Hinweise zur Lösung von Übungsaufgaben zur „Statik des Starren Körpers"

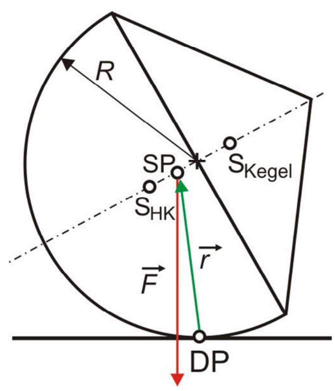
Gegenstand der Statik des Starren Körpers (SK) ist die Wirkung von Kräften und Drehmomenten, die am Körper angreifen, insbesondere im Hinblick auf die Störung bzw. Herstellung eines Gleichgewichts. Sofern die Gewichtskraft eine Rolle spielt, ist die Kenntnis bzw. Bestimmung der Position des Schwerpunkts (SP) wichtig.

1. Regeln zur Bestimmung des Schwerpunkts:
   - Ist $\vec{r}$ der Ortsvektor vom Koordinatenursprung zum Massenelement dm des SK, berechnet sich der Schwerpunkt nach $\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m}$ mit der Gesamtmasse m. Analog gilt für ein Punktmassensystem $\vec{r}_S = \frac{\sum \vec{r}_i\, m_i}{m}$.
   - Ist der SK symmetrisch, liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse oder in der Spiegelebene; schneiden sich verschiedene Symmetrieachsen, liegt der SP in diesem Schnittpunkt.
   - Bei einer vorhandenen Symmetrieachse legt man eine Achse des Koordinatensystems in die Symmetrieachse, dann ist nur eine Schwerpunktskoordinate zu bestimmen.
   - Sind die Schwerpunkte $\vec{r}_{Si}$ von Teilkörpern des SK bekannt, kann man den Schwerpunkt des gesamten SK wie beim PMS berechnen.

2. Regeln zur Arbeit mit den Gleichgewichtsbedingungen
   - Ein SK ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller angreifenden Kräfte und Drehmomente verschwindet: $\sum \vec{F}_i = 0; \sum \vec{M}_i = \sum \vec{R}_i \times \vec{F}_i = 0$.
   - Der Angriffspunkt der Gewichtskraft ist stets der Schwerpunkt.
   - Zwar hängt das von einer Kraft erzeugte Drehmoment von der Lage des Drehpunktes ab, wenn aber die Summe aller Drehmomente gleich Null ist, gilt dies auch für jede beliebige Drehachse.
   - Liegen die angreifenden Kräfte $\vec{F}_i$ in einer Ebene, wird das Koordinatensystem so gewählt, dass dies die *xy*-Ebene ist. Dann liegen auch die Ortsvektoren zu den Angriffspunkten der Kräfte $\vec{R}_i$ in der *xy*-Ebene und die Drehmomente haben nur in der *z*-Richtung von Null verschiedene Koordinaten.
   - Das Koordinatensystem wird vorteilhaft so gelegt, dass sein Ursprung auf der Wirkungslinie einer oder mehrere Kräfte liegt oder direkt auf dem Angriffspunkt einer Kraft.

3. Beispiel einer Schwerpunktsberechnung

Aufgabe: Ein Stehaufmännchen soll aus einer Halbkugel und einem Kegel mit gleichen Radien R der begrenzenden Kreisflächen und dem gleichen Material zusammengesetzt werden. Offensichtlich darf die Höhe h des Kegels nicht zu groß gewählt werden, damit eine stabile Gleichgewichtsposition existiert (angekipptes Männchen richtet sich wieder auf). Welches ist der kritische Wert von h zwischen labilem und stabilem Gleichgewicht?



Lösung: Offensichtlich sind 3 Teilaufgaben zu behandeln: Bestimmung der Schwerpunkte von Halbkugel S_{HK} und Kegel S_{Kegel}, des gemeinsamen Schwerpunktes SP sowie eine Betrachtung der Bedingung für die stabile Gleichgewichtsposition des Stehaufmännchens.

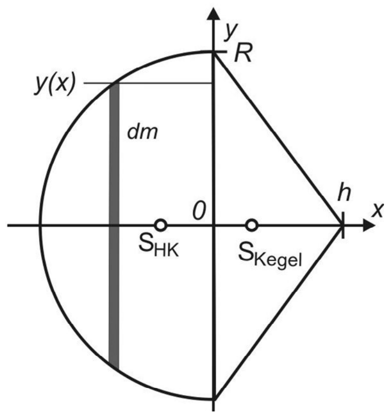
Da Kegel und Halbkugel eine gemeinsame Rotationsachse besitzen, liegen S_{HK} und S_{Kegel} sowie SP auf dieser Geraden. In der Abbildung wurde ein sehr flacher Kegel gewählt, wodurch der SP innerhalb der Halbkugel liegt. Das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ um den Drehpunkt DP infolge der Gewichtskraft $\vec{F}$ ist linksdrehend, also aufrichtend orientiert. Bei kleiner werdendem Abstand von SP zur Kegelgrundfläche nimmt dieses ab und verschwindet, wenn SP in dieser Fläche liegt. Dann sind beide Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ antiparallel und das Kreuzprodukt zwischen ihnen ist Null – indifferentes Gleichgewicht!

