkanten sowie der Vakuumenergie hänge nicht vom Abstand zur Oberfläche ab (Flachbandverlauf).

e) Bändermodell bei angelegter Spannung

Die äußere Spannung führt zu Potentialdifferenzen  $\varphi(x)$  innerhalb dieser Struktur und beeinflusst dadurch die Vakuumenergie  $-e\varphi$  im Bereich der Raumladungszone. Die Bandkanten folgen dem Verlauf der Vakuumenergie. Im thermodynamischen Gleichgewicht (Ladungen fließen nicht mehr) verläuft die Fermi-Energie  $W_F$  horizontal.

f) Ist die angelegte Potentialdifferenz ausreichend hoch, entsteht an der Oberfläche ein *Inversionskanal*. Dort überwiegen folglich die Minoritätsträger und es gilt  $n > p$ .



Der Isolator zwischen dem Halbleiter und der Steuerelektrode (Gate) kann  $\text{Si}_3\text{N}_4$  sein oder ein Metalloxid (z.B.  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), man bezeichnet dann den MISFET auch als MOSFET. Feldeffekttransistoren werden nach der Planartechnologie hergestellt. Die Isolierschicht kann z.B. durch Oxidation des Siliziums erzeugt werden. Als Gateelektrode wird meist Aluminium aufgedampft oder/und polykristallines Silizium verwendet.

Erste Patente zum Prinzip des Feldeffektes stammen bereits aus den Zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts. Praktische Anwendung fanden Feldeffekttransistoren erst mit Beherrschung der Siliziumtechnologie etwa ab 1962. Prinzipiell ist bei allen FET-Typen die Steuerung eines leitfähigen Kanals, der durch eine Raumladungszone gebildet wird. Im Unterschied zu den Bipolartransistoren, bei denen stets sowohl Minoritäts- als auch Majoritätsladungsträger am Stromfluss beteiligt sind, wird der Ladungstransport bei Feldeffekttransistoren stets nur durch einen Ladungsträgertyp realisiert. Deshalb werden FET auch als *unipolare* Transistoren bezeichnet.

### 6.4.1.1. Wirkprinzipien verschiedener Typen

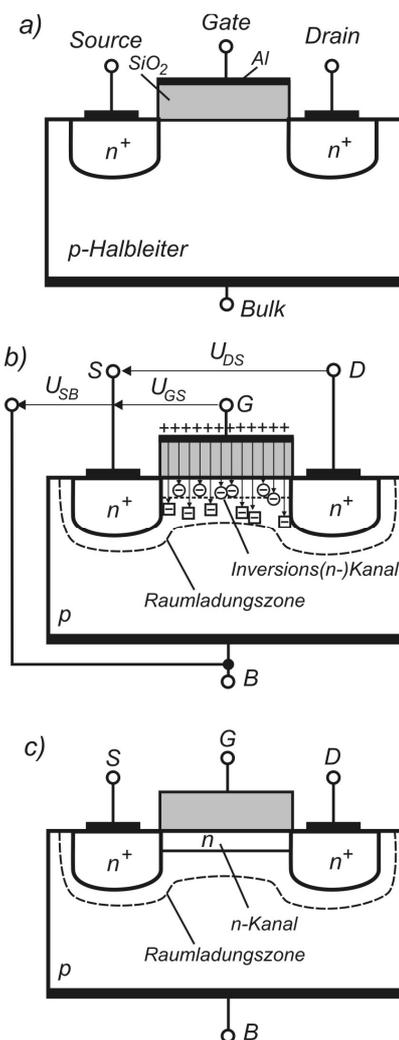
Abb. 6.42 MIS-Feldeffekttransistor

a) Querschnitt durch einen n-Kanal-MISFET

Auf einem Plättchen p-dotierten Siliziums werden in unmittelbarer Nachbarschaft des durch eine  $\text{SiO}_2$ -Schicht (neuartig: Hafniumoxid  $\text{HfO}$ ,  $\text{HfO}_2$ ) vom Substrat (Bulk) isolierten Gate zwei gut leitfähige hoch  $n^+$ -dotierte Inseln mit den Anschlüssen Source (Quelle) und Drain (Senke) eindiffundiert. Bezüglich dieser Anschlüsse ist der FET symmetrisch. Infolge der sich ausbildenden pn-Übergänge sind zunächst alle Kontakte voneinander isoliert.

b) Bereits bei  $U_{GB}=0$  liegt wegen der unterschiedlichen Austrittsarbeiten von Isolator und Halbleitermaterial ein elektrisches Feld zwischen Gate und HL. Die Materialien werden so gewählt, dass dieses Feld zur Verarmung der HL-Oberfläche an Löchern führt (vergl. Kap. 5.4.4.5). Bei positiver Steuerspannung  $U_{GS}$  steigt die Feldstärke weiter an. Es entsteht schließlich durch Anreicherung von Minoritätsladungsträgern (hier Elektronen) ein n-leitender *Inversionskanal* als niederohmige Verbindung zwischen Drain und Source. Der Feldeffekttransistor ist durchgesteuert. Da der leitfähige Zustand durch Anreicherung von hier negativen beweglichen Ladungsträgern in der Randschicht entsteht, bezeichnet man diesen Transistortyp als *Anreicherungs-* oder *Enhancement-FET*.

c) Hier ist eine dünne n-dotierte Halbleiterschicht unter dem Isolator eindiffundiert. Somit sind ohne Gatespannung Source und Drain leitfähig miteinander verbunden. Dieser Transistor ist *selbstleitend*. Bei negativer Gatespannung werden Elektronen aus dem Kanal verdrängt und Löcher angezogen. Der Kanal verengt sich, sein Ohmscher Widerstand steigt, bis schließlich der Kanal völlig abschnürt und der Transistor sperrt. Man nennt diesen Typ *Verarmungs-* oder *Depletion-FET*.



