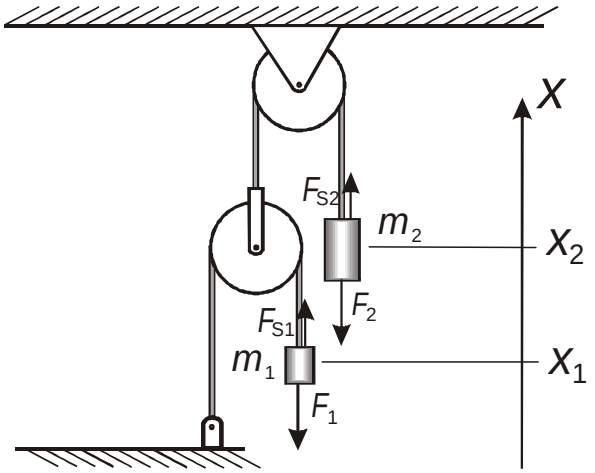
Hinweise zur Lösung von Aufgaben aus dem Bereich Dynamik

Wenn an einer Punktmasse (PM) oder mehreren Kräfte angreifen, welche den Bewegungszustand der PM oder des PM-Systems ändern, kann dieser Vorgang unter Anwendung der Newtonschen Axiome beschrieben werden. Man geht hierzu wie folgt vor:

1. In eine (nicht zu kleine) Skizze werden die *eingeprägten* Kräfte eingezeichnet und benannt.
2. Ist durch äußere Bedingungen eine Trajektorie festgelegt, bildet man durch Projektion die Komponenten dieser Kräfte auf die Bewegungsrichtung
3. Man legt eine Koordinatenachse in Bewegungsrichtung (Richtungssinn ist frei), bei mehrdimensionaler Bewegung wird ein rechtes Koordinatensystem festgelegt.
4. Für jede Punktmasse m_k wird die Bewegungsgleichung (2. Newtonsches Axiom) aufgeschrieben: $\sum_i \vec{F}_{ik} = m_k \vec{a}_k$, aus den Vektorgleichungen werden jeweils bis zu 3 Gleichungen (bei 3D-Bewegung) in den Koordinaten gebildet.
5. Sind Randbedingungen auferlegt, ergeben sich weitere Gleichungen, die das Gleichungssystem vervollständigen.
6. Das System wird aufgelöst und formale Beziehungen für die interessierenden Unbekannten erhalten.
7. Diese Beziehungen werden auf Sinnfälligkeit interpretiert – verhält sich die Lösung so wie erwartet, gibt es Widersprüche?
8. Sind Werte gegeben, so werden diese (erst jetzt!) eingesetzt und ausgerechnet.



Als Illustration eine Prüfungsaufgabe von 1995:

Stellen Sie zu nebenstehender Abbildung die Bewegungsgleichungen für die bekannten Massen m_1 und m_2 auf, berechnen Sie die Beschleunigungen beider Massen sowie die Zugkräfte in beiden Seilen (Vernachlässigung von Seil- und Rollenmassen sowie Reibungskräften)!
Hinweis: Beachten Sie, dass es sich um je eine „lose“ und „feste“ Rolle handelt!

Lösung: Auf einer Koordinatenachse x (nach oben gerichtet) werden die Koordinaten x_1 und x_2 der Massen m_1 und m_2 aufgetragen. An m_1 greift die Gewichtskraft $\vec{F}_1 = m_1 \vec{g}$ sowie die (unbekannte) Seilkraft $\vec{F}_{S1}$ an. Analoges gilt für m_2. Die vektorielle Bewegungsgleichung (2.N. Axiom) wird für jede Masse aufgeschrieben: $\vec{F}_{S1} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$; $\vec{F}_{S2} + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2$. Da die Kräfte ausschließlich in x-Richtung wirken und die Bewegung auch nur in dieser Richtung stattfindet, sind nur die Gleichungen in den x-Koordinaten nichttrivial (von Null verschieden). Somit erhalten wir 2 Bewegungsgleichungen in den x-Koordinaten:

(1) $m_1 a_{1x} = m_1 \ddot{x}_1 = F_{S1} - m_1 g$

(2) $m_2 a_{2x} = m_2 \ddot{x}_2 = F_{S2} - m_2 g$

Da es sich um eine lose und eine feste Rolle handelt, erhalten wir weitere Beziehungen zwischen den Auslenkungen der Massen aus den Ruhelagen Δx_1, Δx_2 sowie den Seilkräften.

