Was bisher geschah

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in klassischer Aussagenlogik:

- Modellierungsbeispiele
- Wiederholung Syntax:
  Aussagenvariablen, Junktoren, Formeln,
  Atom, Literal, Klausel, Normalformen
- Wiederholung Semantik:
  Belegungen, Modellmengen
  erfüllbar, allgemeingültig
- semantisches Folgern,
- syntaktisches Schließen (Kalküle)
- aussagenlogische Resolution

Modellierungsbeispiel in Aussagenlogik

Geheimnis eines langen Lebens

Wissen Ernährungsregeln:

- Falls ich kein Bier trinke, esse ich Fisch.
- Falls Bier und Fisch zugleich, dann kein Eis.
- Keinen Fisch, falls Eiscreme oder kein Bier.

Darstellung als aussagenlogische Formelmenge mit passenden Aussagenvariablen (Tafel)

Frage Ist Biertrinken notwendig?

Typ der Lösung ja / nein (und evtl. Begründung)

Lösung . . .

Modellierungsbeispiel in Prädikatenlogik (1. Stufe)

Wissensbasis (Aufgabenbereich):

allgemein:

- Personen mit einem gleichen Elternteil sind Geschwister.
- Nichten sind weibliche Kinder von Geschwistern.

speziell:

- Tina ist die Tochter von Anna und Max.
- Paul und Berta sind die Eltern von Anna und Otto.

Formeln ...

Frage Wer ist wessen Nichte?

Lösung ...

Wiederholung Prädikatenlogik: Syntax

Ziel: Modellierung von Aussagen über Eigenschaften und Beziehungen von Objekten eines bestimmten Bereiches

Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ Funktions- und Relationssymbole

(Individuen-)Variablen $\mathbb{X}$

Terme $\mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$, induktive Definition:

- IA: $\mathbb{X} \subseteq \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$
- IS: Aus $(f, n) \in \Sigma_F$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ folgt $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$.

Atome $\mathrm{Atom}(\Sigma, \mathbb{X})$:
Aus $(p, n) \in \Sigma_R$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ folgt $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Atom}(\Sigma_F, \mathbb{X})$

Formeln $\mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ induktive Definition:

- IA: $\mathrm{Atom}(\Sigma, \mathbb{X}) \subseteq \mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$
- IS: Falls j ein n-stelliger Junktor ist, $x \in \mathbb{X}$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$, dann gilt $j(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$, $\forall x \varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ und $\exists x \varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$,

Wiederholung Prädikatenlogik: Semantik

Σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ mit

- nichtleerer Menge A (Trägermenge)
- Interpretation $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}}$ der Funktions- und Relationssysmbole aus Σ
  - für jedes $(f, n) \in \Sigma_F$ eine Funktion $[\![f]\!]_{\mathcal{A}} : A^n \to A$
  - für jedes $(p, n) \in \Sigma_R$ eine Relation $[\![p]\!]_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$

Belegung $\beta : X \to A$ der Individuenvariablen

Eine Interpretation $(\mathcal{A}, \beta)$ für Term $t \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, X)$ oder Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$

- einer Σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ und
- einer Variablenbelegung $\beta : X \to A$.

Menge aller Modelle der Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$

$$\mathrm{Mod}(\varphi) = \left\{ (\mathcal{S}, \beta) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathcal{S}, \beta) \text{ ist } \Sigma\text{-Interpretation und} \\ [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{S},\beta)} = 1 \end{array} \right\}$$

Substitutionen

Substitution: partielle Funktion $\theta : X \to \mathrm{Term}(\Sigma, X)$
Notation als Aufzählung $[x \mapsto t_1, y \mapsto t_2, \ldots]$
Anwendung einer Substitution:

- $s[x \mapsto t]$ ist der Term, welcher aus dem Term s durch Ersetzung jedes Vorkommens der Variable x durch t entsteht
- $\varphi[x \mapsto t]$ ist die Formel, die aus der Formel φ durch Ersetzung jedes freien Vorkommens der Variable x durch t entsteht

Beispiele:

- $g(x, f(a))[x \mapsto b] = g(b, f(a))$
- $P(y, x, f(g(y, a)))[x \mapsto g(a, z), y \mapsto a] = P(a, g(a, z), f(g(a, a)))$
- $g(x, f(a))[x \mapsto b, y \mapsto a] = g(b, f(a))$
- $g(b, f(y))[x \mapsto b, y \mapsto a] = g(b, f(a))$
- $(P(b, f(y)) \to Q(x))[x \mapsto b, y \mapsto f(a)] = (P(b, f(f(a))) \to Q(b))$
- für $\theta = [x \mapsto b], \sigma = [y \mapsto f(a)]$ (auch $\theta(x) = b, \sigma(y) = f(a)$) gilt
  $(P(b, f(y)) \to Q(x))\theta\sigma = \sigma(\theta(P(b, f(y)) \to Q(x))) =$
  $= P(b, f(f(a))) \to Q(b)$

Wiederholung: Äquivalenzen mit Quantoren

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ gilt

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\varphi &\equiv \exists x\neg\varphi \\
\neg\exists x\varphi &\equiv \forall x\neg\varphi \\
\forall x\varphi \wedge \forall x\psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\
\exists x\varphi \vee \exists x\psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi) \\
\forall x\forall y\varphi &\equiv \forall y\forall x\varphi \\
\exists x\exists y\varphi &\equiv \exists y\exists x\varphi
\end{aligned}$$

falls $x \notin \mathsf{fvar}(\psi)$ und $* \in \{\vee, \wedge\}$, gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\forall x\varphi * \psi &\equiv \forall x(\varphi * \psi) \\
\exists x\varphi * \psi &\equiv \exists x(\varphi * \psi) \\
\exists y\psi &\equiv \exists x\psi[y \mapsto x] \\
\forall y\psi &\equiv \forall x\psi[y \mapsto x]
\end{aligned}$$

Prädikatenlogische Normalformen

Eine Formel $\varphi \in \mathsf{FOL}(\Sigma, X)$ heißt in

bereinigter Form, wenn $\mathsf{bvar}(\varphi) \cap \mathsf{fvar}(\varphi) = \emptyset$ und jeder Quantor eine andere Variable bindet

Pränexform, wenn $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \psi$, wobei $\forall i : Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und in ψ keine Quantoren vorkommen.