

Theoretische Informatik: Automaten und formale Sprachen

Prof. Dr. Sibylle Schwarz
HTWK Leipzig, Fakultät IM
Gustav-Freytag-Str. 42a, 04277 Leipzig
Zimmer Z 411 (Zuse-Bau)

<https://informatik.htwk-leipzig.de/schwarz>
sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

Sommersemester 2022

Einordnung der Theoretischen Informatik

Informatik Lehre von der **Darstellung** und **Verarbeitung** von **Information** durch **Algorithmen**

Teilgebiete der Informatik:

theoretisch

- ▶ Sprachen zur Formulierung von Information und Algorithmen,
- ▶ Möglichkeiten und Grenzen der maschinellen Berechenbarkeit,
- ▶ Grundlagen für technische und praktische (und angewandte) Informatik

technisch

- ▶ maschinelle Darstellung von Information
- ▶ Mittel zur Ausführung von Algorithmen

(Rechnerarchitektur, Hardware-Entwurf, Netzwerk, ...)

praktisch Entwurf und Implementierung von Algorithmen
(Betriebssysteme, Compilerbau, SE, ...)

angewandt Anwendung von Algorithmen
(Text- und Bildverarbeitung, Datenbanken, KI, Medizin-, Bio-, Wirtschafts-, Medieninformatik, ...)

Teilgebiete der theoretischen Informatik

Formale Sprachen

- ▶ Repräsentation von Informationen und Aufgaben in maschinenlesbarer Form (Mensch-Maschine-Kommunikation)
- ▶ Ausdrucksstärke und Flexibilität von Programmiersprachen
- ▶ Übersetzung von Programmiersprachen (z.B. in ausführbaren Code)

Maschinenmodelle (Automaten)

- ▶ Möglichkeiten und Grenzen verschiedener Modelle zur (maschinellen) Ausführung von Algorithmen

Berechenbarkeitstheorie

(Master)

- ▶ Welche Aufgaben sind überhaupt algorithmisch (mit Hilfe verschiedener Maschinenmodelle) lösbar?
Auch negative Antworten sind sehr hilfreich
(sparen Aufwand für ungeeignete Lösungsansätze)

Komplexitätstheorie

(Master)

- ▶ Welche Aufgaben sind mit beschränkten Ressourcen (z.B. Zeit, Speicherplatz) lösbar?
- ▶ Für welche Aufgaben können schnelle Algorithmen existieren?

Prinzipien der theoretischen Informatik

ältester Zweig der Informatik (lange vor dem ersten Computer)

Mathematische Prinzipien:

- ▶ Abstraktion
 - ▶ ermöglicht verallgemeinerte Aussagen und breit einsetzbare Verfahren,
 - ▶ Ergebnisse und Verfahren oft nicht sofort praktisch anwendbar, müssen auf spezielle Situationen angepasst werden.
- ▶ Beweisbarkeit
 - ▶ erfordert präzise Modellierung der Aufgabe
 - ▶ Nachweis der Korrektheit von Hard- und Software (Tests können dies nicht !)

Wissen aus der theoretischen Informatik

- ▶ veraltet über viele Jahre kaum
- ▶ Grundlage für Verständnis von (schnelllebigem) Spezialwissen, z.B. konkrete Programmiersprachen, Domain-spezifische Sprachen, Transformationen verschiedener Darstellungen

Aus der Modulbeschreibung

C993 Theoretische Informatik: Automaten und formale Sprachen

Arbeitsaufwand: Präsenzzeit 56 h (= 2 SWS V + 2 SWS S)

Vor- und Nachbereitungszeit 94 h (\approx 6 h je Woche)

Voraussetzungen: anwendungsbereite Kenntnisse auf den Gebieten Modellierung, Logik, Algorithmen und Datenstrukturen, Aufwandsabschätzungen

Lernziele: Die Studierenden sind in der Lage, wichtige Klassen formaler Sprachen als Grundlage von Programmier- und Beschreibungssprachen einzuordnen und kennen die wesentlichen Eigenschaften der Sprachklassen. Sie kennen die entsprechenden abstrakten Maschinenmodelle und Algorithmen und können sie zur Darstellung und Lösung praktischer Aufgabenstellungen einsetzen. Die Studierenden wissen, dass nicht jedes formal darstellbare Problem algorithmisch lösbar ist.