Da der FET symmetrisch ist, bestimmt die Richtung der angelegten Spannung welcher der Anschlüsse als Source bzw. Drain fungiert. Ist wie in Abb.6.42b  $U_{DS} > 0$ , wandern Elektronen von *S* durch den Inversionskanal nach *D*. Bei umgekehrter Potentialdifferenz sind die Bezeichnungen *S* und *D* zu vertauschen.

Ganz analog aufgebaut sind *p-Kanal-Enhancement-* sowie *p-Kanal-Depletion-FET* aufgebaut. Die Dotierung ist dabei jeweils komplementär. Der *p-Kanal-Enhancement-FET* hat stark p-dotierte Source- und Drain-Bereiche auf n-leitendem Substrat. Negative Gatespannung erzeugt einen p-Kanal und der Transistor steuert durch.

**6.4.1.2. Kennlinien**

Der leitfähige Kanal eines n-Kanal-Enhancement-FET entsteht erst bei Überschreiten einer positiven Schwellenspannung  $U_{GS} \geq U_{tE}$ . Hierbei ist  $U_{tE}$  die Schwellenspannung des n-Kanal-Enhancement-FET. Als effektive Steuerspannung  $U_{GSE}$  bezeichnet man den die Schwellenspannung übersteigenden Teil der Steuerspannung  $U_{GSE} = U_{GS} - U_{tE}$ . Solange gilt  $U_{GSE} > U_{DS}$  hat der Kanal einen über seine Länge gleichbleibenden Querschnitt. In diesem Bereich verhält sich der Kanal annähernd wie ein Ohmscher Widerstand  $R_{DS}$  und es gilt  $U_{GSE} \sim I_D$ . Der Drainstrom wird somit durch die Gatespannung gesteuert. Eine genauere Betrachtung liefert die folgende Beziehung (s. z.B. Koß/Reinhold):

$$J_D = \underbrace{\beta(2U_{GSE} U_{DS} - U_{DS}^2)}_{\hat{=} R_{DS}}, \tag{6.24}$$

mit  $\beta = \frac{\mu_n \epsilon_{ox} b}{2L d_{ox}}$ , wobei  $\mu_n$  - Beweglichkeit

- $\epsilon_{ox}$  -  $\epsilon$  des Isolators
- $d_{ox}$  - Dicke des Isolators
- $L$  - Länge des Kanals
- $b$  - Breite des Kanals

Aufgrund der in etwa linearen Abhängigkeit des Drainstroms von der Gatespannung wird der Gültigkeitsbereich der Beziehung (6.24) als linearer Betriebsbereich oder *Triodenbereich* (TB) bezeichnet.

Ist die Drainspannung nicht mehr klein gegenüber der Gatespannung, ist die Richtung der Feldstärke nicht mehr senkrecht zur Oberfläche des Isolators. Die Raumladungszone um den Drainanschluss vergrößert sich zunehmend. Im Bereich  $U_{DS} \geq U_{GSE} > 0$  wird der Kanal stark unsymmetrisch. Die Ladungsträgerdichte in der Nähe des Drain verringert sich, somit verringert sich auch der Querschnitt des Kanals beim Drain (sog. *pinch off*). Der Widerstand des Kanals vergrößert sich dementsprechend mit wachsender Drain-source-Spannung, so dass der Kanalstrom etwa konstant bleibt. Im *pinch off-Bereich* oder *Pentodenbereich* ergibt die quantitative Beschreibung der Kennlinie eine quadratische Abhängigkeit von der effektiven Gatespannung

$$J_D = \beta \cdot U_{GSE}^2 \tag{6.25}$$

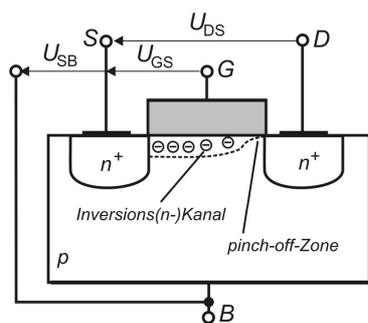


Abb. 6.43 pinch-off-Zustand des MOSFET

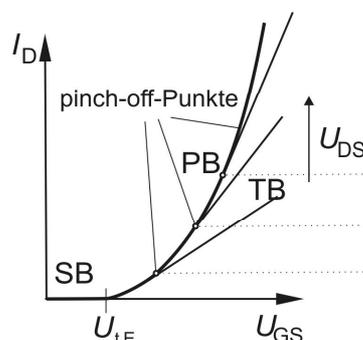
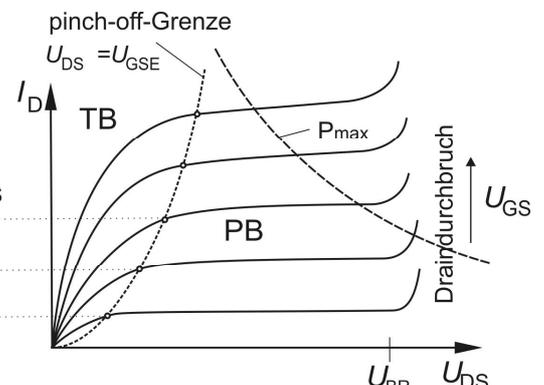


