Erzwungene Schwingung
Ableitung der Beziehungen für Amplitude und Phase

DGL $$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} exp\{i\omega\, t\}}$$

Lösungsansatz: $x(t) = x_p(t) = A(\omega) exp\{i(\omega\, t - \varphi(\omega))\}$

$$\dot{x}(t) = i\omega \quad A(\omega) exp\{i(\omega t - \varphi(\omega))\}$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \quad A(\omega) exp\{i(\omega t - \varphi(\omega))\}$$

Einsetzen in DGL $(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2)\,(A(\omega) exp\{i(\omega t - \varphi(\omega))\}) = \frac{F_0}{m} exp\{i\omega t\}$

$$(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2)\,(A(\omega) \cdot exp\{i\omega t\} \cdot exp\{-i\varphi(\omega)\}) = \frac{F_0}{m} exp\{i\omega t\}$$

$$(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m \cdot A(\omega)} exp\{i\varphi(\omega)\}$$

$$\boxed{(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m \cdot A(\omega)} (cos\,\varphi(\omega) + i\, sin\,\varphi(\omega))} \quad \text{Gl. (1)}$$

Vergleich von Realteil $(-\omega^2 + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m \cdot A(\omega)} cos\,\varphi(\omega)$ Gl. (2)

und Imaginärteil $2\delta\omega = \frac{F_0}{m \cdot A(\omega)} sin\,\varphi(\omega)$ Gl. (3)

beider Seiten von Gl. (1).

<u>Bestimmung der Amplitude</u>:

Gl. (2) und Gl. (3) quadrieren und dann addieren

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = \left(\frac{F_0}{m \cdot A(\omega)}\right)^2 (cos^2\varphi(\omega) + sin^2\varphi(\omega))$$

$$\boxed{A(\omega) == \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}}$$

<u>Bestimmung der Phase:</u>
Gl. (3) durch Gl. (2) dividieren

$$\boxed{tan\,\varphi(\omega) = \frac{2\delta\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)}}$$