

## Übungsaufgaben Numerik I

Serie 3, letzter Abgabetermin 08. 12. 2016

### 1. Programmieraufgabe (Anerkennung nur bei Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck)

Zu jeder regulären Matrix  $A$  vom Typ  $(n,n)$  gibt es eine Dreiecksfaktorisierung der Form  $PA = LR$ , die unter Verwendung von Spaltenpivotisierung und impliziter Skalierung bestimmt werden kann. Schreiben Sie ein Programm, welches die Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  unter Verwendung der Pivotregel mit impliziter Skalierung berechnet und drei wesentliche Teilprogramme umfasst:

LR\_DECOMP.....Modul zur LR-Faktorisierung der Matrix  $PA$

L\_SOLVE.....Modul zur Lösung eines unteren Dreieckssystems  $Ly = Pb$

R\_SOLVE.....Modul zur Lösung eines oberen Dreieckssystems  $Rx = y$

|               |                |                                                                                                           |
|---------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Eingabedaten: | $A[1..N,1..N]$ | enthält Matrix $A$                                                                                        |
|               | $b[1..N]$      | enthält rechte Seite $b$                                                                                  |
| Ausgabedaten: | $A[1..N,1..N]$ | enthält $(L \setminus R)$                                                                                 |
|               | $P[1..N-1]$    | enthält Indizes der Zeilenvertauschungen                                                                  |
|               | $X[1..N]$      | enthält Lösung                                                                                            |
|               | SING           | Fehlerindikator bei numerisch singulärer Matrix<br>(Pivotelement kleiner als $\ A\ _1 * \epsilon_{SM}$ ). |

Testbeispiele:  $N=5$

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & 2 & 0 & 5 \\ -6 & 3 & -2 & 9 & 12 \\ 3 & -5 & 4 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 10.235 & -4.56 & 0 & -0.035 & 5.87 \\ -2.463 & 11.27 & 3.97 & -8.63 & -1.08 \\ -6.58 & 2.86 & -0.257 & 8.32 & -43.6 \\ 9.83 & 7.39 & -17.25 & 0.036 & 2.486 \\ -19.31 & 3.49 & 78.56 & 10.07 & 65.8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -18.95 \\ 2.54 \\ 75.42 \\ -5.60 \\ 8.43 \end{pmatrix}.$$

### 2. Programmieraufgabe (Anerkennung nur bei Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck)

Modifizieren Sie das in Aufgabe 1. entwickelte Programm, um die inversen Matrizen zu den Testbeispielen 1(a) und 1(b) zu berechnen. Geben Sie im Ausdruck Matrix und inverse Matrix an.

3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.37736 & 2.48140 & 5.35919 \\ 2.67928 & -1.22956 & 25.56021 \\ -1.22528 & 9.91018 & -35.04990 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 23.50000 \\ -15.76000 \\ 2.34000 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Lösungsvektor  $x^*$  des Systems mit Hilfe des Algorithmus aus Aufgabe 1.
- (b) Die dritte Zeile der Matrix  $A$  werde additiv gestört durch den Zeilenvektor  $(1.e-6 \ 0 \ -1.e-6)$ . Bestimmen Sie den Lösungsvektor  $x^* + \Delta x$  des Gleichungssystems mit der so gestörten Matrix  $A + \Delta A$  ebenfalls mit Hilfe des Algorithmus und berechnen Sie aus dem Vergleich der Werte  $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x^*\|_\infty}$  und  $\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}$  eine untere Schranke für den Wert der Konditionszahl  $\text{cond}_\infty(A)$ .

4. Eine Funktion  $f(x)$  mehrerer Variabler nimmt in einem Punkt  $x^k$  entlang des Strahls  $x = x^k + \lambda s^k$  ( $\lambda \geq 0$ ) lokal ab, wenn die Bedingung  $\nabla f(x^k)^T s^k < 0$  erfüllt ist. Die Richtung  $s^k$  wird dann als Abstiegsrichtung in  $x^k$  bezeichnet und es kann  $\lambda = \lambda_k > 0$  so bestimmt werden, dass für  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$  gilt  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ . Dieses Prinzip ist Grundlage verschiedener Algorithmen zur Berechnung des Minimums einer Funktion, wobei sich die Algorithmen speziell in der Berechnung der Abstiegsrichtungen  $s^k$  unterscheiden. Die Lösung  $s = s^k$  des symmetrischen Gleichungssystems  $H(x^k)s = -\nabla f(x^k)$  mit der Matrix  $H_k = H(x^k)$  der zweiten partiellen Ableitungen wird als Newtonrichtung bezeichnet. Im Fall der positiven Definitheit der Matrix  $H_k$  ist  $s^k$  stets eine Abstiegsrichtung. Ist jedoch  $H_k$  nicht positiv definit, so muss  $s$  keine Abstiegsrichtung sein. Man kann dann Abstiegsrichtungen erhalten, indem man im Gleichungssystem die Matrix durch  $H_k + \mu E$  ersetzt und  $\mu$  genügend groß wählt, so dass die Matrix positiv definit wird.

Für die Funktion  $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2$  zeige man, dass  $x^* = (2, -1)^T$  lokaler und globaler Minimalpunkt ist. Es sei  $x^0 = (1, 0.5)^T$  Startpunkt eines Abstiegsverfahrens. Man bestimme die Newtonrichtung und überprüfe, ob diese eine Abstiegsrichtung ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls einen möglichst kleinen (zur Vereinfachung ganzzahligen) Wert von  $\mu$ , für den  $H_0 + \mu E$  positiv definit ist und zeigen Sie, dass dann die Lösung  $s = s^0$  des Gleichungssystems eine Abstiegsrichtung ist. Bestimmen Sie  $\lambda = \lambda_0 > 0$  so, dass für  $x^1 = x^0 + \lambda_0 s^0$  gilt  $f(x^1) < f(x^0)$ .