Inhalt der Lehrveranstaltung

- ▶ Formale Sprachen
 - ▶ Wiederholung: Alphabet, Wort, Sprache, Operationen darauf
 - ▶ reguläre Ausdrücke
 - ▶ Wortersetzung
 - ▶ Grammatiken
 - ▶ Chomsky-Hierarchie
- ▶ Maschinenmodelle
 - ▶ Endliche Automaten
 - ▶ Kellerautomaten
 - ▶ Turing-Maschinen
- ▶ Berechenbarkeit (Ausblick auf Master-Modul)
 - ▶ berechenbare Funktionen
 - ▶ Berechnungsmodelle
 - ▶ These von Church
 - ▶ algorithmische Entscheidbarkeit / Unentscheidbarkeit
- ▶ Komplexität (Ausblick auf Master-Modul)

jeweils mit vielen Beispielen

Lehrveranstaltungen

Folien, Übungsserien, aktuelle Informationen unter

<https://informatik.htwk-leipzig.de/schwarz/lehre/ss22/tib>

Vorlesung jeden Freitag (2 h / Woche)

Selbststudium (Hausaufgaben): (6 h / Woche)

schriftliche Übungsserien (ca. zu jeder Vorlesung)

Besprechung in der folgenden Übung

Autotool jeweils nach der Vorlesung bis Sonntag
der nächsten Woche

Seminar Besprechung der Übungsserien (incl. Selbsteinstest)
(Vorrechnen der Musterlösungen)

Prüfung

Prüfungsvorleistungen:

- ▶ ≥ 3 Kurzvorträge zu schriftlichen Übungsaufgaben (Übungen) und
- ▶ $\geq 50\%$ aller Punkte für Autotool-Pflichtaufgaben

Prüfung: Klausur 90 min

Aufgabentypen ähnlich Übungsaufgaben

(Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt)

Formale Sprachen

Syntax natürlicher Sprachen:

- ▶ Rechtschreibung: korrekte Wörter
- ▶ Grammatik: Aufbau korrekter Sätze

Definition von Programmiersprachen:

Syntax Form der Sprachelemente

Semantik Bedeutung der Sprachelemente und -strukturen

Pragmatik Regeln zur zweckmäßigen Anwendung

Syntax von Programmiersprachen:

- ▶ Schlüsselwörter, Bezeichner, Darstellung von Zahlen, ...
- ▶ Programmstrukturen:
Form der Ausdrücke, Anweisungen, Deklarationen, ...

Formale Sprachen: Beispiele

Programmiersprachen (Java):

```
while (b != 0) { if (a > b) a = a - b; else b = b - a; }
```

Regeln für korrekte Syntax (EBNF):

```
Statement ::= ... | IfStmt | WhileStmt | ... ;
```

```
WhileStmt ::= "while" "(" Expr ")" Statement;
```

```
IfStmt    ::= "if" "(" Expr ")" Statement ( "else" Statement )?;
```

```
Expr      ::= ...
```

Domain-spezifische Sprachen , z.B. Autotool-Lösungen zu AL-Modell

```
listToFM[(x,True),(y,False),(z,False)]
```

Regeln für korrekte Syntax (EBNF):

```
belegung      ::= "listToFM" "[" var-wert-ps "]"
```

```
var-wert-ps   ::= "" | var-wert-paar | var-wert-paar "," var-wert-ps
```

```
var-wert-paar ::= "(" var-name, wert ")"
```

```
wert          ::= "True" | "False"
```

```
var-name      ::= ...
```

Graphische Sprachen , z.B.



