Übungsaufgaben 2 Kinematik, mehrdimensionale Bewegung

1. Allgemeine Hinweise:

Gegenstand der Kinematik der räumlichen Translation sind die Beziehungen zwischen den Größen $\vec{s}(t), \vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$, mit denen die Bewegung von einer oder mehrerer Punktmassen entlang ihrer i.a. gekrümmten Bahnkurven beschrieben wird. Unter Berücksichtigung des Vektorcharakters erhält man ganz ähnlich Beziehungen wie bei der linearen Translation:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{s}(t) = \ddot{\vec{s}} \qquad \vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C} \qquad \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{s}(t) = \dot{\vec{s}} \qquad \vec{s}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C} \qquad \vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt \tag{1}$$

Die Integrationskonstante $\vec{C}$ ist zunächst unbestimmt und wird im konkreten Fall durch eine *Rand- oder Nebenbedingung* festgelegt. Bei der *bestimmten* Integration erhält man Differenzen, z.B. beschreibt man mit $\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ die im betrachteten Zeitintervall eingetretene Geschwindigkeitsänderung. Aktuelle Werte lassen sich auch durch bestimmte Integration angeben, z.B. die Position $\vec{s}(t)$:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}(t) - \vec{s}(t_1) + \vec{s}(t_1) = \int_{t_1}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{s}(t_1) \ . \tag{2}$$

Der ggf. bekannte Vektor $\vec{s}(t_1)$ muss dann nur zum bestimmten Integral addiert werden, dessen obere Grenze mit *t* variabel gestaltet wird.
Oft werden die Vektoren mit kartesischen Koordinaten beschrieben. Der Vektor $\vec{v}(t)$ beispielsweise wird dabei als Summe dreier rechtwinklig orientierter *Komponenten* dargestellt: $\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t) + \vec{v}_z(t)$. Jede Komponente ist das Produkt von *Koordinate* und Richtungsvektor (Einheitsvektor) $\vec{v}(t) = v_x\vec{e}_x(t) + v_y\vec{e}_y(t) + v_z\vec{e}_z(t)$. Alle Vektoren in Glg.1 können so in Summen von Bewegungen zerlegt werden, die wegen des *Unabhängigkeitsprinzips* einzeln beschrieben werden können. Handelt es sich bei dem Koordinatensystem um ein Inertialsystem (es ruht oder bewegt sich gleichförmig), sind die Einheitsvektoren konstant. Jede Vektorgleichung in (1) kann dann durch ihre drei Koordinatengleichungen ersetzt werden:

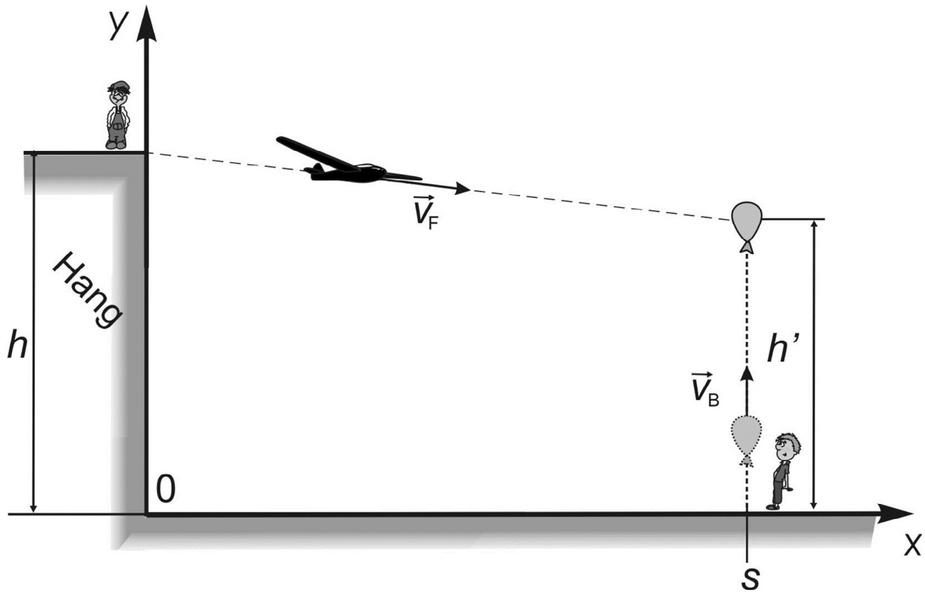
$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C} \Rightarrow \begin{aligned} v_x(t) &= \int v_x(t)\,dt + C_x \\ v_y(t) &= \int v_y(t)\,dt + C_y \\ v_z(t) &= \int v_z(t)\,dt + C_z \end{aligned}$$

Das aus solchen Gleichungen gebildete Gleichungssystem muss nach den gesuchten Größen aufgelöst werden.

