# Harmonische Schwingung

**Ziel:** Lösung der DGL $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0}$

**1. Lösungsansatz:**

$x(t) = A\, exp\{\lambda t\}$ A- Konstante $\lambda$- Parameter

**2. Differenzieren des Ansatzes:**

$$\dot{x}(t) = \lambda\, A\, exp\{\lambda t\}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2\, A\, exp\{\lambda t\}$$

**3. Einsetzen in die DGL:**

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

$$\lambda^2\, A\, exp\{\lambda t\} + \omega_0^2\, A\, exp\{\lambda t\} = 0$$

$$A\, exp\{\lambda t\}\left( \lambda^2 + \omega_0^2 \right) = 0$$

für alle t ist die Gleichung erfüllt für:

$\boxed{\lambda^2 + \omega_0^2 = 0}$ **charakteristische Gleichung**

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} \qquad \lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = A_1\ exp\{+ i\, \omega_0\, t\} + A_2\ exp\{- i\, \omega_0\, t\}$$

**Lösung der DGL:**

- Schreibweise der Exponentialfunktion nach der Eulerschen Beziehung

$$exp\{\pm\, i\omega\, t\} = cos(\omega\, t) \pm i\, sin(\omega\, t)$$

$$x(t) = A_1\ \left(cos(\omega_0\, t) + i\, sin(\omega_0\, t)\right) + A_2\ \left(cos(\omega_0\, t) - i\, sin(\omega_0\, t)\right)$$

$$x(t) = \ (A_1 + A_2)\cos(\omega_0\, t) + i(A_1 - A_2)\sin(\omega_0\, t)$$

- Festlegen von 2 neuen, reellen Konstanten A und $\beta$

$$A_1 = \frac{A}{2} exp\{+ i\beta\} \qquad A_2 = \frac{A}{2} exp\{- i\beta\}$$

- Anwendung der Additionstheoreme ergibt:

$$\boxed{x(t) = \ A\ \ cos(\omega_0\, t + \beta)}$$