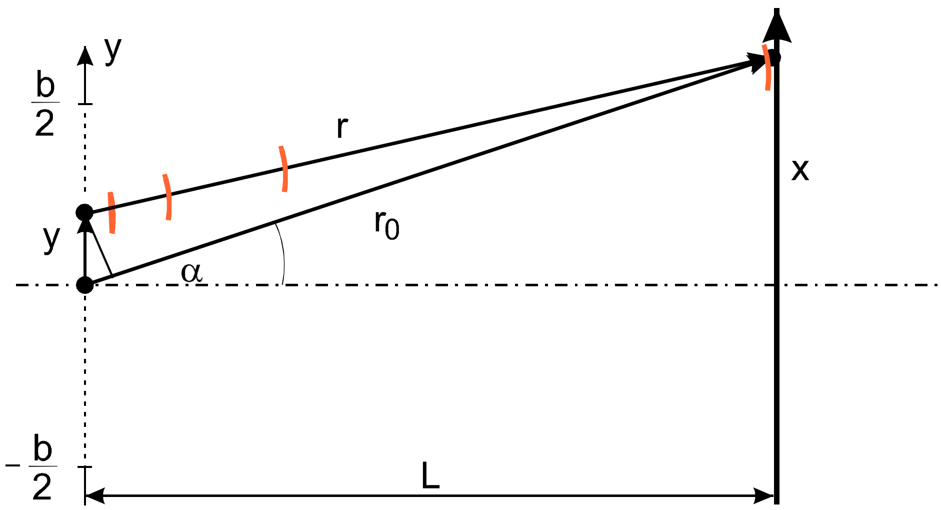
Beugung am Spalt

Nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip ist jeder Punkt einer Wellenfront, die den Spalt erreicht Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle). Vom Punkt y geht eine Kugelwelle aus, deren Amplitude im Punkt P wie folgt beschrieben wird:



$$U_y(P) = \frac{A}{r} cos(\omega t - kr)$$

Für die Koordinate r gilt: $r = r_0 - y\, sin\,\alpha$

Damit ergibt sich für U_y

$$U_y(P) = \frac{A}{r_0 - y\, sin\,\alpha} cos(\omega t - k(r_0 - y\, sin\,\alpha))$$

Unter Anwendung der Additionstheoreme erhält man:

$$U_y(P) = \frac{A}{r_0 - y\, sin\,\alpha}\left(cos(\omega t - kr_0)cos(ky\, sin\,\alpha) + sin(\omega t - kr_0)sin(ky\, sin\,\alpha)\right)$$

Mit der Näherung $r_0 - y\, sin\,\alpha \approx r_0$ wird die Amplitude U_y zu:

$$U_y(P) = \frac{A}{r_0}\left(cos(\omega t - kr_0)cos(ky\, sin\,\alpha) + sin(\omega t - kr_0)sin(ky\, sin\,\alpha)\right)$$

Von jedem Punkt innerhalb des Spaltes gehen in gleicher Weise Elementarwellen aus. Die Gesamtwelle im Punkt P ergibt sich durch Integration über alle Teilwellen.

$$U(P) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} U_y(P)dy$$

$$U(P) = \frac{A}{r_0}\left(cos(\omega t - kr_0) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} cos(ky\, sin\,\alpha)dy + sin(\omega t - kr_0) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} sin(ky\, sin\,\alpha)dy \right)$$

mit $C = \frac{A}{r_0} cos(\omega t - kr_0)$ folgt

$$U(P) = C \cdot b \cdot \frac{\sin(k\frac{b}{2}\sin\alpha)}{k\frac{b}{2}\sin\alpha}$$ bzw. für die Intensität im Punkt P

$$\boxed{I(P) = |U(P)|^2 = |C \cdot b|^2 \cdot \frac{\sin^2(k\frac{b}{2}\sin\alpha)}{(k\frac{b}{2}\sin\alpha)^2}}$$

Das Resultat zeigt das Quadrat der sogenannten Spaltfunktion der Struktur sin (x)/x.

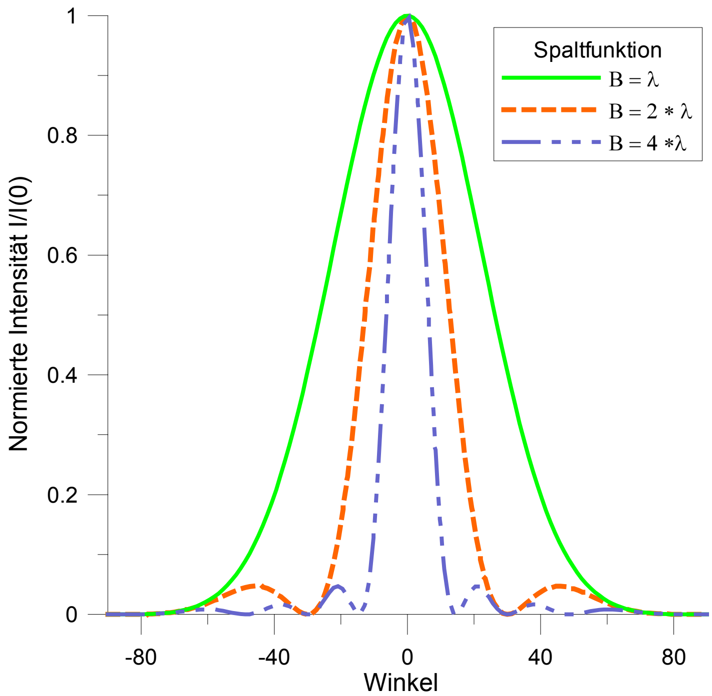


Abbildung: Normierte Intensität in Abhängigkeit von der Spaltbreite B

Aus der Diskussion der Eigenschaften der Spaltfunktion ergibt sich für die Position der Minima.

$$\boxed{\sin\alpha = m\frac{\lambda}{b}}$$

Für kleine Winkel α gilt $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{x}{L}$.