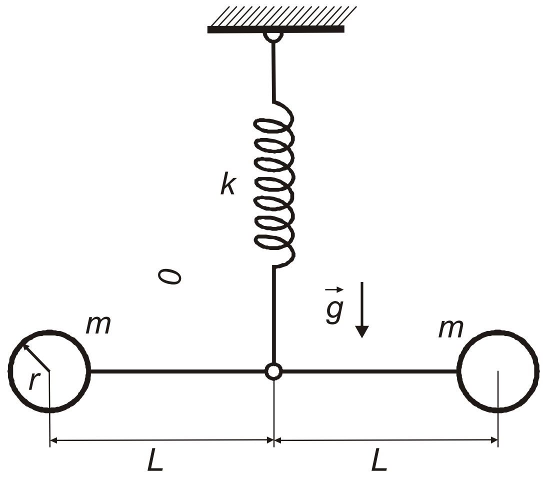
Übungsaufgaben 18 gekoppelte Schwingungen

4.) {2} An einer langen Schraubenfeder ist ein hantelförmiger Körper befestigt. Dieses System kann vertikale Längsschwingungen und gleichzeitig Drehschwingungen um die Federachse ausführen. Beide Schwingungszustände sind über die gemeinsame Feder miteinander gekoppelt. Sind die Eigenfrequenzen von Dreh- und Längsschwingungen gleich, so treten bei geeignet gewählten Anfangsbedingungen ausgeprägte Schwebungen auf. Hierbei oszilliert die Energie von einem Schwingungszustand in den anderen und zurück.



a) Belastet man die Feder mit der Gewichtskraft der Hantel, dann verlängert sich die Feder um s. Die Hantel besteht aus einem masselosen Stab und zwei gleich großen Kugeln mit dem Radius r und der Masse m. Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω_L für die vertikalen ungedämpften Längsschwingungen?

b) Dreht man in der Ruhelage die Hantel fünf Mal vollständig um die vertikale Schraubenachse, dann ist dazu ein äußeres Drehmoment M aufzuwenden, um die Hantel statisch ruhig zu halten. Welche Eigenkreisfrequenz ω_D haben reine Drehschwingungen der Hantel, bei einem Abstand L beider Kugeln von der Schraubenachse?

c) Welchen Abstand L_{res} von der Drehachse müssen beide Kugeln haben, damit ausgeprägte Koppelschwingungen (Schwebungen) auftreten?

Gegeben: s = 0,37m; m = 32g; M = 0,056Nm; L = 0,04m; r = 0,01m

5.) {2} Gekoppelte Federpendel aus dem Vorlesungsversuch

Bestimmen Sie aus den gemessenen Werten von T_{00}, T_0, T_1, T_2, T_S auf (3) verschiedene Art und Weise die Kopplungskonstante γ.

Größe	ohne Federn T_{00} /s	2. Pendel fest T_0 /s	Gleichphasige Normalschwingung T_1 /s	Gegenphasige Normalschwingung T_2 /s	Schwebungsdauer T_S /s
Messwert	1,4295	1,255	1,3318	1,1904	11,32

Anmerkung: Bitte nur diese Werte verwenden!

Für StudentInnen von EIB1,2,3 und WTB:

1.) {2} Werden n harmonische Oszillatoren mit je einem Bewegungsfreiheitsgrad gekoppelt, erhält man ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen für die Auslenkungen $\varphi_i(t)$ der Oszillatoren aus der Ruhelage. Als Lösung des DG-Systems ergeben sich explizite Ausdrücke für $\varphi_i(t)$ als Linearkombinationen von Schwingungsfunktionen ($\sin\omega_j t$; $\cos\omega_j t$) mit i.a. n verschiedenen Kreisfrequenzen ω_j, die als Eigenfrequenzen des Systems bezeichnet werden. Als Fundamentalschwingungen $\psi_j(t)$ (oder Eigenschwingungen) bezeichnet man solche n Linearkombinationen aus $\varphi_i(t)$, die jeweils nur eine Eigenfrequenz ω_j enthalten.

a) Zeigen Sie anhand der Lösungen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ des in der Vorlesung behandelten Koppelstangenpendels, dass die Linearkombinationen $\psi_1(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]/2$ sowie $\psi_2(t) = [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]/2$ Schwingungsfunktionen mit jeweils einer einzigen Frequenz ω_1 bzw. ω_2 darstellen!

b) Substituieren Sie in der Bewegungsgleichung für das Koppelstangenpendel (2 gekoppelte DG) die Größen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ durch $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$, diskutieren Sie das Ergebnis!

Für StudentInnen von AMB:

2.) {3} Drei gleiche Massen m bilden mit 4 gleichen Federn der Länge l und der Federkonstanten k eine lineare Federpendelkette. Möglich seien Schwingungen nur in x-Richtung. Die jeweiligen Auslenkungen der Massen aus den Ruhelagen werden mit x_i bezeichnet.
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die drei gekoppelten Massen auf (Sie erhalten drei gekoppelte Differentialgleichungen)!
b) Sie können diese Gleichungen entkoppeln, wenn Sie anstelle der Koordinaten x_1, x_2 und x_3, geeignet gewählte Linearkombinationen q_1, q_2 und q_3, einführen, wobei gilt: $q_i = \Sigma_k\, a_{i,k} \cdot x_k$ (eine analoge Gleichung gilt natürlich auch für die Zeitableitungen von q und x). In diesen Koordinaten (den sogenannten Normalkoordinaten) erhalten Sie drei separate Differentialgleichungen für die longitudinalen harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen ω_1, ω_2 und ω_3, den sogenannten Eigenfrequenzen des Systems. Die Koeffizienten $a_{i,k}$ muß man ausrechnen. Dies führt im aktuellen Fall zu folgenden Werten:

$a_{1,1} = +1$	$a_{1,2} = 0$	$a_{1,3} = -1$
$a_{2,1} = +1$	$a_{2,2} =$ +	$a_{2,3} = +1$
$a_{3,1} = +1$	$a_{3,2} =$ -	$a_{3,3} = +1$

Schreiben Sie die mit diesen Koeffizienten gebildeten Normalkoordinaten q_1, q_2 und q_3 auf, veranschaulichen Sie durch jeweils eine Skizze, welchen Auslenkungen diese entsprechen! Durch einfache Umformungen der ursprünglichen gekoppelten Gleichungen in x_1, x_2 und x_3 erhalten Sie solche in q_1, q_2 und q_3, die nicht mehr untereinander gekoppelt sind. Führen Sie diese Umformungen durch und bestimmen Sie aus den entkoppelten Differentialgleichungen die drei Eigenfrequenzen!