Hinweise zur Lösung von Übungsaufgaben der Kinematik von Punktmassen
Eindimensionale Translation

1. Allgemeine Hinweise:

Gegenstand der Kinematik der linearen Translation sind die Beziehungen zwischen den Größen $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$, mit denen die Bewegung von einer oder mehrerer Punktmassen entlang einer Geraden beschrieben wird. Folgende Beziehungen bestehen zwischen diesen Bewegungsgrößen:

$$
\begin{aligned}
&a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v} = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \ddot{s} \qquad && v(t) = \int a(t)dt + C \qquad && v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \\
&v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s} && s(t) = \int v(t)dt + C && s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Die Integrationskonstante C ist zunächst unbestimmt und wird im konkreten Fall durch eine *Rand- oder Nebenbedingung* festgelegt. Bei der *bestimmten* Integration erhält man Differenzen, z.B. beschreibt man mit $v(t_2)$ - $v(t_1)$ die im betrachteten Zeitintervall eingetretene Geschwindigkeitsänderung. Aktuelle Werte lassen sich auch durch bestimmte Integration angeben, z.B. die Position $s(t)$:

$$s(t) = s(t) - s(t_1) + s(t_1) = \int_{t_1}^{t} v(t')dt' + s(t_1) \quad . \qquad (2)$$

Der ggf. bekannte Wert $s(t_1)$ muss dann nur zum bestimmten Integral addiert werden, dessen obere Grenze mit t variabel gestaltet wird.

2. Aufgabe zur Illustration

Ein Stein (PM1) wird zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ fallengelassen. Ein zweiter Stein (PM2) soll zum etwas späteren Zeitpunkt t_2 mit der Abwurfgeschwindigkeit v_{22} hinterher geworfen werden, so dass dieser nach der Fallstrecke s_3 den zuerst geworfenen Stein einholt. Geben Sie den Zeitpunkt t_2 an, zu welchem der zweite Stein geworfen werden muss! Zu welcher Zeit t_3 treffen sich beide Steine?
Geg.: v_{22} = 5 ms^{-1}, s_3 = 10 m

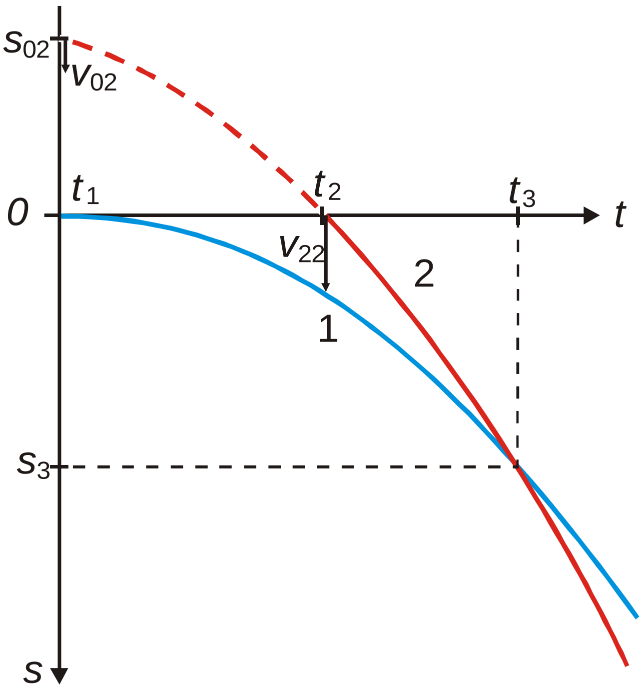
3. Lösungswege

a) mittels unbestimmter Integration

Da es sich bei beiden Steinen um den senkrechten Wurf mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen handelt ist die Beschleunigung konstant und die Zeitabhängigkeit der Positionen der Punktmassen (PM) genügen Beziehungen der Gestalt

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \quad . \qquad (3)$$

Dieser Ausdruck ist das Ergebnis einer zweifachen Integration der konstanten(!) Beschleunigung a über die Zeit. Für beide PM ergeben sich für $s_1(t)$ und $s_2(t)$ somit Parabelbögen. Eine Skizze ist jetzt möglich und immer vorteilhaft, dadurch bekommen wir eine bessere Vorstellung vom Vorgang. Zunächst werden der Nullpunkt für die Ortsmessung sowie ein Richtungssinn festgelegt (willkürlich, hier nach unten).