Abb. 6.44 Kennlinien eines MOSFET vom Enhancement-Typ  
a) Transferkennlinie b) Ausgangskennlinie



Auf Abb.6.43 ist die Einschnürung des n-Kanals dargestellt. Im Bereich  $U_{DS} \geq U_{GSE} > 0$  führt eine weitere Erhöhung der Drainspannung nicht mehr zu einem adäquat wachsenden Drainstrom, da der Widerstand des Kanals durch Einschnürung wächst. Der Drainstrom bleibt bezüglich Drainspannung etwa konstant (Pentodenbereich, Bereich rechts von der pinch-off-Grenze in 6.44 b). Der Drainstrom wächst aber in diesem Bereich etwa quadratisch mit der effektiven Gatespannung  $U_{GSE}$  (Glg. 6.25; dicke Kennlinie auf 6.44 a). Bei wachsender Gatespannung wird der Verlauf der quadratischen Kennlinie am *pinch-off-Punkt* bei  $U_{GSE} = U_{DS}$  (s.Abb. 6.44 a) verlassen und verläuft weiter annähernd linear laut Glg. 6.24. (Triodenbereich). Die maximale Verlustleistung  $P_{max}$  darf nicht überschritten werden (Kühlmaßnahmen beachten!). Bei Überschreiten einer maximal zulässigen Drainspannung  $U_{BR}$  bewirkt das starke Feld in Kanalrichtung eine Lawinenvervielfachung der beweglichen Ladungsträger, verbunden mit einem starken Anstieg des Drainstromes. Die Durchbruchspannung  $U_{BR}$  sinkt mit wachsender Gatespannung und verläuft flacher. Im Bereich  $U_{GS} \leq 0$  bzw.  $U_{GS} \leq U_{iE}$  fließt kein Drainstrom, der Transistor sperrt (SB).

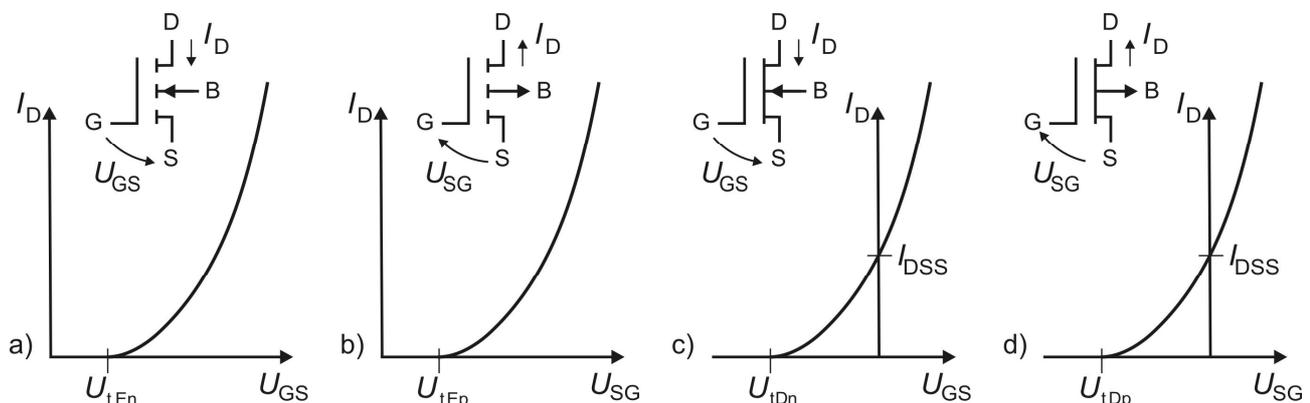


Abb. 6.45 Transferkennlinien und Schaltzeichen der verschiedenen Typen von MOSFET

a) n-Enhancement-Typ b) p-Enhancement-Typ c) n-Depletion-Typ d) p-Depletion-Typ

$U_t$  bezeichnet die Gate-Schwelspannungen bei deren Überschreiten der Drainstrom einsetzt. Bei den E-Typen sind diese Spannungen positiv, bei den D-Typen negativ.  $I_{DSS}$  bezeichnet den Sättigungsstrom bei D-Typen, wenn die Gatespannung gleich Null ist.

### 6.4.1.3. V-MOSFET

Bei der in Abb.6.42 gezeigten Bauweise verläuft der Kanal parallel zur Oberfläche des Substrats. Im eingeschalteten Zustand ist der Widerstand des Kanals relativ hoch, da dieser von der Kanallänge abhängt. Sollen hohe Leistungen geschaltet werden, muss der Kanalwiderstand möglichst gering gehalten werden. Dies gelingt in vorzüglicher Weise durch die in Abb. 6.46 dargestellte Anordnung eines n-Kanal-VMOS. Bei dieser Technologie verläuft der leitfähige Kanal nahezu senkrecht zur Chip-Oberfläche, an den Flanken einer durch das Dotierungsprofil hindurch geätzten Grube entlang. In dieser liegt eine durch eine dünne  $SiO_2$  Schicht isolierte eingebettete Gate-Elektrode. Der Drain-Kontakt befindet sich auf der gegenüberliegenden Seite des Substrats. Der Kanal hat nur die Länge der p-Schichtdicke, ist also sehr niederohmig. Außerdem sind durch die geringeren Kapazitäten zwischen den Elektroden kürzere Schaltzeiten im einstelligen ns-Bereich möglich und damit eine höhere Grenzfrequenz.

