Gedämpfte harmonische Schwingung

Lösung der DGL $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

1 Lösungsansatz $x(t) = A\exp\{\lambda t\}$

A- Konstante
λ- Parameter

2 Differenzieren des Ansatzes

$$\dot{x}(t) = \lambda A \exp\{\lambda t\}$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 A \exp\{\lambda t\}$$

3 Einsetzen in die DGL

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\lambda^2 A\exp\{\lambda t\} + \lambda A\; 2\delta\exp\{\lambda t\} + \omega_0^2 A\exp\{\lambda t\} = 0$$
$$A\exp\{\lambda t\}\left(\lambda^2 + \lambda\; 2\delta + \omega_0^2\right) = 0$$

für alle t ist die Gleichung erfüllt für:

$$\boxed{\lambda^2 + \lambda\; 2\delta + \omega_0^2 = 0}$$ **charakteristische Gleichung**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

3 Fälle

$\delta^2 \geq \omega_0^2$ Kriechfall

$\delta^2 \leq \omega_0^2$ Schwingfall

$\delta^2 = \omega_0^2$ Aperiodischer Grenzfall

Lösung der DGL für den Schwingfall:

$$x(t) = A_1\;\exp\{-\delta t\}\exp\left\{+i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right\} + A_2\;\exp\{-\delta t\}\exp\left\{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right\}$$

Schreibweise der Exponentialfunktion nach der Eulerschen Beziehung:

$$\exp\{\pm i\omega t\} = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t)$$

$$x(t) = A_1\;\exp\{-\delta t\}\left(\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + i\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$
$$+ A_2\;\exp\{-\delta t\}\left(\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) - i\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

$$x(t) = \exp\{-\delta t\}\left((A_1 + A_2)\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + i(A_1 - A_2)\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

Festlegen von 2 neuen, reellen Konstanten A und β

$$A_1 = \frac{A}{2}\exp\{+i\beta\} \qquad A_2 = \frac{A}{2}\exp\{-i\beta\}$$

Anwendung der Additionstheoreme ergibt:

$$\boxed{x(t) = A\;\exp\{-\delta t\}\;\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t + \beta\right)}$$