Anschaulich beschreibt der im folgenden skizzierte Lösungsweg diesen Vorgang: Beide PM werden zur gleichen Zeit (!) geworfen. Während PM1 mit der Anfangsgeschwindigkeit gleich Null aus der Nullposition fallen gelassen wird (blaue Kurve 1), wird PM2 aus der Höhe von s_{02} (negativer Wert, weil die Achsenrichtung von s nach unten zeigt) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{02} (positiver Wert) nach unten geworfen (gestrichelte rote Kurve 2), passiert die Position Null nach t_2 und (durchgezogene rote Kurve 2) holt die PM1 nach t_3 an der Stelle s_3 endlich ein. Dass der wirkliche Vorgang etwas anders verläuft, ist vom Standpunkt der Kinematik aus betrachtet unerheblich. Gleichung (3) gilt für den senkrechten Wurf, der zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt. Das trifft für die zuerst fallen gelassene PM1 zu. Mit den Anfangsbedingungen $v_{01} = s_{01} = 0$ erhält man

$$s_1(t) = \frac{g}{2}t^2. \qquad (4)$$

Für die zweite PM gilt formal

$$s_2(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_{02}t + s_{02}. \qquad (5)$$

Problematisch ist hierbei jedoch, dass die angegebenen Nebenbedingungen ziemlich unhandlich sind: $s_2(t_2) = 0$; $v_2(t_2) = v_{22}$; $s_1(t_3) = s_3$; $s_2(t_3) = s_3$. Da sowohl v_{02} und s_{02} als auch t_2 und t_3 unbekannt sind, hat man ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen aufzulösen, was ein ziemlich mühsames Geschäft ist. Man erhält schließlich als Ergebnis die Anfangswerte von PM2:

$$s_{02} = 2s_3 - \sqrt{4s_3^2 + \frac{2v_{22}^2 s_3}{g}};\ \ v_{02} = -\sqrt{2gs_3} + \sqrt{2gs_3 + v_{22}^2}. \qquad (6)$$

In den Ausdruck (5) eingesetzt, kann man damit den Schnittpunkt von $s_2(t)$ mit der t-Achse bestimmen (liefert t_2) sowie den Schnittpunkt mit $s_1(t)$, was t_3 ergibt.
Überprüfen Sie die Beziehung (6) und führen Sie die Lösung der Aufgabe in der skizzierten Weise bis zum Ende durch!

b) Lösungsweg mittels bestimmter Integration
Da zwei Nebenbedingungen die in Zeit*intervallen* zurückgelegten Strecken enthält, erscheint es vorteilhaft, diese durch bestimmte Integrale auszudrücken:

$s_3 = \int_{t_2}^{t_3} v_2\,dt = \int_0^{t_3} v_1\,dt$. Mit den Anfangswerten $v_{01} = 0$ sowie $s_{01} = s_{02} = 0$ erhält man $v_1 = gt$ und $v_2 = gt + v_{02}$. Die bestimmte Integration ergibt für die PM1

$$s_3 = \frac{g}{2}t_3^2 \qquad (7)$$

und für die PM2

$$s_3 = \frac{g}{2}(t_3^2 - t_2^2) + v_{02}(t_3 - t_2). \qquad (8)$$

Mit der aus der Nebenbedingung für die Abwurfgeschwindigkeit von PM2 folgenden Beziehung

$$v_{22} = g\,t_2 + v_{02} \qquad (9)$$

erhält man mit (7-9) ein Gleichungssystem für nur 3 Unbekannte: v_{02}, t_2 und t_3. Dieses kann leicht dadurch vereinfacht werden, dass die nicht explizit zu berechnende Anfangsgeschwindigkeit v_{02} von PM2 in (8) leicht durch (9) eliminiert werden kann.
Lösen Sie dieses Gleichungssystem auf und bestimmen Sie t_2 und t_3!

