Hinweise zur Behandlung von Problemen unter Anwendung des Impulserhaltungssatzes

1. Die Anwendung des Impulserhaltungssatzes (IES) setzt dessen Gültigkeit voraus. Das muss also zuerst überprüft werden: Verschwindet die Summe aller auf ein Punktmassensystem (PMS) einwirkenden äußeren Kräfte, so ändert sich der Gesamtimpuls des PMS nicht. Wegen des 3. Newtonschen Axioms gilt der Impulserhaltungssatz für ein *abgeschlossenes* System (keine äußeren Kräfte) immer. Formal lautet der IES

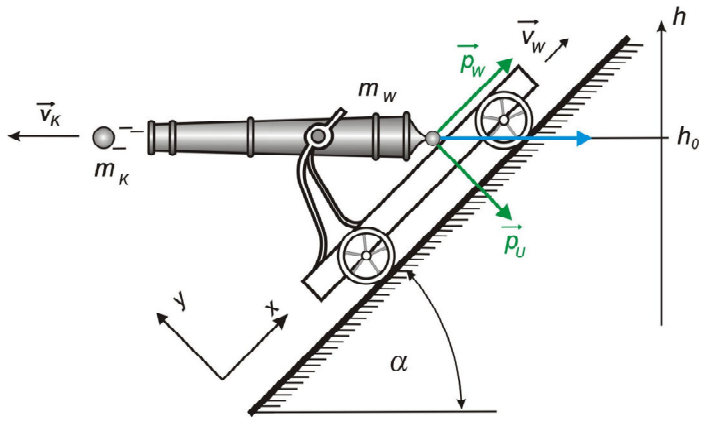
$$\sum_{äussere} \vec{F}_i + \sum_{innere} \vec{F}_j = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_k m_k \vec{v}_k = m_{ges}\vec{v}_S = const.$$

Zu beachten ist dabei der Vektorcharakter. Generell besteht der IES somit aus drei Gleichungen in den drei Raumrichtungen. Dabei ist es aber sehr gut möglich, dass der IES auch nur in einer oder zwei Komponenten erfüllt ist und in den/der anderen nicht. Somit ist es wieder wichtig, sich zu Beginn eine genaue Übersicht über die angreifenden äußeren Kräfte zu machen.

2. Vorgehensweise:

- In eine ausreichend große Skizze werden an allen Punktmassen des Systems die angreifenden Kräfte sowie Kraftstöße $\int \vec{F}\, dt$ eingezeichnet. Ist offensichtlich, dass sie in ihrer Summe verschwinden bzw. die Summe ihrer Komponenten in einer oder mehrerer Richtungen, gilt für diese Richtungen der IES.
- Lässt die Aufgabenstellung den Schluss zu, dass sich während des ablaufenden Prozesses der Schwerpunkt des Systems in einer oder mehrerer Raumrichtungen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (oder in Ruhe verharrt), gilt für diese Richtungen der IES.
- Es wird ein Koordinatensystem festgelegt, sinnvoll ist meist die Orientierung der Achsen so, dass sie in Richtungen zeigen, in denen der IES gilt.
- Für diese Richtungen wird der IES formuliert. Hierbei werden meist zwei oder mehr zeitlich getrennte Zustände des PMS betrachtet, für die die Summe der Impulskoordinaten gleich sind.
- Stets ist auch zu prüfen, ob sich auch der Energieerhaltungssatz (EES) anwenden lässt. Es ist aber falsch, aus der Anwendbarkeit des einen auf die solche des anderen Erhaltungssatzes zu schließen!

3. Prüfungsaufgabe zur Illustration:



Eine (Spielzeug-!)Kanone ist fest auf einem Wägelchen (Gesamtmasse mit Kanone m_W) montiert, welches reibungsfrei auf einer Schiene fahren kann. Der Schwerpunkt der Waggonkanone befindet sich auf der Höhe h_0. Die Schiene ist um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt, ein Bremsklotz sichert vor dem Herabrollen. Geladen wird die Kanone mit einer Kugel der Masse m_K. Die Spiralfeder (Masse vernachlässigbar klein) mit der Federkonstante k wird gespannt (Auslenkung s aus der Ruhelage). Beim Entspannen der Feder wird die Kugel auf die Geschwindigkeit $\vec{v}_K$ in genau horizontaler Richtung beschleunigt, die Kanone samt Wägelchen rollt infolge des Rückstoßes auf der Schiene nach oben. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_W hat das Wägelchen unmittelbar nach Entspannen der Feder, wie weit rollt es nach oben bis zum Stillstand und wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit der Kugel v_K ?

Gegebene Größen: h_0, α, m_K, m_W, k, s.