Maschinenmodell: endlicher Automat

Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Systemen

Modellierung von Abläufen (Zustandsübergangssysteme)

Beispiele:

- ▶ Bedienoperationen an Geräten oder Software
- ▶ Schaltfolgen von Ampelanlagen
- ▶ Steuerung von Produktionsanlagen
- ▶ Ablauf von (Geschäfts-)Prozessen

Beispiel: (Pool-)Einlass mit Karte

Automat definiert durch

- ▶ Zustände: gesperrt, frei
- ▶ Startzustand: gesperrt
- ▶ Aktionen (Eingabesymbole):
Karte (anlegen), Durchgehen, Timeout
- ▶ Zustandsübergänge: (gesperrt, Karte) \rightarrow frei
(frei, Karte) \rightarrow frei
(frei, Durchgehen) \rightarrow gesperrt
(frei, Timeout) \rightarrow gesperrt



definiert mögliche (erlaubte) Folgen von Aktionen

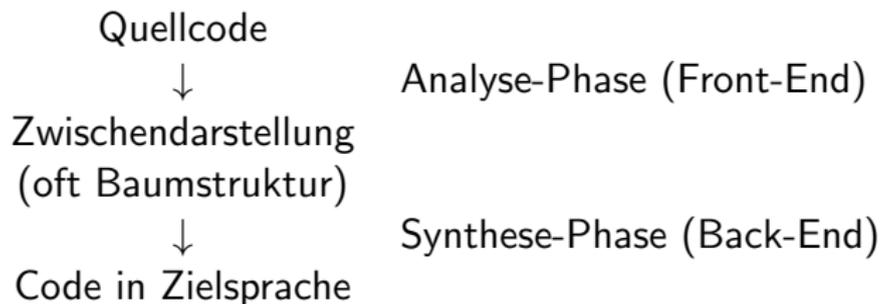
Diese Folgen lassen sich durch **reguläre Ausdrücke** darstellen:

$(\text{Karte Karte}^*(\text{Durchgehen} + \text{Timeout}))^*$

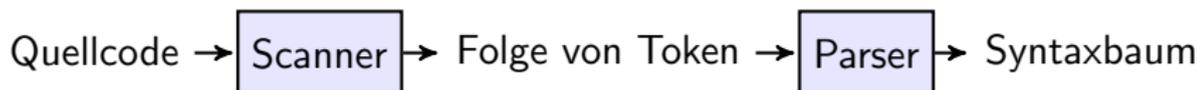
Anwendung bei der Übersetzung von Programmen

Übersetzung von Quell- in Zielsprache
(z.B. C, Java in Maschinen- oder Byte-Code)

meist in zwei Phasen über eine (gemeinsame) Abstraktion:



Analyse-Phase



lexikalische Analyse (Scanner)

lineare Analyse des Quelltextes,

Aufteilung in Einheiten (Token)

z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Zahlen

reguläre Sprachen, endliche Automaten

Syntaxanalyse (Parser)

hierarchische Struktur des Quelltextes

z.B. Ausdrücke, Verzweigungen, Schleifen

kontextfreie Sprachen, Kellerautomaten

semantische Analyse Annotationen im Syntaxbaum,

z.B. Typprüfungen

Einsatz ähnlicher Transformations- und Analyse-Methoden

- ▶ Compiler für Programmiersprachen (z. B. Java → Bytecode)
- ▶ Interpreter für Programmiersprachen (z. B. Java-Bytecode)
- ▶ Übersetzung von Daten zwischen verschiedenen Formaten
z. B. LilyPond (<http://www.lilypond.org>) übersetzt

```
\repeat volta 3 { c' e' g' e' | }  
\alternative { { c'2 g' | } { g'1 | } }
```


u. A. in



- ▶ Verarbeitung von Domain-spezifischen Sprachen
- ▶ Textformatierung
- ▶ Dokumentbeschreibungssprachen
- ▶ kontextabhängige Hilfe in Entwicklungsumgebungen
- ▶ statische Analyse zur Fehlersuche in Programmen
- ▶ graphische Editoren (z.B. für UML-Diagramme) mit automatischer Programmgenerierung

Berechenbarkeit / Entscheidbarkeit

Halteproblem:

Kann ein (Test-)programm U existieren, welches für **jedes beliebige** (Dienst-)Programm P (Eingabe als Quelltext) entscheidet, ob P nach endlich vielen Schritten anhält?

