Zur Bewegungsgleichung und deren Lösung

Als Bewegungsgleichung bezeichnet man stets das Ergebnis der Anwendung der Grundgesetze der Mechanik in der Form

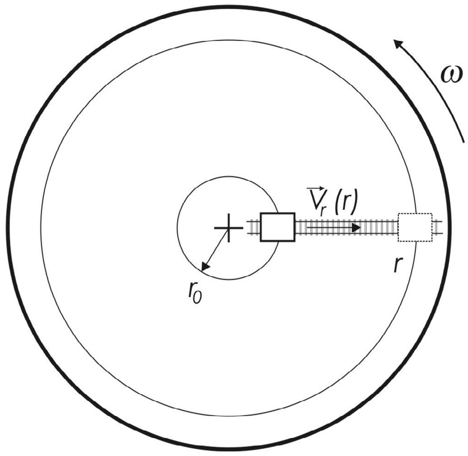
$$\ddot{x}(t) = a \cdot \dot{x}(t) + b \cdot x(t) + c \qquad (1)$$

mit den konstanten Faktoren *a, b, c*. Die *allgemeine* Lösung dieser sog. *Differentialgleichung* ist eine Funktion $x(t)$, welche Glg.(1) erfüllt und stets ein oder mehrere frei wählbare Parameter enthält. Da die höchste in der Diff.-Glg. enthaltene Ordnung einer Zeitableitung eine solche 2. Ordnung ist, muss die *allgemeine* Lösung auch 2 freie Parameter enthalten. Um die Funktion $x(t)$ zu erhalten, muss $\ddot{x}(t)$ zwei Mal integriert werden, wobei jede Integration eine weitere Integrationskonstante einbringt. Die *allgemeine* Lösung bildet somit eigentlich eine ganze Schar von Funktionen. Die *spezielle* Lösung ist die einzige Funktion aus dieser Schar von Lösungen, welche 2 gestellte Nebenbedingungen erfüllt. Durch die Nebenbedingungen sind zusätzliche Gleichungen gegeben, wodurch die frei wählbaren Parameter auf bestimmte Werte festgelegt werden.

Beispiel (senkrechter Wurf): Die Anwendung der Grundgleichung der Mechanik liefert die Gleichung $m\ddot{x} = -mg$ und hieraus folgt die Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -g$ lautet. Die Lösung dieser Diff.-Glg. erhält man durch zweifache Integration über die Zeit und ist die Ihnen bekannte Funktion $x(t) = \frac{-g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$. Die beiden frei wählbaren Parameter sind v_0 und x_0.
Die spezielle Lösung erfordert die Vorgabe von 2 Nebenbedingungen, z.B. ergibt sich für die Nebenbedingungen $x(t{=}0) = h$ und $v(t{=}0) = 0$ die ihnen ebenfalls bekannte spezielle Lösung $x(t) = \frac{-g}{2}t^2 + h$.
In der Regel ist die Beschleunigung jedoch nicht zeitlich konstant und die Bewegungsgleichung nicht durch Integration einer Konstanten zu lösen. Wie integriert man unbekannte Zeitableitungen einer unbekannten Funktion? Immerhin ist bekannt, dass diese Funktion und deren Zeitableitungen eine Gleichung erfüllen, eben die Bewegungsgleichung (1). Die Differentialgleichungen, mit denen Sie in der Dynamik konfrontiert werden sind meist von 2.Ordnung. Es treten darin somit prinzipiell auch Ableitungen 1. und 0. Ordnung auf. Die Faktoren *a, b, c* in Glg.(1) sind Konstanten. Lösungen von Gleichungen dieses Typs enthalten stets Exponentialfunktionen. Ein gängiges Verfahren besteht in diesem Fall darin, zwei unterschiedliche Exponentialfunktionen zu finden (durch Probieren), die jeweils eine (spezielle) Lösung der Gleichung darstellen. Durch eine Linearkombination beider Lösungen erhält man dann die allgemeine Lösung.
Ein Exponentialansatz hat die Form $x(t) = x_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$. Die Konstante x_0 ist zunächst willkürlich und hat die gleiche Maßeinheit wie x. Da im Exponenten eine Zahl stehen muss, ist der Faktor λ (mit der Maßeinheit s^{-1}) notwendig. Der Wert von λ ergibt sich, wenn man den Lösungsansatz nach t differenziert und in die Gleichung einsetzt. Bei einer Diff.-Glg. 2. Ordnung ergeben sich zwei unterschiedliche Werte für λ und damit die gesuchten zwei unterschiedlichen Lösungsfunktionen.
So lösen Sie die aktuell gestellte Aufgabe: Sie suchen mittels eines Exponentialansatzes 2 unterschiedliche Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Bewegungsgleichung und bilden deren Linearkombination: $x(t) = Ax_1(t)+Bx_2(t)$. Die beiden zunächst völlig willkürlichen Faktoren A und B werden bei der speziellen Lösung durch die beiden Randbedingungen festgelegt.