(3) $F_{S2} = 2F_{S1}$

$$\Delta x_1 = -2\Delta x_2 \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = -2\frac{\Delta x_2}{\Delta t} \Rightarrow \dot{x}_1 = -2\dot{x}_2 \Rightarrow$$

(4) $\ddot{x}_1 = -2\ddot{x}_2$

Insgesamt handelt es sich also um ein System mit 4 Gleichungen.

Hieraus können Sie leicht die Beschleunigungen und Seilkräfte ermitteln. Bei richtiger Rechnung erhalten Sie z.B. $F_{S1} = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$ und $\ddot{x}_1 = \frac{2m_2 - 4m_1}{4m_1 + m_2}g$.

Dieses Ergebnis sollten Sie zunächst einer kritischen Überprüfung unterziehen. Stimmen die Dimensionen auf beiden Seiten der Gleichungen überein? Bei Brüchen darf der Nenner nicht gleich Null werden, da sonst der Quotient divergiert, was meist auf ein fehlerhaftes Ergebnis hinweist. Ist das Ergebnis physikalisch relevant, steht es nicht in krassem Widerspruch zu unseren Erwartungen?
Die Beschleunigung von m_1 wird gleich Null, wenn $m_2 = 2m_1$. Dann sind beide Massen im Gleichgewicht. Dies sollte wegen der Eigenschaften der losen Rolle auch so sein. Wenn nur eine der Massen gleich Null ist, sind beide Seilkräfte gleich Null und die andere Masse fällt ungehindert mit der Fallbeschleunigung –g. Auch diese Erfahrung wird durch das Ergebnis bestätigt, es wird also richtig sein.

Häufige Fehler bei der Bearbeitung derartiger Probleme:

- Die Skizze ist zu klein und unübersichtlich
- Es werden nicht nur die Wechselwirkungskräfte eingetragen, sondern ohne Unterscheidung auch deren Komponenten, dazu Scheinkräfte und Gegenkräfte. Die Punktmassen gleichen dann eher Seeigeln oder Weihnachtssternen. Wenn Komponenten der eingeprägten Kräfte eingezeichnet werden, dann sind sie als solche zu kennzeichnen (farblich oder durch Index).
- <u>Kraftvektoren werden immer addiert, also mit „+“ verknüpft, unabhängig von ihrer Richtung!</u> Oftmals findet man z.B. für die aktuelle Aufgabenstellung die falsche Gleichung $\vec{F}_{S1} - m_1\,\vec{g} = m_1\,\vec{a}_1$. Das falsche Minuszeichen wird dadurch begründet, dass ja die Gewichtskraft entgegen der *x*-Richtung wirkt. Die Gewichtskraft von m_1 ist aber **immer** $\vec{F}_{g1} = +m_1\,\vec{g}$, egal ob ein Koordinatensystem definiert wurde oder nicht, gleiches „+“ gilt für alle anderen Kräfte. Wird ein Koordinatensystem eingeführt, ergeben sich aus den Vektorgleichungen jeweils drei Gleichungen in den *Komponenten* der Vektoren. Auch diese sind Vektorgleichungen, aber jeweils nur eindimensionale. In unserem Fall von Null verschieden sind nur die *x*-Komponenten der Vektoren in den Bewegungsgleichungen beider Massen, z.B. gilt für m_1: $\vec{F}_{S1x} + m_1\,\vec{g}_x = m_1\,\vec{a}_{1x}$. Bildet man die Projektion der Vektoren auf die durch den Einheitsvektor $\vec{e}_x$ vorgegebene *x*-Richtung, erhält man $(F_{S1x})\vec{e}_x + (m_1\,g_x)\vec{e}_x = (m_1\,a_{1x})\vec{e}_x$, im aktuellen Fall mit nach oben gerichteter *x*-Achse gilt für die *Koordinaten* $(F_{S1x}) = +F_{S1}$, $(m_1\,g_x) = -m_1\,g$ und man erhält endlich die Bewegungsgleichung als skalare Gleichung der *x-Koordinaten*: $F_{S1} - m_1\,g = m_1\,a_{1x} = m_1\ddot{x}_1$. Wirklich erst in dieser letzten Gleichung wird die Wahl des Koordinatensystems in den an dieses System geknüpften Koordinaten sichtbar! Natürlich beziehen sich die Lösungen der Bewegungsgleichung ebenfalls auf das verwendete Koordinatensystem. So ändert z.B. die *x*-Koordinate der Beschleunigung ihr Vorzeichen, wenn die Richtung der *x*-Achse entgegengesetzt gewählt wird. Allgemein gilt aber immer:

Von der Wahl des Koordinatensystems hängt die Physik nicht ab!