Wintersemester 2016 / 2017
Studiengang Angewandte Mathematik, Informatik u.a.
Prof. Dr. B. Engelmann

Übungsaufgaben Numerik I
Serie 5, letzter Abgabetermin 19. 01. 2017

1. Es seien f(x) und G(t) mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen und es gelte $G(0)=1, G'(0)=0.5$. Ferner werde $\Phi(x)$ in folgender Weise definiert:
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} G(\frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}) \quad .$$
(a) Beweisen Sie die Aussage: Das durch $x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad k = 0,1,2,...$ definierte Iterationsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f(x) konvergiert für einfache Nullstellen von f(x) lokal mit kubischer Konvergenzordnung.
(b) Es sei G(t) in folgender Weise definiert:
$$G(t) = \frac{1}{1-0.5t} \quad .$$
Zeigen Sie, daß G(t) die Bedingungen von (a) erfüllt und das dadurch definierte Iterationsverfahren (Halley-Verfahren) zur Bestimmung einer Lösung von f(x) = 0 im Fall $f'(x) > 0$ einem Newton-Verfahren angewendet auf die Funktion $F(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$ entspricht.
(c) Geben Sie das Halley-Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a an und berechnen Sie für a=8 die Wurzel mit 9 Dezimalstellen unter Verwendung des Startpunktes $x_0 = 1$. Geben Sie die Iterationen an und vergleichen Sie mit der Anzahl der Iterationen, die das Newtonverfahren benötigt.

2. (Programmieraufgabe: Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck)
Bei der Lösung von Anfangswertproblemen von Differentialgleichungen treten bei Anwendung der Methode der Trennung der Variablen die Lösungsfunktionen y = y(t) nur in impliziter Form auf. Man erhielt die folgende implizite Gleichung
$$F(t,y) = t^3 + y^3 - 6ty - 3t^2 + 3t + 6y - 1 = 0 .$$
Berechnen Sie mittels Newton-Verfahren die Werte der Lösungsfunktion $y_i = y(t_i)$ mit einer Genauigkeit $|F(t_i, y_i)| < eps, \quad eps = 1.e-8$ für die Intervalle:
(a) $t \in [-4,4]$ für n=26 äquidistante Stellen $t_i = -4 + i * h$, $h = \frac{b-a}{n-1}$, Startwert $y_0 = 1$;
(b) $t \in [1.1; 4.1]$ für n=26 äquidistante Stellen, Startwert $y_0 = 3$;
(c) $t \in [1.2; 7]$ für n=26 äquidistante Stellen, Startwert $y_0 = -5$;
indem Sie die Gleichung $F(t_i, y) = 0$ jeweils numerisch lösen. Stellen Sie die drei Lösungsfunktionen in einem Plot grafisch dar. Erklären Sie, warum für $t \in [-4; 7]$ die Lösung nicht in einem Durchlauf berechnet werden kann. Wo liegen Problemstellen und warum treten Schwierigkeiten bei der Berechnung auf?

3. Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$r_1(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 - 9 = 0$$
$$r_2(x) = x_1^2 - 4x_1 + 5x_2^2 + x_2 - 16 = 0\,.$$

(a) Führen Sie mit dem Startpunkt $x^{(0)} = (2,5)^T$ zwei Schritte des Newtonverfahrens mit Schrittweitedämpfung durch (Rechnung per Hand bzw. mit Taschenrechner). Die Elemente der Jacobimatrix sollen als Funktionen analytisch berechnet werden.

(b) . (Programmieraufgabe:Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck)
Berechnen Sie numerisch Lösungen des Systems mit Hilfe des Newtonverfahrens mit Schrittweitedämpfung. Die Elemente der Jacobimatrix sollen als Funktionen analytisch berechnet werden. Verwenden Sie zur Lösung der linearen Gleichungssysteme das in Übung 3 programmierte Verfahren mit LR-Zerlegung.
Startpunkte: $x^0 = (2, 5), x^0 = (-4,-4), x^0 = (2,-3)$; Genauigkeit: $\|r(x)\|_2 \le eps = 1.e-6.$
Außer den so berechneten Lösungspunkten gibt es einen weiteren. Versuchen Sie einen geeigneten Startpunkt zu finden, dass das Verfahren zu dieser Lösung konvergiert.

4. (Programmieraufgabe: Abgabe von Programm und Ergebnisausdruck)
Bei der numerischen Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t) - 5y(t) - 2y(t)^3 = 5t\ , \quad y(0) = y(1) = 0$$

mittels der Methode der finiten Differenzen wird die Lösungsfunktion y(t) im Intervall [0, 1] näherungsweise in den Stützstellen $t_i = i*h,\ h = (N+1)^{-1}\ (i = 0,1,...,N+1)$ bestimmt. Die Näherungswerte y_i für die Werte der Lösungsfunktion $y(t_i)$ in den Stützstellen $t = t_i$ berechnet man aus einem Gleichungssystem. Dieses erhält man, indem die Differenzialgleichung in $t = t_i$ betrachtet wird und die Ableitung durch die Differenzenapproximation

$$\ddot{y}(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (*)$$

ersetzt wird. Die gesuchten Werte $y_1, y_2, ..., y_N\ (y_0 = y(0) = 0,\ y_{N+1} = y(1) = 0)$ ergeben sich dann aus dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$F_i(y_1,...,y_N) = -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} + h^2(5y_i + 5t_i + 2y_i^3) = 0,\ i = 1,...,N.$$

Bestimmen Sie für die folgenden Fälle (a) und (b) die Lösungsvektoren $(y_1, y_2, ..., y_N)$ mittels einer Fixpunkt-Iteration $y^{k+1} := \Phi(y^k)$, indem man die Gleichungen $F_i = 0$ in die Fixpunktform bringt:

$$y_i = \Phi_i(y) = \frac{y_{i-1} + y_{i+1} - 5h^2 t_i}{2 + 5h^2 + 2h^2 y_i^2}, \quad i = 1,...,N$$

Verwenden Sie als Startvektoren der Iteration $y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_N^0)^T = (0,0,...,0)^T$
Abbruchbedingung: $\|y^{k+1} - y^k\|_2 < eps = 10^{-4}.$

(a) n=3, h=0.25; (b) n=9, h=0.1; (c) n=19, h=0.05.
Geben Sie jeweils die notwendige Iterationszahl und den Vektor der y-Werte für den Abbruch der Iteration an. Plotten Sie im Fall (c) die näherungsweise Lösungsfunktion.