In der Praxis werden diese Strukturen auf der Oberfläche eines Chips zellenförmig dicht an dicht gepackt und parallel geschaltet. Diese Anordnungen können schachbrettartig oder hexagonal sein (z.B. Markennamen SIPMOS und HEXFET). Durch die Parallelschaltung kann eine größere Chipfläche genutzt werden, der Gesamtwiderstand ist entsprechend gering. Schaltleistungen bis in den kW-Bereich sind dadurch realisierbar.

Der Vorteil gegenüber herkömmlichen MOSFET liegt im geringeren Widerstand des durchgesteuerten Zustandes, deutlich größerer Maximalstromstärke bei ähnlich geringem Eigenrauschen, gutem HF-Verhalten und hohem Eingangswiderstand. Hierdurch eröffnen sich Anwendungen für geregelte Gleichspannungsquellen, Ansteuerungen für Schrittmotoren, Leistungsverstärker.

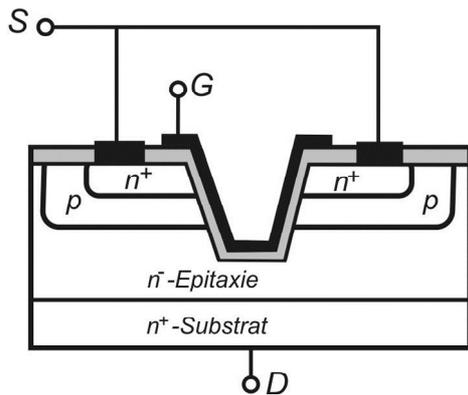


Abb. 6.46 Struktur eines VMOS-Transistors

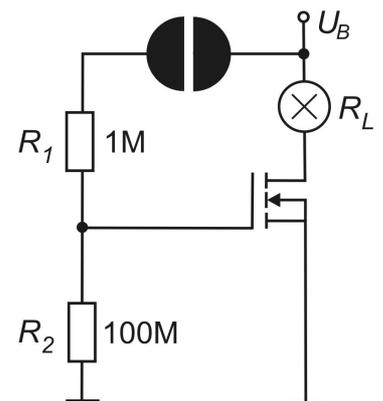
VMOS-Transistoren sind vom n-Enhancement-Typ. Durch die höheren Beweglichkeiten der Elektronen gegenüber Löchern werden höhere Grenzfrequenzen erreicht. Der n-Kanal bildet sich an beiden Flanken des V-förmigen Einschnitts heraus, ist somit von geringer Länge, weist folglich geringe Kapazität und geringen Widerstand auf. Die Drain-Region ist schwach dotiert, wodurch eine höhere Durchschlagsfestigkeit erreicht wird.

Nutzbarer Betriebsbereich von MOSFET:

- Beim Überschreiten einer kritischen Feldstärke von  $E_{krit} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/cm}$  wird durch Gatedurchbruch das Bauelement zerstört. Die maximal zulässige Gatespannung darf deshalb nicht überschritten werden. Infolge der guten Isolation des Gates führen bereits geringe Ladungsmengen infolge elektrostatischer Aufladung zur Zerstörung des Transistors. Zum Schutz werden deshalb FET und diverse Schaltkreise in elektrisch leitfähiger Folie verpackt. Es sind bestimmte Regeln beim Einbau zu beachten. Ein weiterer Schutz vor Gatedurchschlag wird konstruktiv dadurch erreicht, dass bei Eingangstransistoren von MOS-Schaltkreisen parallel zum Gate Z-Dioden geschaltet werden.
- Beim Überschreiten der Durchbruchspannung  $U_{DS} > U_{BR}$  erfolgt Lawinendurchbruch, der Drainstrom steigt stark an und damit auch die Verlustleistung
- Die maximal zulässige Verlustleistung darf nicht dauerhaft überschritten werden. Auf geeignete Kühlung ist zu achten.

Abb. 6.47 Vorlesungsversuch „Berührungsempfindlicher Schalter“

Als Schalter dient ein selbstsperrender MOSFET. Der Lastwiderstand wird durch eine Glühlampe realisiert. Im Ruhezustand ist der Schalter offen, der MOSFET sperrt, die Lampe ist dunkel. Die beiden Halbkreisflächen bilden den Berührungskontakt aus zwei metallischen Oberflächen (im Versuch die Beschichtung einer Leiterplatte). Berührt man die Fläche, wird der Leiter überbrückt, es fließt ein sehr kleiner Strom, der über den großen Widerstand  $R_2$  eine Spannung nahe der Betriebsspannung  $U_B$  abfallen lässt. Der Transistor steuert durch, der Drainstrom lässt die Lampe aufleuchten. Nach der Berührung sorgt  $R_2$  dafür, dass das Gate auf Massepotential gelegt wird und der Transistor sperrt. Die Lampe verlöscht wieder. Schon leichtes Anhauchen aktiviert den Schalter durch an der Oberfläche niedergeschlagene Atemluftfeuchtigkeit. Verdunstet diese, öffnet der Schalter nach einigen Sekunden wieder.



## 6.4.2. Sperrschicht-FET (SFET)

### 6.4.2.1. Wirkprinzipien

Bei Sperrschicht-Feldeffekttransistoren erfolgt die Isolation nicht durch ein Dielektrikum wie bei MOSFET, sondern durch die Raumladungszone eines gesperrten pn-Überganges (IGFET – Isolated Gate FET) oder einer gesperrten Schottky-Diode (MESFET – Metall-Semiconductor-FET). Die Größe der Sperrspannung verändert die Breite eines leitfähigen Kanals zwischen Source und Drain.