2. Beispielaufgabe für gleichförmige Bewegungen in einer Ebene

1.) Max steht mit seinem Modellflugzeug auf einem Steilhang. Das Flugmodell hat eine Gleitzahl n, was bedeutet, dass es aus einer Höhe h eine horizontale Strecke $n \cdot h$ abgleiten kann, bis es auf dem Boden aufschlägt. Weit entfernt unten in der Talebene sieht er, wie Moritz zur Zeit $t = 0$ einen Gasballon aufsteigen lässt. Dieser steigt mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_B(t)$ senkrecht nach oben. Zum Zeitpunkt t_0 nach dem Start des Ballons startet Max sein Modellflugzeug, welches mit einer in Betrag und Richtung stets konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_F(t)$ direkt auf den Ballon zu fliegt und ihn treffen soll. Es herrscht völlige Windstille.

a) Geben Sie die Vektoren $\vec{v}_F(t), \vec{v}_B(t), \vec{r}_F(t)$ und $\vec{r}_B(t)$ an.
b) In welcher Höhe h' stoßen Ballon und Flugmodell zusammen?
c) Zu welchem Zeitpunkt t_E erfolgt der Zusammenstoß?
d) Zu welchem Zeitpunkt t_0 muss Max das Flugmodell starten?
e) Welche weiteren Bedingungen (verbal angeben) müssen erfüllt sein, damit es überhaupt zu einem Zusammenstoß kommen kann?



geg.: n, s, h, v_B, v_F

Lösung:

a) Das Koordinatensystem ist bereits vorgegeben. Beide Körper bewegen sich gleichförmig, also unbeschleunigt mit in Betrag und Richtung konstanten Geschwindigkeiten. Der Ballon bewegt sich in Richtung der y-Achse, das Flugmodell leicht geneigt, sein Richtungsvektor $\vec{e}_F$ ist aus der Gleitzahl zu bestimmen.

Ballon: $\vec{v}_B = v_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{r}_B = \vec{v}_B\, t + \vec{r}_B(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_B\, t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ v_B\, t \end{pmatrix}$

Flugmodell: $\vec{v}_F = v_F\, \vec{e}_F = v_F \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix}$; der Einheitsvektor beschreibt eine Bewegung, die in (positiver) x-Richtung n-mal schneller ist als in (negativer) y-Richtung. Die gleichförmige Bewegung des Modells beginnt ab dem Zeitpunkt t_0 von der Hangkante aus der Höhe h:

$$\vec{r}_F = \vec{v}_F \cdot (t - t_0) + \vec{r}_F(t_0) = \frac{v_F \cdot (t - t_0)}{\sqrt{n^2+1}} \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

b) Das Flugzeug verliert den n-ten Teil der horizontalen Wegstrecke s an Höhe Δh

$\Delta h = h - h' = \dfrac{s}{n}$; $h' = h - \dfrac{s}{n}$, in dieser Höhe trifft er auf den Ballon.

c) Zu diesem Zeitpunkt t_E sind die Koordinaten von Ballon und Flugmodell identisch:

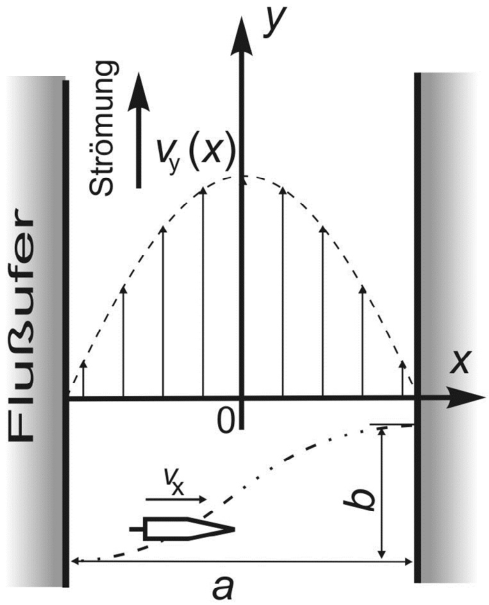
$$\vec{r}_B(t_E) = \vec{r}_F(t_E) = \begin{pmatrix} s \\ h' \end{pmatrix}; \; \vec{v}_B \cdot t_E = h' = h - \frac{s}{n}; \; t_E = \frac{h - \frac{s}{n}}{v_B}.$$

d) $v_F \cdot (t_E - t_0)\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = s; \quad t_0 = t_E - \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n\, v_F} s$

