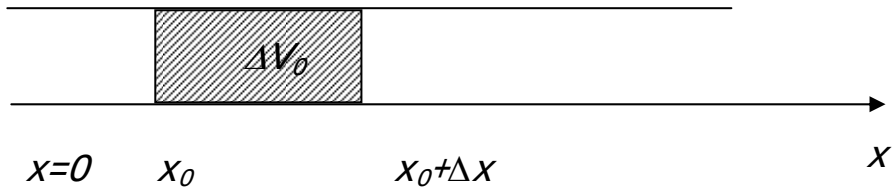


Herleitung der Wellengleichung in Flüssigkeiten und Gasen

1. Betrachtet wird ein Volumenelement $\Delta V_0 = A\Delta x$ im Medium, das Massenelement im Medium berechnet sich dann zu $\Delta m = \rho A\Delta x$



2. Bewegungsgleichung für das Massenelement (2. Newtonsches Axiom):
Die Auslenkung des Moleküle betrage y .

$$\Delta F = \Delta m a = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Delta F = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (*)$$

3. Infolge der Ausbreitung der Schallwelle entstehen eine Volumenänderung und damit eine Druckänderung.

Wandert eine Druckwelle durch das Medium, so bewirkt sie eine Verschiebung von ΔV_0 von $x_0 \rightarrow x_0 + y = x$ und eine Kompression von $\Delta V_0 \rightarrow \Delta V$ mit der Länge von ΔV

$$\Delta x_0 \rightarrow \Delta x_0 - \Delta y = \Delta x$$

4. Hooksches Gesetz für die Kompression von Flüssigkeiten und Gasen

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} \quad \Delta p = -K \frac{\Delta V_x}{\Delta V_0} = -K \frac{A(-\Delta y)}{A\Delta x}$$

Übergang zu $\frac{\Delta p}{\Delta x} \rightarrow K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Einsetzen von (*) liefert die Wellengleichung.

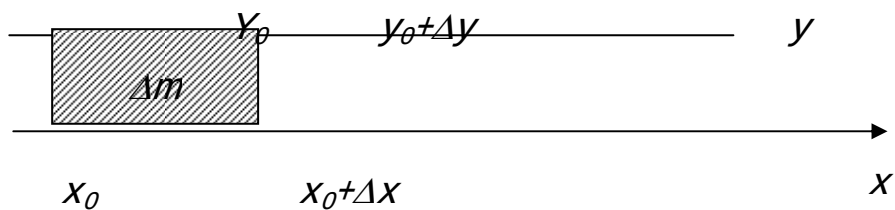
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

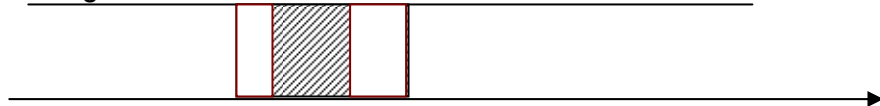
mit $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$

Herleitung der Wellengleichung für eine Stoßwelle im Stab

1. Massenelement $\Delta m = \rho A \Delta x$ im Stab



2. Auslenkung des Massenelementes



3. Bewegungsgleichung für das Massenelement (2. Newtonsches Axiom):

$$\Delta F = \Delta m a = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

4. Hooksches Gesetz für die relative Längenänderung des Stabes:

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} \quad l = \Delta x \quad \text{und} \quad \Delta l = \Delta y$$

$$\sigma = E \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{mit} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \sigma = E \frac{\partial y}{\partial x} \quad (*)$$

5. Spannungen beiderseits des Massenelementes unterscheiden sich:

$$\Delta F = A(\sigma(x_2) - \sigma(x_1)) = A \Delta \sigma$$

6. Vergleich der Kraft:

$$\Delta F = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A \Delta \sigma$$

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \text{ mit } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

7. Einsetzen von (*)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\text{mit } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Schallwellen in Festkörpern

Longitudinalwellen in dünnen Stäben	
$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	E Elastizitätsmodul ρ Dichte
Transversalwellen in FK	
$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	G Torsionsmodul ρ Dichte
Eingespannte Saite	
$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$	σ Zugspannung ρ Dichte