Wintersemester 2016/17
Studiengänge Angewandte Mathematik, Informatik u. Medieninf.
Prof. Dr. B. Engelmann

Übungsaufgaben Numerik I
Serie 2, letzter Abgabetermin: Freitag, 18. 11. 2016

1.. Das quadratische Polynom $P(x) = x^2 + 2px + q$ besitzt die Nullstellen

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

mit $x_1 + x_2 = -2p, \quad x_1 x_2 = q.$

(a) Man bestimme die Nullstellen der benachbarten Polynome P_1, P_2 *bzw.* P_3, P_4

$$P_1(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad P_2(x) = x^2 - 3x + 1.999999$$

$$P_3(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad P_4(x) = x^2 + 2x + 0.999999$$

(b) Man untersuche die Empfindlichkeit der Nullstelle x_1 gegenüber Störungen in q.
Dazu berechne man die Konditionszahlen

$$K_q^{abs} = abs\left(\frac{\partial x_1}{\partial q}\right), \quad K_q^{rel} = abs\left(\frac{\partial x_1}{\partial q} : \frac{x_1}{q}\right)$$

und stelle beide Größen durch x_1 *und* x_2 dar. Erklären Sie das Verhalten unter (a) mit Hilfe der Konditionszahlen.

2. Die Größe $cond\ _p(A) = \|A\|_p * \|A^{-1}\|_p$ wird als Konditionszahl der Matrix A bezüglich der verwendeten Matrixnorm bezeichnet , sie ist ein Maß für die Fehlerverstärkung bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems Ax = b.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Konditionszahlen von A bezüglich der 1- und der $\infty - Norm$.
Berechnen Sie außerdem die Frobeniusnorm von A und A^{-1}sowie das Produkt dieser beiden Größen als Schätzung der Konditionszahl bezüglich der 2-Norm.

3. Mit der Matrix A aus Aufgabe 2 werde das lineare Gleichungssystem Ax = b gelöst, wobei der Vektor b der rechten Seite des Systems in der zweiten Koordinate gestört sein kann:

$$b = (0.8642; \quad 0.1440 + \varepsilon)^T.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des Systems für $\varepsilon = 0$ (ungestörtes System) bzw die Störungen $\varepsilon = 10^{-4}$ und $\varepsilon = -10^{-4}$.

(b) Vergleichen Sie bei gestörtem System jeweils den relativen Fehler $\|\Delta x\| / \|x^*\|$ der Lösung $x = x^* + \Delta x$ mit dem relativen Eingangsfehler $\|\Delta b\| / \|b\|$, wobei die 1-Norm verwendet werden soll und x^* die Lösung des ungestörten Systems bezeichnet. Geben Sie den realen Faktor der Fehlerverstärkung zwischen $\|\Delta x\| / \|x^*\|$ und $\|\Delta b\| / \|b\|$ an.

4. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c & c & c & c \\ c & a & & & \\ c & & a & & \\ c & & & a & \\ c & & & & a \end{pmatrix}$$

ist dünn besetzt.

(a) Man zeige: Bei der Gauß-Elimination werden im ersten Hauptschritt alle Nullen zerstört, d.h. das spezielle Besetztheitsmuster geht verloren.

(b) Man finde Permutationsmatrizen P_1, P_2 derart, dass gilt

$$B = \begin{pmatrix} a & & & & c \\ & a & & & c \\ & & a & & c \\ & & & a & c \\ c & c & c & c & a \end{pmatrix} = P_1 A P_2.$$

(c) Man faktorisiere B in der Form B= LR und löse damit das lineare Gleichungssystem Ax = b mit dem Vektor $b = (10.6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^T, a = 10, c = 1.$

Hinweis: Wegen PP = E für Permutationsmatrizen, gilt $P_1 A P_2 * P_2 x = By = P_1 b$, d.h. es kann zunächst $By = P_1 b$ gelöst werden und man erhält die Lösung x des Original-problems in der Form $x = P_2 y$.