

Übungsaufgaben Numerik I

Serie 4, letzter Abgabetermin 03. 01. 2017

Thema: Lineare Ausgleichsprobleme

1. Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) vom Rang n und jeden Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^m$

gibt es genau einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax^* - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

x^* heißt die Quadratmittellösung des im Fall $m > n$ überbestimmten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bzw. die Lösung des linearen Ausgleichsproblems.

Schreiben Sie ein Programm, welches eine Prozedur HOUSE verwendet und die Lösung unter Verwendung von Householder-Transformationen bestimmt.

Eingabedaten:	M,N	Dimensionen m,n
	A[1..M, 1..N+1]	enthält (A b)
Ausgabedaten:	A[1..M, 1..N+1]	enthält (R c) und die Householder-vektoren
	R[1..N]	enthält die Hauptdiagonalelemente r_{ii}
	X[1..N]	enthält x^*
	RES	enthält $\ Ax^* - b\ _2$
	SING	Fehlerausgang.

Lösen Sie die folgenden Testprobleme unter Verwendung der Prozedur. Überprüfen Sie ihren Algorithmus zunächst an einem Beispiel aus der Übung. Lassen Sie jeweils einen Kontrollausdruck der Eingabe- und Ausgabedaten anfertigen.

Testbeispiele:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben sind 12 Punkte (t_i, y_i)

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	102.102	58.344	36.463	24.510	17.017	12.376	9.282	7.240	5.710	4.588	3.6465	3.003

Bestimmen Sie für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ rationale Funktionen

$$f_n(t) = \frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t+1} + \frac{x_3}{t+2} + \dots + \frac{x_n}{t+n-1}$$

so, dass $\sum_{i=1}^{12} (f_n(t_i) - y_i)^2$

minimal wird (Lineares Ausgleichsproblem für $x_1, x_2, \dots, x_n$).

2. Ein neu entdeckter Himmelskörper, der sich auf einer Umlaufbahn um die Sonne bewegt, wurde in 10 Positionen vermessen. In einem in der Bahnebene liegenden angepaßten kartesischen Koordinatensystem sind die Positionen (x_i, y_i) in der folgenden Tabelle angegeben

Beobachtung	x_i	y_i
1	-1.024940	-0.398269
2	-0.949898	-0.322894
3	-0.866114	-0.265256
4	-0.773392	-0.216557
5	-0.671372	-0.177152
6	-0.559524	-0.147582
7	-0.437067	-0.128618
8	-0.302909	-0.121353
9	-0.155493	-0.127348
10	-0.007464	-0.148885

Die Bahn des Himmelskörpers ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die Bahngleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

kann nach Division durch a_{11} in die Form gebracht werden

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a,b,c,d,e als Lösung eines linearen Ausgleichsproblems und nutzen Sie zur numerischen Lösung die Prozedur HOUSE.

3. Für die nachfolgenden Sauerstoff-Stickstoff-Verbindungen sind die Molekulargewichte festgestellt worden. Bestimmen Sie mittels Methode der kleinsten Quadrate daraus die Atomgewichte von Stickstoff und Sauerstoff mit 4 Dezimalstellen.

Verbindung	NO	N ₂ O	NO ₂	N ₂ O ₃	N ₂ O ₅	N ₂ O ₄
Mol.gewicht	30.006	44.013	46.006	76.012	108.010	92.011

4. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass das System unlösbar ist.
 (b) Bestimmen Sie die Menge der Quadratmittellösungen und die entsprechenden Vektoren der Residuen und ihre euklidische Norm.