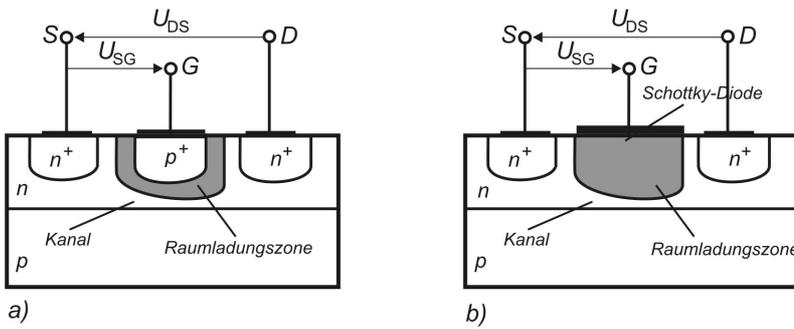


Abb. 6.48 n-Kanal-Sperrschicht-FET  
a) JFET b) MESFET

Die Raumladungszone (keine beweglichen Ladungsträger!) engt den Strompfad zwischen Drain und Source auf einen schmalen Kanal. Je größer die Sperrspannung, desto schmaler der Kanal und größer der Widerstand. Analog ist die Struktur von p-Kanal-SFET.

Die Abschnürung des Kanals beginnt am drainseitigen Ende. Mit wachsender Drainspannung wird die Abschnürung größer, der Widerstand des Kanals wächst. Überschreitet die Steuerspannung  $U_{SG}$  einen für die aktuelle Ausführung des Transistors spezifischen Schwellwert  $U_t$  so wird der Drainstrom gleich Null, unabhängig von der Größe der Drain-Source-Spannung.

Mit MESFET auf der Basis von GaAs stehen wegen der Rauscharmut und hohen Beweglichkeit der Elektronen Bausteine zur Verfügung, die im zweistelligen Gigahertzbereich bei Rauschzahlen um 2dB erst den Bau von höchstempfindlichen Vorverstärkern ermöglichen.

**6.4.2.2. Kennlinien**

Vom Typ her sind SFET vergleichbar mit den Depletion-MOSFET. Für den Fall einer ausreichend großen Drain-Source-Spannung  $U_{DS} > U_t - U_{SG}$  lässt sich die Transferkennlinie näherungsweise durch eine quadratische Beziehung beschreiben (vergl. Koß/Reinhold)

$$I_D = I_{DSS} \left( 1 - \frac{U_{SG}}{U_t} \right)^2 \tag{6.25}$$

$I_{DSS}$  ist der Sättigungsstrom bei  $U_{SG}=0$  und wie  $U_t$  für das Bauelement spezifisch.

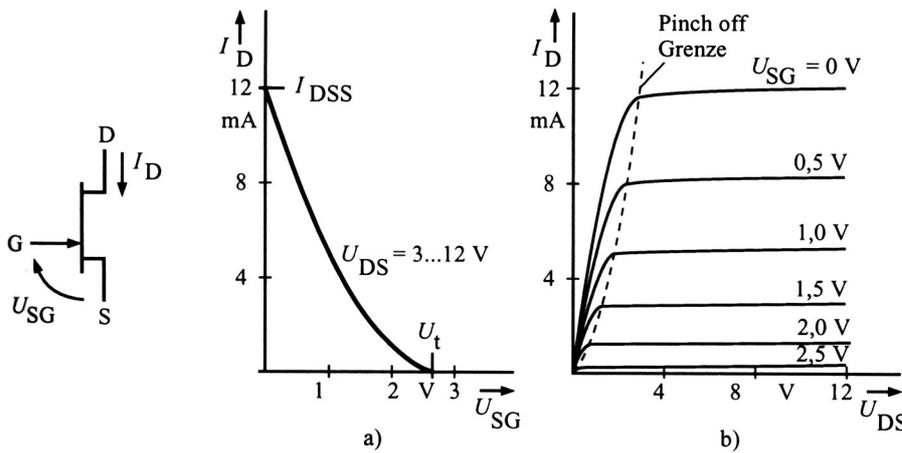


Abb. 6.49 Schaltsymbol und Kennlinien eines Sperrschicht-FET

a) Transferkennlinie  
b) Ausgangskennlinie

*Vorteile von Feldeffekttransistoren*

- Sperrschichtfreier Strompfad – unipolarer Transistor, dadurch sehr geringes Rauschen (kleinste Signale können verstärkt werden)
- Kaum Leistungsbedarf, dadurch hohe Integration möglich
- Platzsparende intelligente Schaltungsentwürfe möglich durch gleichzeitige Anordnung komplementärer FET auf einem Chip (CMOS-Schaltkreise)
- Vergleichsweise geringere Temperaturabhängigkeit der Betriebsdaten als bei Bipolartransistoren.

**Übungen**

6.14. Das Gate eines Silizium-MOSFET hat folgende Abmessungen:

Breite  $B = 60\mu\text{m}$ ; Länge  $L = 4\mu\text{m}$ ; Gateoxiddicke  $d = 30\text{ nm}$ ;  $\epsilon_r = 3,9$ ;  $E_{krit} = 5 \cdot 10^6\text{ V/cm}$

- Welches ist die maximale Gatespannung, die nicht überschritten werden darf?
- Wie viele Elektronen werden hierzu als Ladung auf dem Gate benötigt?
- Wie groß ist die Kapazität des Gates?
- Welche Energie wird benötigt, das Gate aufzuladen?