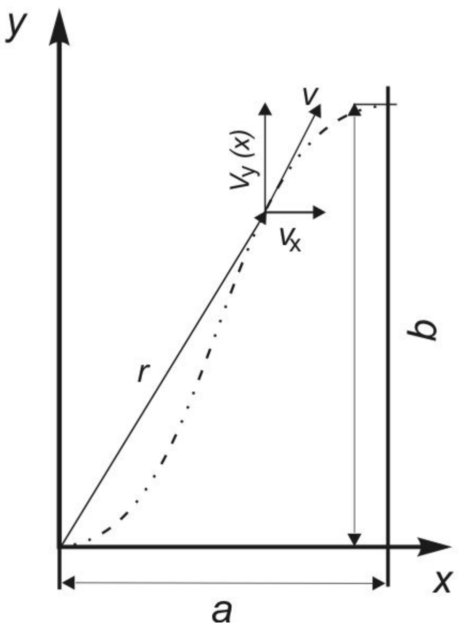
e) Wenn die Höhe nicht ausreichend ist, bzw. der Ballon zu weit weg ist, landet das Flugzeug, bevor es die Position s erreicht hat, also muss gelten $h' > 0$.
Wenn des Flugzeug nicht schnell genug ist, steigt der Ballon über die Höhe h', bevor das Flugzeug da ist, selbst wenn es gleichzeitig mit dem Ballon startet. Somit muss gelten $t_0 > 0$.

3. Beispielaufgabe für die Überlagerung von Bewegungen

Ein Fluss hat die Breite a. Er wird von einem Boot mit der Eigengeschwindigkeit v_B überquert.
Um welche Strecke b wird das Boot bis zum Erreichen des gegenüberliegenden Ufers abgetrieben, wenn es senkrecht darauf zusteuert ($v_B = v_x$) und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ($v_F = v_y$) vom Uferabstand abhängt:
$v_y\,(x) = c\,(a/2 - x)\,(a/2 + x)$?
geg.: $a = 100$ m, $v_B = 1$ m/s, $c = 0{,}3 * 10^{-3}$ m^{-1} s^{-1}



Lösung: Eine Skizze ist <u>immer</u> von Vorteil:



Strategie: Da die Bahnkurve als Gesamtheit der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}(t)$ des Bootes das Integral über die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ darstellt, muss diese in ihren Koordinaten und deren expliziter Zeitabhängigkeit (!) aufgeschrieben und über die Zeit integriert werden. Die y-Koordinate des Ortsvektors zum Zeitpunkt t_E, zu welchem das Boot das gegenüberliegende Ufer erreicht, ist die gesuchte Abdrift.
Bei dieser Aufgabe ist ein häufig auftretender Fehler, daß nicht erkannt wird, dass in der gegebenen Abhängigkeit der y-Koordinate der Strömungsgeschwindigkeit von der x-Koordinate des Ortsvektors eine Zeitabhängigkeit verborgen ist.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad v_x = v_B = \text{const.}, \; v_y\,(x) = c\,x\,(a - x)$

allgemein gilt: $\vec{r}(t) = \int_0^{t_E} \vec{v}\,dt + \vec{r}_0$, für unseren speziellen Fall ist das Koordinatensystem so festgelegt, dass $x(0) = -a/2$ und $y(0) = 0$ gilt. Die x-Koordinate des Ortsvektors kann leicht berechnet werden, da die Geschwindigkeit in dieser Richtung konstant ist: $x = \int_0^t v_x dt' + x_0 = \int_0^t v_B\, dt' + x_0 = v_B\, t - \dfrac{a}{2}$. Hieraus lässt sich gleich die Gesamtzeit berechnen, da die Breite des Flusses bekannt ist, somit

$x(t_E) = v_B t_E - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$, folglich $\quad t_E = \dfrac{a}{v_B}$.

Da die x-Koordinate des Ortsvektors jetzt in ihrer Zeitabhängigkeit bekannt ist, kann die Integration über die y-Koordinate der Geschwindigkeit (ehrlich) ausgeführt werden.

$$y(t)=\int_0^t v_y dt' = \int_0^t c\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}+x\right)dt' = c\,v_B\int_0^t t'(a-v_B t')dt' = c\,v_B\left(\frac{t^2}{2}a-\frac{v_B}{3}t^3\right).$$

Setzt man in das Ergebnis t_E ein, erhält man die Abdrift

$$b=y(t_E)=c\,v_B\left(\frac{a^3}{2v_B^2}-\frac{a^3}{3v_B^2}\right)=\frac{c}{6}\frac{a^3}{v_B}=50\text{m}\,.$$