Wenn Sie im Mathebuch nachschlagen unter: "Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" (das ist der hier vorliegende Typ), werden Sie rasch mit guten Hinweisen belohnt.

Prüfungsaufgabe 2008



Auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kreisscheibe befindet sich ein kleines Wägelchen im Abstand r_0 von der Rotationsachse auf einer in radialer Richtung montierten Schiene. Ein Beobachter befindet sich im Zentrum der Scheibe, rotiert mit der Scheibe mit und beobachtet das Wägelchen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ löst er die Arretierung und beobachtet, dass sich der Wagen beschleunigt nach außen bewegt (Reibung ist zu vernachlässigen; ω bleibt konstant).

a) Charakterisieren Sie die Kraft, welche den Wagen in radialer Richtung beschleunigt.
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf für die Bewegung des Wägelchens in radialer Richtung.
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $r(t)$ der Bewegungsgleichung.
d) Wie lautet die spezielle Lösung mit den Randbedingungen $r(t=0) = r_0$ und $v_r(t=0) = 0$?
e) Eine halbe Umdrehung nach Freigabe des Wägelchens ist der Abstand von der Rotationsachse auf welchen Wert angewachsen?
   Geg.: ω, r_0

Lösung:

a) Diese Kraft wird als *Zentrifugalkraft* bezeichnet und ist eine *Schein*kraft. Sie ist somit nicht Folge einer Wechselwirkung (keine *eingeprägte* Kraft) sondern der trägen Masse des Körpers (*Trägheitskraft*).
b) Eine Punktmasse m die sich auf einer Kreisbahn von Radius r mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bewegt, befindet sich für den mitbewegten Beobachter in Ruhe. Nach dem *d'Alembertschen* Prinzip befindet sich ein Körper im beschleunigten Bezugssystem dann in Ruhe, wenn die Summe aller eingeprägten Kräfte und Scheinkräfte gleich Null ist. Die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ ist Gegenkraft zu der Radialkraft $\vec{F}_r$, die einen Körper auf der Kreisbahn hält (*Zwangskraft*). In diesem Fall gilt also $\vec{F}_Z + \vec{F}_r = 0$. Da in radialer Richtung im aktuellen Fall aber keine Zwangskraft wirken soll ($\vec{F}_r = 0$), tritt für den im Zentrum der Scheibe mitrotierenden Beobachter eine Radialbeschleunigung $m\ddot{r}$ auf:
   $m\ddot{r} = m\,\omega^2 r$. In der Normalform lautet diese Differentialgleichung 2. Ordnung
   $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$
c) Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt mittels *Exponentialansatz*
   $r(t) = c\,e^{\lambda t}$
   Dieser Ansatz wird zweimal nach t differenziert und in die DGlg. eingesetzt:
   $c\,\lambda^2 e^{\lambda t} - \omega^2 c\,e^{\lambda t} = 0$. Man erhält die *charakteristische Gleichung*
   $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ mit den beiden reellen Wurzeln $\lambda_{1,2} = \pm\,\omega$. Die den beiden Wurzeln entsprechenden Lösungsfunktionen werden linear miteinander kombiniert und bilden die *allgemeine Lösung*:
   $r(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$
d) Die Nebenbedingungen werden eingesetzt:
   $r(0) = r_0 = c_1 + c_2$
   $\dot{r}(t) = c_1 \omega\, e^{\omega t} - c_2 \omega\, e^{-\omega t}$
   $\dot{r}(0) = c_1\omega - c_2\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dfrac{r_0}{2}$

Man erhält die diesen Nebenbedingungen genügende spezielle Lösung (cosh = cosinus hyperbolicus)

$$\underline{r(t)=\frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)=r_0\cosh\omega t}$$

e) Die für eine halbe Umdrehung benötigte Zeit entspricht einer halben Periode

$$\omega t_{1/2}=\omega\frac{T}{2}=\pi$$

$$\underline{r(T/2)=\frac{r_0}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\simeq 11{,}6\,r_0}$$