*Lösung:* a) Zur Bestimmung der Gateladung wird der Gauss'sche Satz angewendet. Die Integrationsfläche, welche die Gateladung einschließt, verläuft durch die Oxidschicht. Bei der Integration werden nur Flächenelemente innerhalb der Oxidschicht von Elektrischer Feldstärke betroffen.

$$Q = \epsilon_r \epsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{f} \cong \epsilon_r \epsilon_0 EA$$

$$Q = 3,9 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot \text{V}^{-1} \text{m}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^8 \text{ Vm}^{-1} \cdot 60 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$Q = 4,1 \cdot 10^{-12} \text{ As}$$

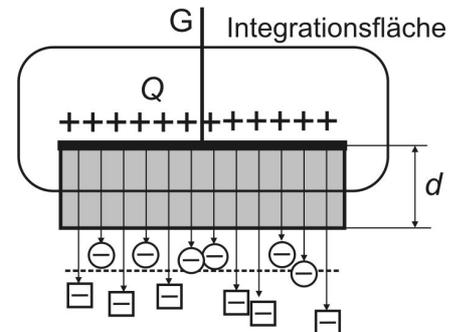
Diese Ladung entspricht der Gesamtladung von lediglich 26.000.000 Elektronen.

$$\text{b) } U = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \cong E \cdot d = 5 \cdot 10^8 \text{ Vm}^{-1} \cdot 30 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{15\text{V}}$$

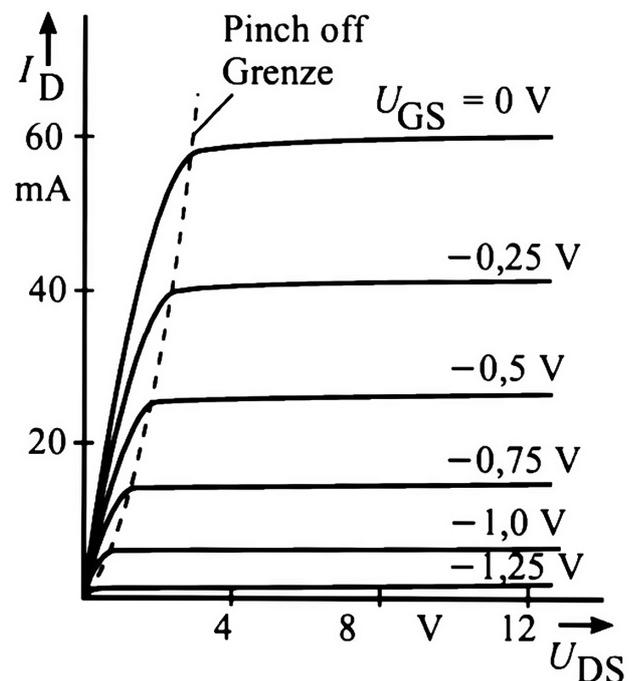
Dieser vergleichsweise geringe Wert für eine maximale Gatespannung deutet darauf hin, hier Vorsicht walten zu lassen beim Handling mit MOSFET.

$$\text{c) } C = \frac{Q}{U} = \frac{4,1 \cdot 10^{-12} \text{ As}}{15\text{V}} = \underline{0,27\text{pF}}$$

$$\text{d) } W = \frac{C}{2} U^2 = \frac{1}{2} 0,27 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \cdot 15^2 \text{ V}^2 = \underline{30 \cdot 10^{-12} \text{ VAs}}$$



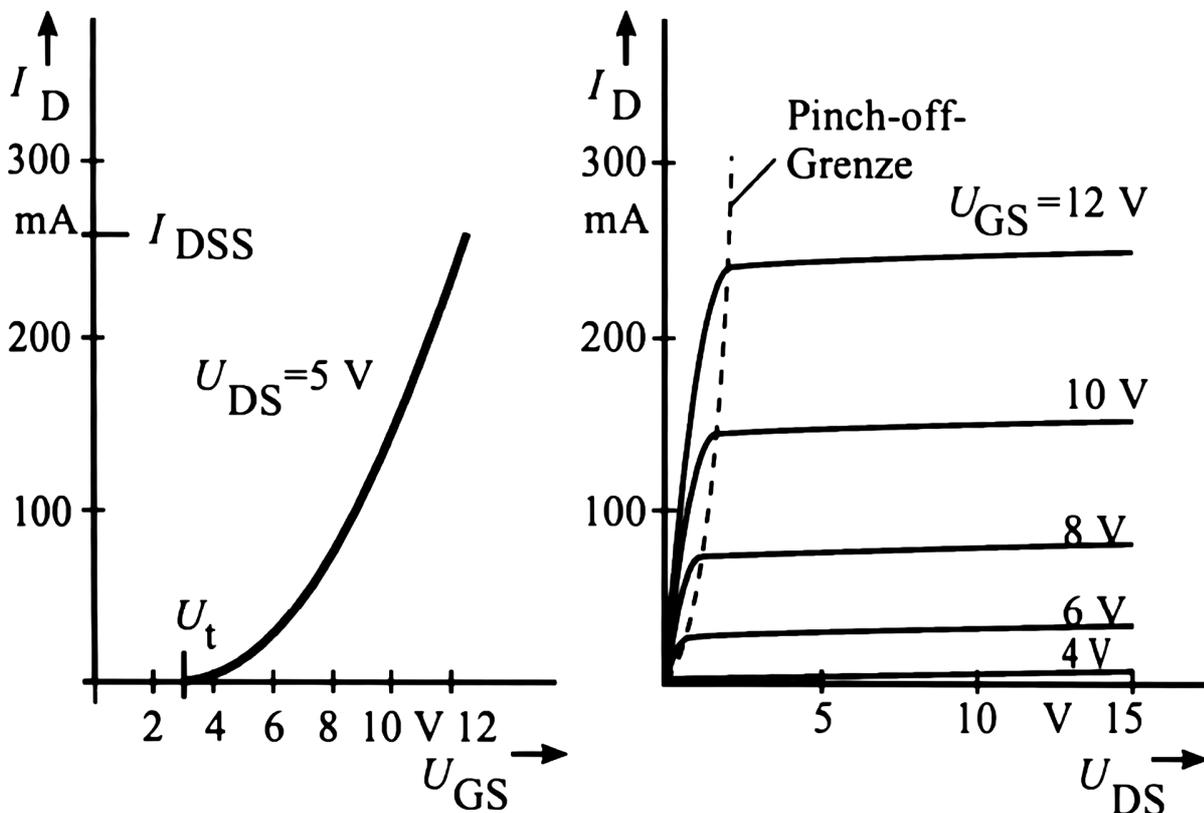
6.15. Zur nebenstehend abgebildeten Ausgangskennlinie eines n-Kanal-Depletion-MOSFET ist die dazu gehörige Transferkennlinie zu konstruieren.