Antwort (Herleitung später): **Nein**

Folgerungen:

- ▶ Alle Versuche, ein solches Programm zu erzeugen, müssen fehlschlagen.
- ▶ Sinnvoll ist jedoch die Suche nach Verfahren, die für eine **möglichst große Teilmenge** aller (Dienst-)Programme P entscheiden, ob P nach endlich vielen Schritten anhält.
- ▶ Entwickler von P (Dienstleister) muss nachweisen, dass sein Programm P nach endlich vielen Schritten anhält.

Komplexität

Beispiel Primzahltest

Aufgabe: Ist eine gegebene Zahl n eine Primzahl?

Instanz der Aufgabe: Ist 12347 eine Primzahl?

lösbar durch den Algorithmus:

1. Für alle $i \in \{2, \dots, n\}$:
Test: Ist n durch i teilbar?
 - ▶ ja: Ende mit Ausgabe n ist **nicht prim**.
 - ▶ nein: weiter (mit Test für $i + 1$)
2. Ausgabe: n ist **prim**.

Dieser Test ist für große Zahlen aufwendig. Geht es besser?

- ▶ Was bedeutet **aufwendig** und **besser**?
- ▶ Wie aufwendig ist eine **Berechnung**?
- ▶ Wie aufwendig ist die Lösung einer **Aufgabe**?

Literatur

- ▶ Uwe Schöning:
Theoretische Informatik - kurzgefasst (Spektrum 2001)
- ▶ John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman:
Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie (Addison-Wesley 1990)

Online Verfügbar (über Bibliothek):

- ▶ Dirk W. Hoffmann: Theoretische Informatik (Hanser 2018)
- ▶ Ulrich Hedtstück: Einführung in die Theoretische Informatik Formale Sprachen und Automatentheorie (Oldenbourg 2012)
- ▶ Lukas König, Friederike Pfeiffer-Bohnen, Hartmut Schmeck
Theoretische Informatik – ganz praktisch (De Gruyter 2016)
- ▶ Heinz-Peter Gumm, Manfred Sommer
Informatik – Band 3: Formale Sprachen, Compilerbau, Berechenbarkeit und Komplexität (De Gruyter 2019)
- ▶ Gottfried Vossen, Kurt-Ulrich Witt:
Grundkurs Theoretische Informatik (Vieweg 2016)
- ▶ Renate Winter: Theoretische Informatik (Oldenbourg 2002)

WH: Alphabet, Wort, Sprache

Für jede Menge A heißt

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_n = \{w_1 \cdots w_n \mid \forall i : w_i \in A\}$$

Menge aller **Wörter der Länge n** über A

(n -Tupel, Vektoren, Folgen, Listen, Zeichenketten)

$$A^* = \bigcup_{\{n \in \mathbb{N}\}} A^n \quad \text{Menge aller **Wörter** über } A$$

(endliche Folgen, Listen, Zeichenketten)

$$A^0 = \{\varepsilon\} \quad \text{mit **leerem Wort } \varepsilon**$$

Alphabet (endliche) Menge A von Symbolen

Wort endliche Folge von Symbolen $w = w_1 \cdots w_n$ mit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i \in A$$