Bei der Berechnung der Schwerpunkte beider Teilkörper kann man den Umstand ausnutzen, dass es sich um Rotationskörper handelt (könnten auf einer Drechselbank hergestellt werden). Die Position des Schwerpunktes auf der x-Achse (entspricht der Rotationsachse) ist leicht bestimmbar, wenn man als Massenelemente dm Kreisscheiben der Dicke dx mit dem Radius $y(x)$ betrachtet:

$$x_S = \frac{\int x\,\rho(x)\,dV}{\int \rho\,dV} = \frac{\int x\,\rho(x)\,\pi\,y^2(x)\,dx}{\int \rho(x)\,\pi\,y^2(x)\,dx}.$$

Für den meist (wie auch im aktuellen Fall) vorliegenden Fall konstanter Dichte $\rho(x) = \text{const.}$ erhält man $x_S = \dfrac{\int x\,y^2(x)\,dx}{\int y^2(x)\,dx}$. *Diese Formel findet man auch im Tafelwerk. Achten Sie darauf, dass sie nur für den Fall konstanter Dichte gilt!*

Legt man den Koordinatenursprung in den Schnittpunkt von Rotationsachse und Kegelgrundfläche, ergeben sich die Funktionen $y_{HK}(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ und $y_{Kegel}(x) = R(1 - \frac{x}{h})$.



Damit lassen sich die Schwerpunkte leicht bestimmen:

$$S_{HK} = \frac{\int_0^{-R} x(R^2 - x^2)dx}{\int_0^{-R} (R^2 - x^2)dx} = \frac{R^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^{-R}}{R^2x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{-R}} = \frac{\frac{R^4}{4}}{-\frac{2}{3}R^3} = -\frac{3R}{8} \text{ und}$$

$$S_{Kegel} = \frac{\int_0^h xR^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx}{\int_0^h R^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx} = \frac{R^2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3h} + \frac{x^4}{4h^2}\right)\Big|_0^h}{R^2\left(x - \frac{2x^2}{2h} + \frac{x^3}{3h^2}\right)\Big|_0^h} = \frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{3}} = \frac{h}{4}.$$

Der gemeinsame SP berechnet sich dann nach der Beziehung für ein Punktmassensystem

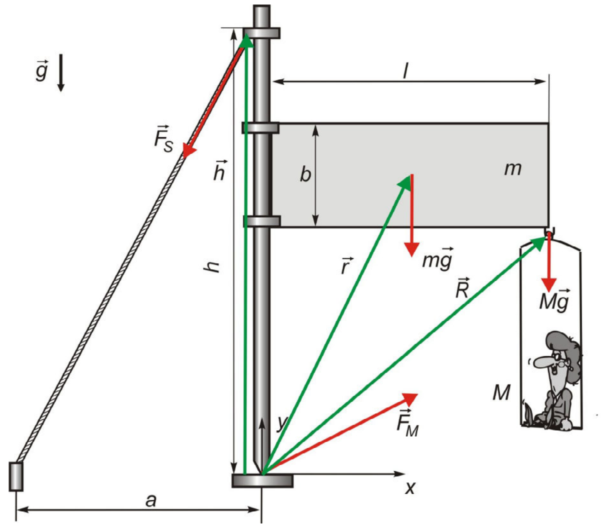
$S = \dfrac{S_{HK}m_{HK} + S_{Kegel}m_{Kegel}}{m_{HK} + m_{Kegel}}$. Zur Lösung der aktuellen Aufgabe wird $S = 0$ gesetzt. Somit folgt nach Multiplikation mit der Gesamtmasse $0 = -\frac{3R}{8}\rho\frac{2\pi R^3}{3} + \frac{h}{4}\rho\,\pi R^2\frac{h}{3}$, woraus sich die Lösung ergibt: $\underline{\underline{h = \sqrt{3}R}}$.

Für ein richtig aufstehendes Stehaufmännchen muss die Kegelhöhe also kleiner sein als dieser Wert.

4. Beispiel einer Momentenberechnung

Aufgabe: Ein rechteckiger Stahlträger der Masse *m* ist an einem Mast befestigt und wird mit der Masse *M* belastet. Berechnen Sie die vom Untergrund auf den Mastfuß ausgeübte Kraft sowie die Zugbelastung der Abspannung.

Hinweis: Die Unterlage überträgt auf den Mastfuß keine Momente sondern nur eine auf einen Punkt wirkende Kraft!



