Wintersemester 2016/17
Studiengang Angewandte Mathematik, Matrikel 15 AMB
Prof. Dr. B. Engelmann

Übungsaufgaben Numerik

Serie 1, letzter Abgabetermin 27. 10. 2016

(Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck in Papierform)

1. Näherungen für die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ sind

$$\Delta_1 f(x,h) = (1/h) * (f(x+h) - f(x)) \quad \text{(vorderer Differenzenquotient)}$$
$$\Delta_2 f(x,h) = (1/2h) * (f(x+h) - f(x-h)) \quad \text{(zentraler Differenzenquotient).}$$

Schreiben Sie ein Programm, welches an der Stelle $x = x_0 = 0.5$ für verschiedene Schrittlängen $h = 10^{-1}; 10^{-2}; ...; 10^{-14}$ die Werte von $\Delta_1 f, \Delta_2 f$ berechnet und mit dem exakten Ableitungswert vergleicht (Datentyp double verwenden).

Testbeispiele: (a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+0.13)(x-0.13)}$

Erzeugen Sie einen Ergebnisausdruck in Tabellenform mit folgenden fünf Werten in einer Zeile:

$$h \qquad \Delta_1 f \qquad |\Delta_1 f - f'(x_0)| \qquad \Delta_2 f \qquad |\Delta_2 f - f'(x_0)|$$

Im Protokoll unterstreiche man die korrekten Ziffern von $\Delta_1 f, \Delta_2 f$. Geben Sie die Schrittweiten h an, welche die genauesten Ergebnisse liefern und erklären Sie mit Worten das Verhalten der Näherungswerte für die Ableitungen.

2. Zu berechnen sind Integrale $I(k) = \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 e^x x^k dx, \quad k = 0,1,2,...,30$.

(a) Zeigen Sie mit geeigneten Abschätzungen die Gültigkeit der Ungleichungen

$$0 < I(k+1) < I(k), \qquad \frac{1}{e(k+1)} < I(k) < \frac{1}{k+1}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration die Beziehung $I(k+1) + (k+1) * I(k) = 1.$

(c) Wegen $I(0) = \dfrac{e-1}{e}$ *kann* $I(k)$ mit einer Vorwärtsrekursion (V) berechnet werden: $I(k+1) := 1 - (k+1) * I(k), \quad k = 0,1,2,3,...,29$.

Weiter gilt wegen (a) z. B. für k = 40 $\dfrac{1}{41*e} < I(40) < \dfrac{1}{41}.$ Aus diesem Intervall kann man einen beliebigen Startwert (z.B. $I(40) = \dfrac{0.7}{41}$) wählen und eine Rückwärtsrekursion (R) durchführen:

$$I(k) := (1 - I(k+1))/(k+1), \quad k = 39, 38, \ldots, 1, 0$$

Schreiben Sie ein Programm, welches die Werte I(0), ..., I(30) jeweils nach den Algorithmen (V) und (R) berechnet und in Tabellenform ausdruckt. Eine Zeile des Ergebnisprotokolls sollte die folgenden Werte enthalten:

k	(V): I (k)	(R): I (k)

Was gilt für die Fortpflanzung von Eingangs- und Rundungsfehlern bei den Algorithmen (V) und (R)? Stören Sie dazu den Startwert $I(0)$ für (V) mit $+10^{-6}$ und den Startwert $I(40)$ für (R) mit $+10^{-1}$ und drucken Sie das Ergebnisprotokolle nochmal neu. Wie dokumentiert sich das Verhalten und welche Erklärung kann man dafür geben ?

3. Zu lösen ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2px - q = 0, \quad q = 0.43212345$$

mit Hilfe eines Computerprogramms.
Berechnen Sie für $p = 1, 10, 10^2, \ldots, 10^{12}$ die beiden Lösungen der Gleichung nach den Formeln (Datentyp double verwenden) und lassen Sie ein Ergebnisprotokoll drucken.

(a) $x_1 = -p - \sqrt{p^2 + q}, \quad x_2 = -p + \sqrt{p^2 + q}$

(b) $\overline{x}_1 = -p - \sqrt{p^2 + q}, \quad \overline{x}_2 = \frac{-q}{\overline{x}_1}.$

Erklären Sie die Unterschiede der numerischen Werte zwischen x_2 und $\overline{x_2}$. Welcher der beiden Werte stellt die exakte kleinere Lösung der Gleichung genauer dar?