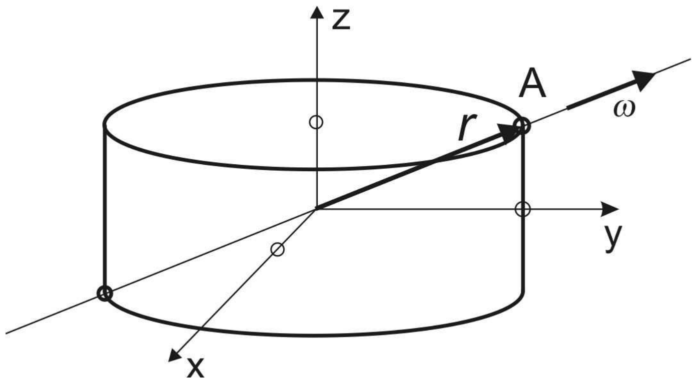
Aufgabe:

Ein Zylinder der Masse m mit der Höhe h und dem Radius R rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Schwerpunktsachse. Diese Achse verläuft in der y-z-Ebene diagonal durch den Zylinder mit Aus- bzw. Eintrittspunkten an den Berührungslinien (Kreisen) von Stirn- und Mantelflächen. Dort ist der Zylinder auch gelagert.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin} sowie den Drehimpuls $\vec{L}(t=0)$

b) Bei welchem Verhältnis h/R verschwindet bei der gegebenen Rotationsachse das Deviationsmoment?



Geg.:

$J_x = J_y = (h^2+3R^2)m/12 \qquad J_z = mR^2/2$

Zusatzaufgabe:

Leiten Sie die angegebene Formel für J_x selber ab.

Lösung:

Da die Hauptträgheitsmomente gegeben sind und in der Skizze die Achsen den Symmetrieachsen entsprechen, ist das Koordinatensystem das Hauptachsensystem. Somit ist der Trägheitstensor diagonal.

$\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\sqrt{4R^2+h^2}}\begin{pmatrix}0\\2R\\h\end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix}\left(h^2+3R^2\right)\frac{m}{12} & 0 & 0\\ 0 & \left(h^2+3R^2\right)\frac{m}{12} & 0\\ 0 & 0 & R^2\frac{m}{2}\end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{L} = \frac{\omega m R}{6\sqrt{4R^2+h^2}}\begin{pmatrix}0\\h^2+3R^2\\3Rh\end{pmatrix}}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{\underline{J}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} = \frac{1}{\sqrt{4R^2+h^2}}\begin{pmatrix}0\\2R\\h\end{pmatrix}\frac{\omega m R}{6\sqrt{4R^2+h^2}}\begin{pmatrix}0\\h^2+3R^2\\3Rh\end{pmatrix}$$

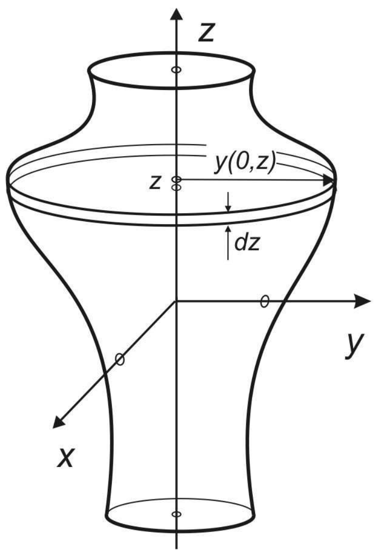
$$\underline{E_{rot} = \frac{\omega^2 m^2 R^2}{12\left(4R^2+h^2\right)}\left(6R^2+5h^2\right).}$$

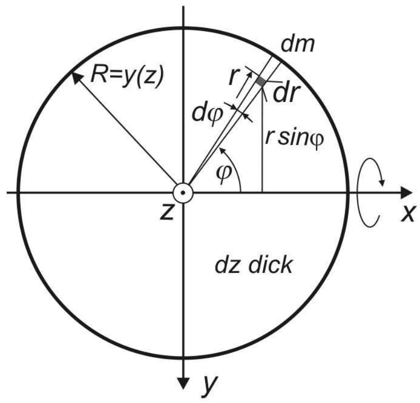
Wenn keine Deviationsmomente auftreten, haben $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ die gleiche Richtung, somit gilt

$$C\begin{pmatrix}0\\2R\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\h^2+3R^2\\3Rh\end{pmatrix}, \text{ also: } \begin{matrix}C2R = h^2+3R^2\\ Ch = 3Rh\end{matrix} \quad \text{folglich } \underline{h=\sqrt{3}R}$$