Lösung:

- Die Gewichtskraft der Masse *M* greift am Haken an, die Gewichtskraft der Stahlplatte in deren Mitte (Schnittpunkt der beiden Symmetrieachsen). Die Seilkraft hat die Richtung der Abspannung.
- Der Mastfuß ist ein Angriffspunkt von Kräften. Der Koordinatenursprung wird in diesen Punkt gelegt. Alle Kräfte und Ortsvektoren zu deren Angriffspunkten liegen in der *xy*-Ebene.
- Alle am Mast angreifenden Kräfte und Ortsvektoren werden eingezeichnet (hier farbig hervorgehoben) und bezeichnet.
- Die Gleichgewichtsbedingungen werden aufgeschrieben und das entstehende Gleichungssystem nach den Koordinaten von $\vec{F}_M$ aufgelöst:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{R} = \begin{pmatrix} l \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix};\ m\,\vec{g} = m\,g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ M\,\vec{g} = M\,g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{F}_S = \frac{F_S}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{pmatrix} -a \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F}_i = 0 = m\,g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + M\,g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{F_S}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{pmatrix} -a \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Mx} \\ F_{My} \\ F_{Mz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Hieraus folgt $F_{Mz} = 0$ und $F_{Mx} = -F_{Sx}$. Aus dem Gleichgewicht der Momente erhält man

$$\sum \vec{R}_i \times \vec{F}_i = 0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{l}{2} & r_y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ l & R_y & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} + \frac{F_S}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & h & 0 \\ -a & -h & 0 \end{vmatrix}.$$

Von Null verschieden sind nur die *z*-Koordinaten der einzelnen Summanden.

$$\sum M_z = 0 = -\frac{l}{2}m\,g - l\,M\,g + \frac{a\,h\,F_S}{\sqrt{a^2+h^2}}\text{, woraus folgt: } \underline{\underline{F_S = \frac{g\,l\left(M+\frac{m}{2}\right)}{ah}\sqrt{a^2+h^2}}}\,.$$

In (1) eingesetzt erhält man die am Mastfuß angreifende äußere Kraft $\vec{F}_M$:

$$\underline{\underline{\vec{F}_M = g\frac{l}{h}\left(M+\frac{m}{2}\right)\vec{e}_x + g\left(M+m+\frac{l}{a}\left(M+\frac{m}{2}\right)\right)\vec{e}_y}}\ .$$

Häufig auftretende Fehler und Tipps:

- Bestimmung von Schwerpunkten sowie Berechnungen zum statischen Gleichgewicht sind ein Hauptschwerpunkt im Fach Technische Mechanik und werden dort extensiv an unterschiedlichen Systemen geübt. Die Physik ist natürlich die gleiche und prinzipiell sind es die Methoden auch. Bei der Schreibweise gibt es Unterschiede. Hieraus resultieren oft Fehler. Die in TM aufgeschriebenen Gleichungen sind nichts anderes als Gleichungen der Koordinaten von Kräften sowie Drehmomenten. Nach der 10+x-ten Übungsaufgabe hat der betriebsblind gewordene Student das bereits vergessen und handelt nach einem Schema. Da in TM nur ebene Probleme behandelt werden (in der Art des o.a. Beispiels), gibt es nur „rechts- oder linksdrehende“ Momente. Dadurch wird leicht vergessen, dass es sich dabei um z-Koordinaten von Drehmomenten mit unterschiedlichen Vorzeichen handelt. Kräfte bzw. Kraftkomponenten werden gesondert aufsummiert nach ihren Wirkungsrichtungen $\Uparrow$ bzw. $\Rightarrow$, was nichts anderes bedeutet als die Summen ihrer x- und y-Koordinaten.
- Entnimmt man Formeln zur Berechnung von Schwerpunkten von starren Körpern aus dem Tafelwerk, sollte man sehr vorsichtig bei deren Anwendung sein. Oft sind sie nur unter bestimmten Nebenbedingungen gültig, z.B. konstante Dichte, gleichmäßige Dicke,...
- Ein paar Regeln sollte man sich merken und die sicher anwenden können, das spart Zeit und Mühe, z.B.: Der Schwerpunkt liegt auf einer Symmetrieachse (falls vorhanden); bei Dreiecken liegt der Schwerpunkt auf dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (teilt diese im Verhältnis 1:2); sind Schwerpunkte der Bestandteile eines zusammengesetzten starren Körpers bekannt, kann man einen gemeinsamen Schwerpunkt wie beim PMS berechnen.
- Nicht nur die Schwerkraft, auch Trägheitskräfte greifen im Schwerpunkt an (nach Einstein gibt es da ja auch gar keinen prinzipiellen Unterschied).
- Ein Körper, unterstützt im Schwerpunkt, befindet sich im *statischen Gleichgewicht*. Hiervon unberührt bleibt die Frage nach dem *dynamischen Gleichgewicht.* Das wird später bei der Rotation des Starren Körpers behandelt.