HTWK Leipzig, Fakultät IM

Prof. Dr. Sibylle Schwarz sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

4.Übung im Modul „Grundlagen der Künstlichen Intelligenz"
Sommersemester 2020 zu lösen bis 6. Mai 2020

Aufgabe 4.1:

Repräsentieren Sie die folgenden Sachverhalte durch eine Menge aussagenlogischer Formeln: Wenn ein Einhorn ein Fabelwesen ist, dann ist es unsterblich. Ist es jedoch kein Fabelwesen, dann ist es ein sterbliches Säugetier. Sind Einhörner Säugetiere oder unsterblich, dann haben sie ein Horn. Einhörner mit Horn haben Zauberkraft.

a. Ist diese Formelmenge erfüllbar? Warum?

b. Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus dieser Formelmenge semantisch folgern:

   (a) Das Einhorn ist ein Fabelwesen.
   (b) Das Einhorn hat Zauberkraft.
   (c) Das Einhorn hat ein Horn.

c. Leiten Sie jede der folgerbaren Aussagen durch aussagenlogische Resolution aus dem Kontext ab.

Aufgabe 4.2:

Gegeben ist die Formelmenge (Wissensbasis)

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} E(a,b), E(a,c), E(b,c), E(c,d), \\ \forall x P(x,x), \\ \forall u \forall w((\exists v(E(u,v) \land P(v,w))) \to P(u,w)) \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie durch Grundinstanziierung und aussagenlogische Resolution, für welche Belegungen der Individuenvariablen gilt:

a. $\Phi \models P(b,d)$
b. $\Phi \models P(b,x)$
c. $\Phi \models P(x,d)$
d. $\Phi \models P(x,y)$

Aufgabe 4.3:

Zeigen Sie Satz 3.5 (prädikatenlogische Resolutionsregel ist korrekt) mit Hilfe der Modellmengen, d.h. für je zwei Klausen $l_1 \lor \cdots \lor l_m \lor l$ und $\neg l' \lor k_1 \lor \cdots \lor k_m$ mit Literalen l und l' mit $\mathsf{mgu}(l,l') = \sigma$ gilt

$$\forall x_1 \cdots \forall x_k \left((l_1 \lor \cdots \lor l_m \lor l) \land (\neg l' \lor k_1 \lor \cdots \lor k_m)\right) \models (l_1 \lor \cdots \lor l_m \lor k_1 \lor \cdots \lor k_m)\,\sigma$$

Aufgabe 4.4:

Zeigen Sie durch prädikatenlogische Resolution, dass folgende Wissensbasis inkonsistent ist:

$$\{\forall x \forall y(\neg P(x) \lor \neg P(f(a)) \lor Q(y)), \forall y P(y), \forall x(\neg P(g(b,x)) \lor \neg Q(b))\}$$

Entfernen Sie dazu die Quantoren aus jeder Klausel (Achtung: keine äquivalente Umformung, siehe nächste Aufgabe) und wenden dann die prädikatenlogische Resolutionsregel an. Geben Sie in jedem Schritt die resolvierten Literale, deren mgu und die Resolvente an.

Aufgabe 4.5:

Bei der Transformation von durch Skolemisierung entstandene Formeln in Klauselform sind immer Sätze. Warum?
Zu jeder solchen Formel

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_k \left(\bigwedge_{i \in \{1,\dots,m\}} \bigvee_{j \in \{1,\dots,n_i\}} l_{i,j} \right)$$

mit prädikatenlogischen Literalen $_{i,j}$ lässt sich wie folgt eine Menge prädikatenlogischer Klauseln berechnen.

$$\Phi = \forall x_1 \cdots \forall x_k \left\{ \bigvee_{j \in \{1,\dots,n_1\}} l_{1,j}, \dots, \bigvee_{j \in \{1,\dots,n_m\}} l_{m,j} \right\}$$

Dabei werden die Allquantoren ignoriert. Man beachte, dass damit φ und Φ im Allgemeinen nicht äquivalent sind.
Geben Sie für die folgende Formel $\varphi \in \mathsf{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ für $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(f,1)\}$ und $\Sigma_p = \{(p,2),(q,2),(r,2)\}$ an

$$\varphi = \forall x \exists y \left(\forall z (p(x,z) \wedge q(f(y),z) \rightarrow r(x,y)) \vee \neg \forall x (r(x,y) \rightarrow (q(f(x),y) \vee r(x,f(z))))\right)$$

a. die durch Skolemisierung aus φ entstandene Formel ψ und deren Signatur Σ',

b. eine Klauselform η von ψ,

c. ein Modell $\mathcal{A}$ der Formel η,

d. ein Modell $\mathcal{B}$ der Formel φ, welches für die Symbole in Σ mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt,

e. die wie oben definiert aus η berechnete Klauselmenge Φ,

f. ein Modell für Φ, welches kein Modell für η ist.

Ψ ist die Menge von Sätzen, die durch Generalisierung jeder Klausel ($\forall$-Quantifizierung jeder freien Variablen) aus Φ entsteht. Geben Sie an

g. Ψ,

h. ein Modell für Ψ, welches kein Modell für η ist.