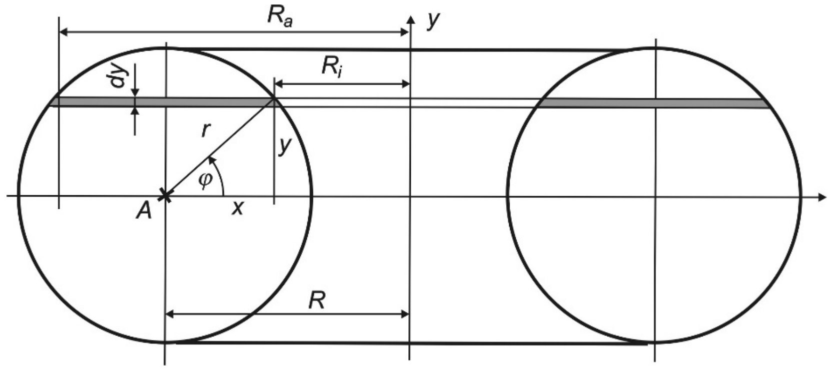
Volumen des Torus

Der Torus ist ein Rotationskörper, der durch eine Kreisfläche vom Radius r gebildet wird, die um eine Achse im Abstand R vom Mittelpunkt des Kreises rotiert. Das Volumen des Torus kann man auf verschiedene Art berechnen. Beginnen wir mit der etwas aufwendigeren traditionellen Methode der Integration über Volumenelemente. Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch den Torus. Als Volumenelement dient ein Kreisring mit dem Innenradius R_i und dem Außenradius R_a und der Dicke dy.



Das Volumenelement hat den Wert

$$dV = \pi[(R+x)^2 - (R-x)^2] \cdot dy = 4\pi R x dy$$

Nach Auflösen der Klammern und mittels Kreisgleichung $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ erhält man für das Volumen

$$V = 4\pi R \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - y^2} dy = 4\pi R \int_{-r}^{+r} r\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} dy \quad . (*)$$

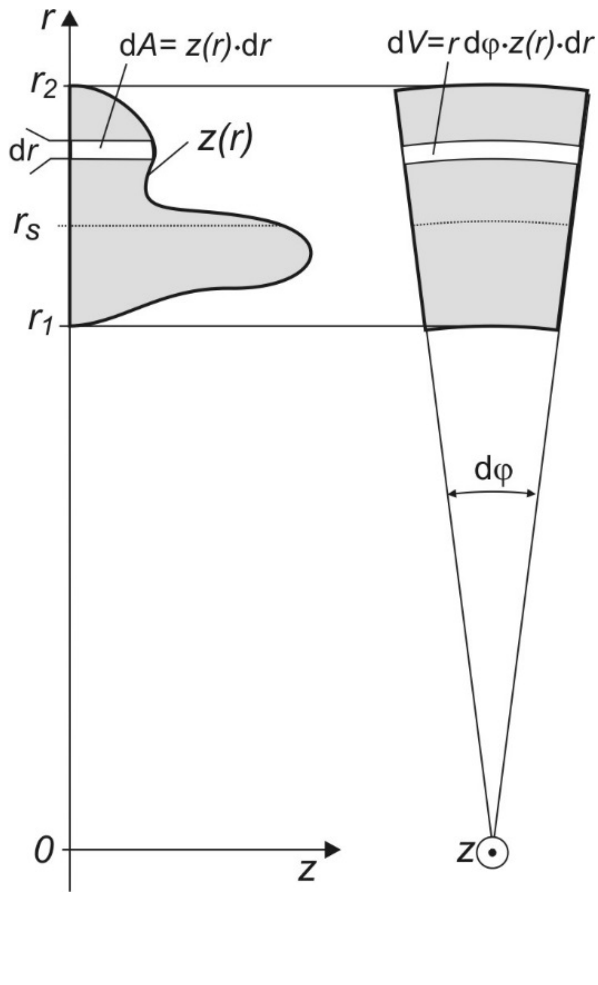
Man substituiert $\frac{y}{r} = \sin\varphi$; $\quad dy = r\cos\varphi \; d\varphi$

$$V = 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1 - (\sin\varphi)^2}\, r \cos\varphi \; d\varphi = 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 (\cos\varphi)^2 \; d\varphi \quad .$$

$\underline{V = 2\pi R \cdot \pi r^2}$.

Das Volumen entspricht genau(!) dem Produkt aus Kreisfläche vom Radius r und der Länge der „Seele" des Torus, also einem Kreisumfang mit dem Radius R. Das ist zunächst erstaunlich, aber steckt dahinter ein Prinzip?

Betrachten wir einen ganz allgemeinen Rotationskörper, gebildet durch eine Fläche, die um eine Achse r rotiert. Das Profil dieser Fläche sei durch eine Funktion $z(r)$ gegeben und könnte z.B. das Profil einer Figur für den Schmuck des Weihnachtsbaums darstellen (s. unter Reifendrehen). Ein zur Rotationsachse paralleler Schnitt durch diese Fläche ist in der Abbildung links dargestellt. Rechts daneben ist ein kleiner Teil des Rotationskörpers in der Draufsicht (parallel zur Rotationsachse) dargestellt, ein Ausschnitt mit dem Winkelelement dφ. In der Schnitzerwerkstatt könnte daraus eine kleine Figur gemacht werden. Ein Volumenelement dieses Teilkörpers ist weiß hervorgehoben. Es berechnet sich aus dem Produkt aus dem Flächenelement d$A = z(r)$dr des Querschnitts (s. linke Abbildung) und der Länge des Kreisbogens des Volumenelements rdφ.



Das gesamte Volumen des Rotationskörpers lässt sich nun leicht bestimmen:

$V = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}\varphi \cdot z(r)\mathrm{d}r = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \cdot z(r)\mathrm{d}r.$

Im Integral rechts wird die Funktion $z(r)$ mit ihrer Koordinate r gewichtet. Das erinnert stark an die Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche. Die Schwerpunktskoordinate r_s der Profilfläche wird wie folgt bestimmt:

$r_s = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot z(r)\mathrm{d}r}{\int_{r_1}^{r_2} z(r)\mathrm{d}r} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot z(r)\mathrm{d}r}{A}$, mit A als Querschnittsfläche.

Somit ergibt sich für das Volumen des Rotationskörpers die einfache Beziehung $V = 2\pi \cdot r_s \cdot A$.

Diese Methode zur Volumenberechnung von Rotationskörpern ist natürlich schon lange bekannt. *Pappos von Alexandria“,* ein griechischer Astronom und Mathematiker lebte im 4. Jahrhundert in Alexandria. Die von ihm entdeckten *zentrobarischen Regeln* zur Bestimmung von Volumen und Oberflächen von Rotationskörpern wurden später von dem schweizer Jesuiten *Paul Guldin* aufs Neue entdeckt und sind heute als *Guldinsche Regeln* bekannt.

Mir waren diese Regeln nicht geläufig, die Ableitung der Volumenregel hat Spaß gemacht, den Studenten der SG IN2 wohl auch, obwohl ich aus Zeitgründen das Volumenintegral (*) nur formuliert, aber dann nicht ausgerechnet hatte.
Vielleicht findet sich aus Eurer Runde ein Student, der die zweite Guldinsche Formel zur Oberfläche von Rotationskörpern selbständig ableitet?

Nur wer sich das Alte angeeignet hat, kann Neues schaffen!