Ein analoges Ergebnis erhält man, wenn man gleichsetzt $J_x = J_z$ (sphärischer Kreisel, bei dem alle Achsen Hauptträgheitsachsen sind)

Zur Berechnung der Hauptträgheitsmomente:





Rotationskörper
Ein solcher Körper wird durch Rotation einer Kontur y(0,z) „Drechselschablone" um die z-Achse erzeugt und kann folglich bei Rotation um seine Figurenachse um beliebige Winkel in sich selbst überführt werden. Ein Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Körpers und der z-Achse als Symmetrieachse ist immer ein Hauptachsensystem. Es gilt $J_x = J_y \neq J_z$.

Generell gilt für Rotationskörper konstanter Dichte („Schachfigur"), mit einer Einhüllenden $y(x=0,z)$ folgende elegante Methode zur Berechnung des MTM für die Rotation um die z-Achse: Der Körper wird in dünne Zylinderscheiben der Dicke dz mit dem Radius $y(z)$ und der Masse $dm = \rho\pi\, y^2(z)\,dz$ aufgeteilt. Jede dieser Scheiben trägt mit dem Beitrag $dJ_z = \frac{dm}{2} y^2(z) = \frac{\rho}{2}\pi\, y^4(z)\,dz$ zum MTM J_z bei, folglich ergibt sich für den Rotationskörper

$$J_z = \pi\frac{\rho}{2}\int_{z_1}^{z_2} y^4(z)\,dz\,.$$

Dies gilt für alle Rotationskörper und natürlich auch für den Zylinder mit $y(z) = R =$ constant.

Somit folgt für den Zylinder $J_z = \pi\frac{\rho}{2}R^4\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \pi\frac{\rho}{2}R^4 h = \frac{\pi\rho R^2 h}{2}R^2 = \frac{m}{2}R^2.$

Zur Berechnung des Hauptträgheitsmomentes für eine Rotation um die x-Achse gehen wir ähnlich vor. Zunächst wird der Beitrag dJ_x der in der Abbildung gezeigten dünnen Zylinderscheibe bestimmt. Dieser ergibt sich nach dem Satz von Steiner zu $dJ_x = dJ_{xs} + z^2\,dm$. Dabei ist dJ_{xs} das MTM der dünnen Scheibe für eine Rotation um eine in x-Richtung orientierte Schwerpunktsachse mit dem Abstand z zur x-Achse.
Das MTM dJ_{xs} lässt sich vorteilhaft unter Verwendung von Polarkoordinaten bestimmen:

$dJ_{xs} = \rho dz\int_0^{2\pi}\int_0^{y(z)} r^2\sin^2\varphi\, d\varphi\, dr = \rho\pi\frac{y^4(z)}{4}dz$. Folglich $dJ_x = \rho\pi\frac{y^4(z)}{4}dz + \rho\pi y^2(z) z^2 dz$.

Nun ist nur noch über den Rotationskörper in seinen Grenzen von z_1 bis z_2 zu integrieren:

$$J_x = \rho\pi\int_{z_1}^{z_2}\frac{y^4(z)}{4} + y^2(z)z^2 dz\ .$$

Diese Beziehung ist wiederum auf alle Rotationskörper anwendbar. Für den Zylinder mit $y(z) = R =$ const. erhält man $J_x = J_y = \rho\pi\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{R^4}{4} + R^2z^2dz = \rho\pi\left(\frac{R^4}{4}z + R^2\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-h/2}^{+h/2}$

$$J_x = J_y = \rho\pi\left(\frac{R^4}{4}h + R^2\frac{h^3}{3}\right) = \underline{\frac{m}{12}\left(h^2 + 3R^2\right).}$$