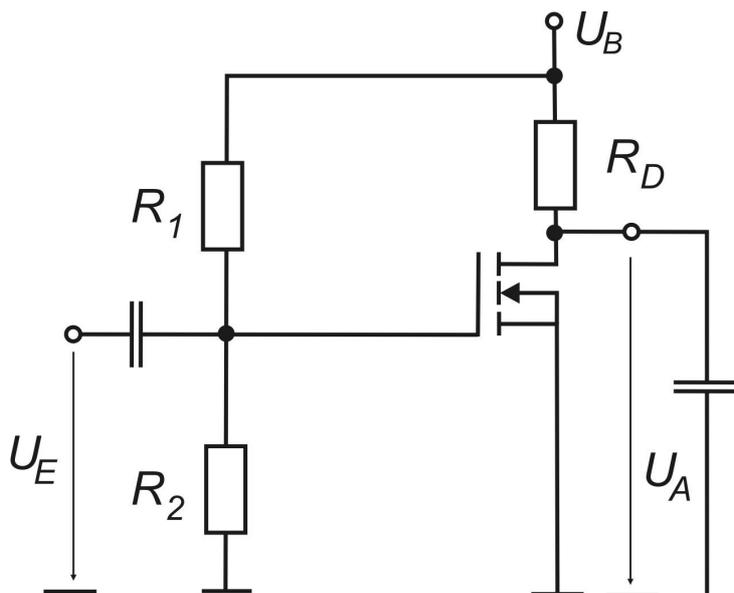
6.16. Zu dem gegebenen Kennlinienfeld eines n-Kanal-Enhancement-MOSFET sind die *Steilheit*

$$g_m = \left. \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \right|_{U_{DS}^{AP}} \text{ und der Ausgangsleitwert } g_d = \left. \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{DS}} \right|_{U_{GS}^{AP}} \text{ für den Arbeitspunkt } U_{GS}^{AP} = 10\text{V};$$

$I_D^{AP} = 150\text{mA}$  zu bestimmen.