Hinweis: Der beim Abschuß als Rückstoß auftretende Gegenimpuls wird in zwei zueinander senkrechten Komponenten wirksam: $\vec{p}_W$ hat die Bewegungsrichtung des Wagens; die dazu senkrechte Komponente $\vec{p}_U$ wird vom Untergrund aufgenommen.

4. Lösung der Aufgabe

Da keine Reibung zu berücksichtigen ist und die Energie beim Abschuss nicht aus der Verbrennung einer Pulverladung stammt, sondern aus der Entspannung einer Feder, ist der EES gültig, sowohl für den Abschuss als auch das Ausrollen.
Da man die Kanone, die Kugel sowie den festen Untergrund als ein abgeschlossenes PMS betrachten kann (nur innere Kräfte), gilt der IES. Da eine Bewegung von Kugel und Kanone nur in einer Ebene stattfindet, kann man mit 2 Gleichungen rechnen. Das bezüglich des Schwerpunktes unseres PMS ruhende xy-Koordinatensystem wurde so definiert, dass die x-Achse in Bewegungsrichtung zeigt. Ebenfalls eingezeichnet wurde die beim Abschuss auftretende Rückstoßkraft, die als Kraftstoß $\vec{p}_W$ (blauer Pfeil) auf das Wägelchen wirkt.

- Anwendung des Impulserhaltungssatzes

Da die drei Bestandteile des PMS vor Abschuss ruhen, ist der Gesamtimpuls gleich Null und bleibt es auch beim Abschuss: $\vec{p}_{ges;vor} = 0 = \vec{p}_{ges;nach} = m_K\vec{v}_K + m_W\vec{v}_W + \vec{p}_U$; in Koordinatenschreibweise: $0 = \begin{pmatrix} -m_K v_K \cos\alpha \\ +m_k v_K \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +m_W v_W \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{U\,y} \end{pmatrix}$. Der Waggon kann wegen fehlender Reibung nur mit einer Kraft $\vec{F}_y$ senkrecht zur Oberfläche auf den Untergrund wirken, somit entsteht hierdurch ein Kraftstoß $\vec{p}_U = \int \vec{F}_y\, dt$, dessen x-Koordinate gleich Null ist.

Aus den Impulskoordinaten resultieren die beiden Gleichungen: $v_K = \frac{m_W v_W}{m_K \cos\alpha}$ und $p_{U\,y} = -m_K v_K \sin\alpha = m_E v_E$. Aus der letzten Gleichung ersieht man, dass die Geschwindigkeit des Untergrundes (Erde) v_E wegen der riesigen Erdmasse m_E nach dem Abschuss bezüglich des Laborsystems vernachlässigbar klein ist.
Da die Geschwindigkeit des Wagens v_W nach Abschuss unbekannt ist, wird eine weitere Beziehung benötigt. Diese liefert der EES.

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes

$$\sum E_{kin;vor} + \sum E_{pot;vor} = \sum E_{kin;nach} + \sum E_{pot;nach}$$

unmittelbar vor und nach Abschuss gilt:
$(m_W + m_K) g\, h_0 + \frac{k}{2} s^2 = (m_W + m_K) g\, h_0 + \frac{m_K}{2} v_K^2 + \frac{m_W}{2} v_W^2$; hieraus folgt mit v_K aus IES s.o.
$\frac{k}{2} s^2 = \frac{m_W}{2} v_W^2 \left(\frac{m_W}{m_K \cos^2\alpha} + 1 \right)$ und schließlich $\underline{v_W = \sqrt{\frac{m_K\, k \cos^2\alpha}{m_W\, m_K \cos^2\alpha + m_W^2}} \cdot s}$
sowie $\underline{v_K = \sqrt{\frac{m_W\, k}{m_K^2 \cos^2\alpha + m_W\, m_K}} \cdot s}$.

Die beim Ausrollen des Wägelchens erreichbare Höhe *h* lässt sich durch eine weitere Anwendung des EES bestimmen:

$m_W g\, h_0 + \frac{m_W}{2} v_W^2 = m_W g\,(h_0 + h)$, woraus folgt $h = \frac{v_W^2}{2g}$, was eine Rollstrecke l in x-Richtung von $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ ergibt.

Zusatzaufgabe:
Bei der Formulierung des EES wurde der Anteil an Kinetischer Energie vernachlässigt, der vom Untergrund aufgenommen wurde. Zeigen Sie, dass dies unter den gegebenen Umständen $m_W << m_E$ zulässig ist.

5. Häufig auftretende Fehler

- Die Anwendbarkeit des Impulssatzes wird nicht überprüft.
- Der IES gilt nur für ein Inertialsystem. Es ist also prinzipiell nicht zulässig, das Koordinatensystem an eine Teilmasse zu heften (Ausnahme – deren Masse ist unendlich gross).
- Der Impulssatz kann auch nur in einer oder zwei Raumrichtungen erfüllt sein, wenn die Summe der Kräfte in diesen Richtungen verschwinden.