c)Lösung mittels Zeittransformation

Die Lösung lässt sich deutlich vereinfachen durch eine Zeittransformation $t \to t - t_2$. Die PM2 beginnt ja ihre Bahnbewegung erst zu einem um t_2 späteren Zeitpunkt, und für diesen sind die Anfangswerte gegeben. Wir verschieben formal die Zeitskala um t_2 und erhalten mit

$$s_2(t) = \frac{g}{2}(t - t_2)^2 + v_{22}(t - t_2) \qquad (10)$$

einen Ausdruck, der die gleiche Struktur hat wie (3), aber sofort die gegebenen Randbedingungen erfüllt: $s_2(t_2) = 0;\ v_2(t_2) = v_{22}$. Die Zeit t kann hierbei für beide PM gemeinsam auf der einen Uhr abgelesen werden, die zu dem Zeitpunkt zu messen beginnt, an dem die PM1 fallen gelassen wird. Beide PM treffen sich zu einem unbekannten Zeitpunkt t_3 an der gegebenen Position s_3. Hieraus resultieren 2 Gleichungen mit nur noch 2 Unbekannten t_2 und t_3:

$$s_3 = \frac{g}{2}(t_3 - t_2)^2 + v_{22}(t_3 - t_2) \qquad (11)$$

$$s_3 = \frac{g}{2} t_3^2 . \qquad (12)$$

Man setzt (11) und (12) gleich und löst die quadratische Gleichung nach t_2 auf, das Ergebnis lautet

$$t_2 = \frac{v_{22}}{g} + t_3 \pm \sqrt{\frac{v_{22}^2}{g^2} + t_3^2} \ . \qquad (13)$$

Da s_3 gegeben ist, kann die Zeit des Zusammentreffens t_3 leicht bestimmt werden:

$t_3 = \pm\sqrt{\frac{2s_3}{g}} = \underline{\underline{\pm 1{,}43s}}$. Physikalisch relevant ist der positive Wert. Für t_2 erhält man aus (13)

$$t_2 = \frac{5ms^{-1}}{9{,}81ms^{-2}} + 1{,}43s \pm \sqrt{\frac{25m^2s^{-2}}{9{,}81^2 m^2 s^{-4}} + \frac{20m}{9{,}81ms^{-2}}} = 0{,}51s + 1{,}43s - 1{,}52s = \underline{\underline{0{,}42s}}$$

Angegeben ist die dem physikalische Ablauf entsprechende Lösung.

Fazit:

Es ist wie beim Boxkampf. Gegner ist die gestellte Aufgabe. Wenn Sie gut trainiert sind, nicht nur über viele verschiedene Methoden verfügen, sondern auch gute Kondition, werden Sie in kurzer Zeit zum Sieger erklärt. Sie haben einfach schnell die beste Taktik heraus gefunden und die „schwache Stelle“ des Gegners erkannt. Andere Wege führen auch zum Ziel, man muss aber ein paar Runden länger kämpfen und dann ist Kondition gefragt. Wer nicht durchsteht, verliert nach Punkten, wer falsch integriert, geht k.o.

4. Häufige Fehler bei der Behandlung solcher Aufgaben

- Die Bezugsrichtung wird nicht beachtet. Hieraus resultieren falsche Vorzeichen der Bewegungsgrößen, z.B. Beschleunigung, Anfangsgeschwindigkeit.
- Der Ausdruck (3) gilt nur für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Das ist ein Sonderfall. Allgemein gilt $a = a(t)$. Zur Bestimmung von Geschwindigkeit und Ort ist „ehrlich“ über die Zeit zu integrieren.
- Stets ist es zu vermeiden, mit gegebenen Zahlenwerten in Zwischenergebnissen zu operieren, bevor ein endgültiger Ausdruck umgeformt wurde, der die zahlenwertmäßige Bestimmung der Unbekannten ermöglicht.