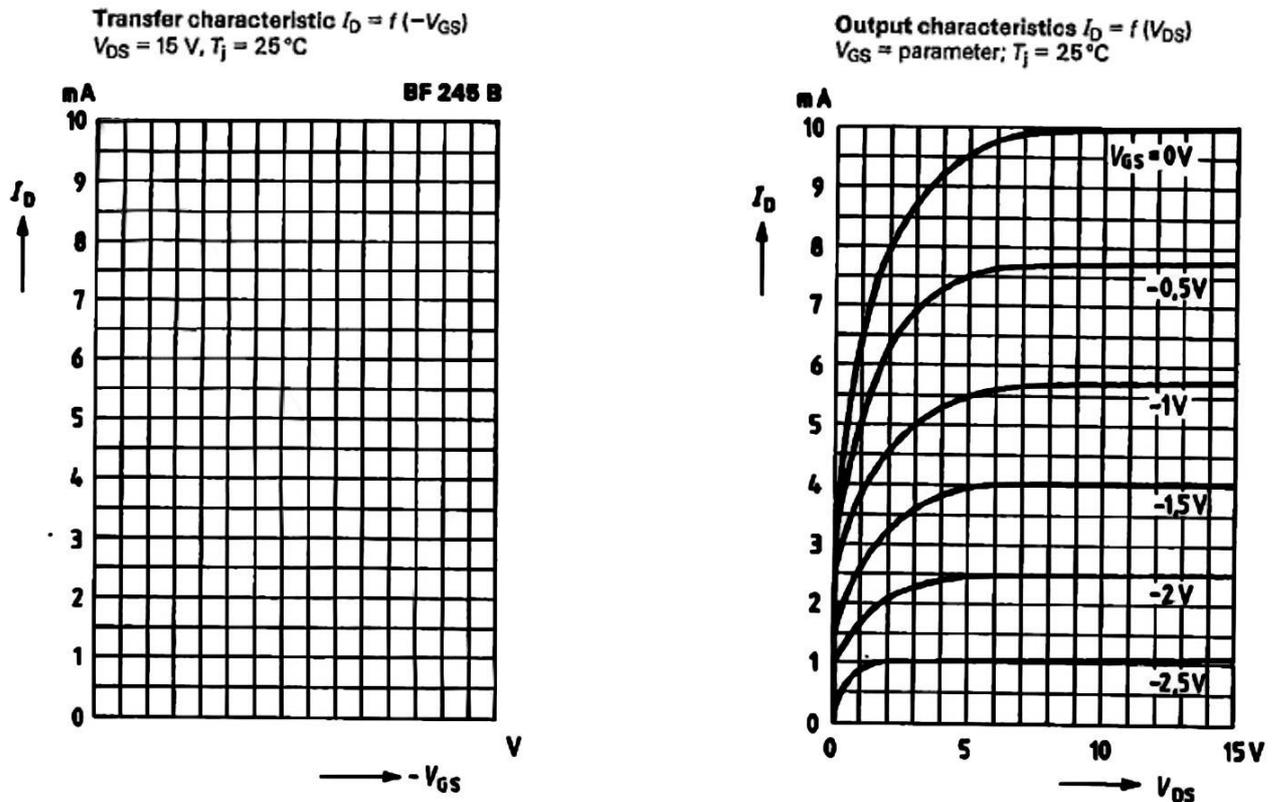


Kennlinienfeld eines n-Kanal-Enhancement-MOSFET



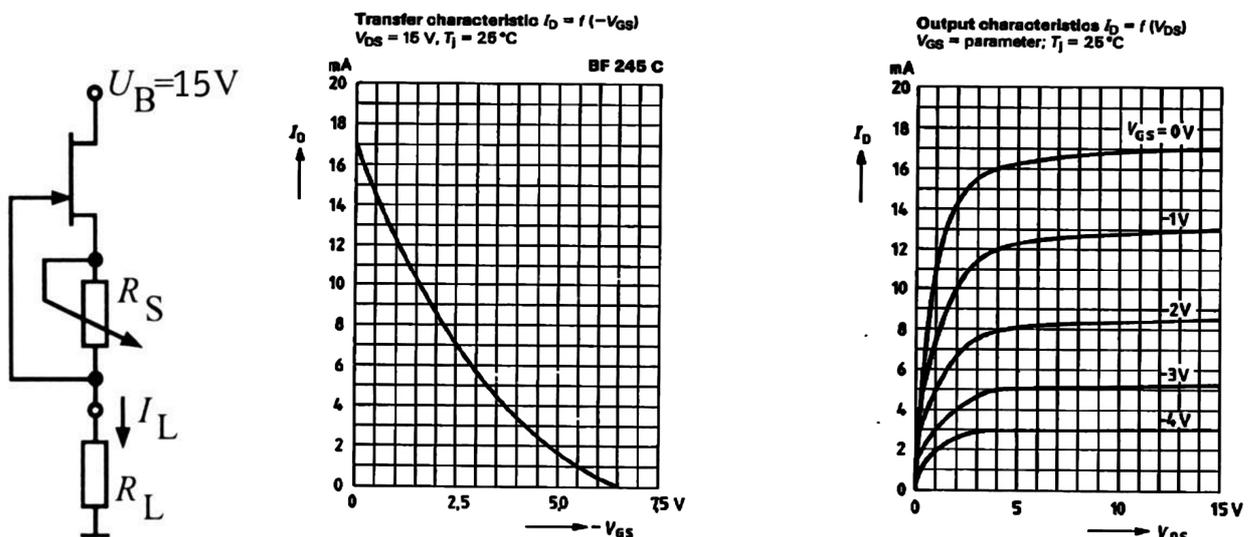
6.17. Die angegebene Verstärkerschaltung soll unter Verwendung der Kennlinien aus 6.16. dimensioniert werden. Die maximal zulässige Verlustleistung beträgt 1W, der maximal zulässige Drainstrom 0,3A. Die Betriebsspannung beträgt 12V. Der Spannungsteiler zur Festlegung des Arbeitspunktes soll einen Gesamtwiderstand von 10MΩ aufweisen. Bestimmen Sie die Größe der Widerstände,

6.18. Zur nebenstehend abgebildeten Ausgangskennlinie eines n-Kanal-SFET (nach Siemens) ist die dazu gehörige Transferkennlinie zu konstruieren.



6.19. Mittels eines SFET ist auf der nebenstehenden Abb. eine einfache Konstantstromquelle realisiert. Auf Grundlage des Kennlinienfeldes (nach Siemens) des Transistors BF 245C ist der Source-Widerstand  $R_S$  so zu dimensionieren, dass über den Lastwiderstand  $R_L$  ein konstanter Laststrom eingestellt werden kann.

- In welchem Betriebsbereich arbeitet der SFET?
- Zwischen welchen Werten  $R_S$  wird ein konstanter Laststrom  $I_L = 3 \dots 14\text{ mA}$  eingestellt?
- Wie groß darf  $R_L$  maximal sein, damit die Regelung über den vollen Bereich erfolgen kann?
- Welche maximale Verlustleistung fällt im Regelbereich am Transistor ab ( $P_{\text{tot}} = 300\text{ mW}$ )?



6.20. Geben Sie die logischen Funktionen der Schaltungen an; Skizzieren Sie einen Inverter in CMOS-Bauweise mit selbstsperrenden MOSFET

