Übungsaufgaben 0 Mathematische Grundlagen

1.) Welche Bedeutung haben folgende Vektoren?

a) $\begin{pmatrix} 1 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \\ 3 \text{ m} \end{pmatrix}$

b) $1 \text{ cm/s } \vec{i} + 2 \text{ cm/s } \vec{j} + 5 \text{ m/s } \vec{k}$

c) $1 \text{ m} \vec{e}_x + 2 \text{ m/s } \vec{e}_y + 5 \text{ m/s}^2 \vec{e}_z$

2.) Berechnen Sie für gegebene Vektoren $\mathbf{a} = 1 \text{ m } \mathbf{i} + 2 \text{ m } \mathbf{j} + 5 \text{ m } \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2 \text{ m } \mathbf{i} + 3 \text{ m } \mathbf{j} - 4 \text{ m } \mathbf{k}$!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] =$$

3.) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ aus 2.) gilt: $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ sowie $\mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$!

4.) Welche geometrische Bedeutung hat das sogenannte Spatprodukt $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]$?

5.) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ von

$$y = a x^2$$

$$y = b/x^3$$

$$y = (ax + b)/(cx + d)^2$$

$$y = x \cos(kx - \phi)$$

$$y = a e^{(kx - \phi)}$$

6.) Berechnen Sie $\int y dx$ von

$$y = a x^2$$

$$y = b/x^3$$

$$y = a \cos(kx - \phi)$$

$$y = b e^{(kx - \phi)}$$

Haben Sie noch freie Spitzen? Dann wäre die Rinderaufgabe des Archimedes vielleicht das Richtige?

Das Rinderproblem wurde 1773 von Gotthold Ephraim Lessing in einem griechischen Manuskript der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel entdeckt (Cod. Guelf. 77 Gud. Graec.), das einen in 44 Distichen abgefassten Brief des Archimedes an Eratosthenes von Kyrene enthielt.

Zähle, mein Freund, die Rinder unter der Sonne, die einst unter der Sonne Siziliens grasten, die nach ihrer Farbe in vier Herden geteilt werden. Eine ist milchweiß, eine schwarz, eine gefleckt und eine gelb. Die Anzahl der Bullen ist größer als die der Kühe, und die Beziehung zwischen ihnen ist wie folgt:

weiße Bullen = $(1/2 + 1/3)$ schwarze Bullen + gelbe Bullen,

schwarze Bullen = $(1/4 + 1/5)$ gefleckte Bullen + gelbe Bullen,

gefleckte Bullen = $(1/6 + 1/7)$ weiße Bullen + gelbe Bullen,

weiße Kühe = $(1/3 + 1/4)$ schwarze Herde,

schwarze Kühe = $(1/4 + 1/5)$ gefleckte Herde,

gefleckte Kühe = $(1/5 + 1/6)$ gelbe Herde,

gelbe Kühe = $(1/6 + 1/7)$ weiße Herde.

Falls du, o Freund, mir nicht die Anzahl der Rinder jeder Art, Bullen und Kühe, angeben kannst, kannst du dich noch nicht als hoch qualifiziert betrachten. Bedenke aber noch die folgenden zusätzlichen Beziehungen zwischen den Bullen unter der Sonne:

Weißer Bullen + schwarze Bullen = eine quadratische Zahl,
Gefleckte Bullen + gelbe Bullen = eine Dreieckszahl.

Wenn du diese auch noch berechnet hast, o Freund, und du die Gesamtzahl der Rinder gefunden hast, dann juble als ein Eroberer, weil du dir selbst bewiesen hast, dass du ein sehr begabter Rechner bist.