Länge eines Wortes $|w| =$ Anzahl der Symbole in w

Anzahl der Vorkommen eines Symboles in einem Wort

$$|w|_a = \text{Anzahl der } a \text{ in } w \text{ (für } a \in A)$$

Sprache Menge von Wörtern $L \subseteq A^*$

Beispiele

- ▶ Alphabet $A = \{0, 1\}$
 - Wörter $\in A^* = \{0, 1\}^*$: Menge aller Binärwörter
 - Sprachen $\subseteq A^*$, z.B.
 - ▶ $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w_1 \neq 0\}$ Menge aller Binärzahlen ohne führende Nullen
 - ▶ $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w_1 \neq 0 \wedge w_{|w|-1} = w_{|w|} = 0\}$ Menge aller Binärdarstellungen durch 4 teilbarer Zahlen ohne führende Nullen
- ▶ Alphabet $A = \{a, b\}$
 - Wörter $\in A^* = \{a, b\}^*$: Menge aller Wörter, die höchstens die Buchstaben a und b enthalten
 - Sprachen $\subseteq A^*$, z.B.
 - ▶ \emptyset
 - ▶ $\{a, b\}$
 - ▶ $\{a\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\}$
 - ▶ $\{w \in \{a, b\}^* \mid w_1 = a \wedge w_{|w|} = a\} = \{a, aa, aaa, aba, aaaa, abaa, aaba, abba, \dots\}$

WH: Darstellung von Wörtern

extensional durch Angabe der **Symbole** in ihrer **Reihenfolge**

Beispiele: $u = 321$,

$v = abababababa$,

$w = w_1 \cdots w_4$ mit $w_1 = w_2 = w_3 = a$, $w_4 = b$

intensional durch Angabe einer **Eigenschaft**, die für jeden Index i das i -te Symbol eindeutig bestimmt.

Beispiele:

$u \in \{0, \dots, 4\}^3$ mit $\forall i \in \{1, \dots, 3\} : u_i = 4 - i$,

$v \in \{a, b\}^{11}$ mit $\forall i \in \{1, \dots, 11\} : v_i = \begin{cases} a & \text{falls } i \in 2\mathbb{N} + 1 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$

$w \in \{a, b\}^4$ mit $w_4 = b \wedge \forall i \in \{1, \dots, 3\} : w_i = a$

WH: Darstellung von Sprachen

extensional durch Angabe der **Elemente**
(nur Beschreibung endlicher Sprachen möglich)
Beispiele: $\{\varepsilon, a, aa, aaa\}$, $\{b, ba, baa, baaa\}$,
 $\{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$

intensional durch Angabe einer **Eigenschaft**, die genau alle
Wörter der Sprache haben.
(auch Beschreibung unendlicher Sprachen möglich)
Beispiele: $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \leq 3\}$,
 $\{w \in \{a, b\}^* \mid w_1 = b \wedge \forall i \in \{2, \dots, |w|\} : w_i = a\}$,
 $\{w \in \{a, b\}^* \mid \forall i \in \{2, \dots, |w|\} : w_i = w_1\}$

später in dieser LV noch mehr Formalismen zur endlichen
Beschreibung von eingeschränkten Sprachklassen
(reguläre Ausdrücke, Grammatiken, Automaten, ...)

WH: Operationen auf Wörtern

Operationen auf Wörtern $u, v \in A^*$:

Verkettung $\circ : A^* \times A^* \rightarrow A^*$, wobei

$$\forall u \in A^* \forall v \in A^* \forall i \in \{1, \dots, |u| + |v|\} :$$

$$(u \circ v)_i = \begin{cases} u_i & \text{falls } i \leq |u| \\ v_{i-|u|} & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziativ, nicht kommutativ, ε ist neutral

Damit ist $(A^*, \circ, \varepsilon)$ ein **Monoid**.

Spiegelung $^R : A^* \rightarrow A^*$, wobei

$$\forall u \in A^* \forall i \in \{1, \dots, |u|\} : u_i^R = u_{|u|+1-i}$$

$u \in A^*$ heißt **Palindrom** gdw. $u^R = u$

Fakt

- ▶ Für jedes Wort $u \in A^*$ gilt $(u^R)^R = u$.
- ▶ Für je zwei beliebige Wörter $u, v \in A^*$ gilt $(u \circ v)^R = v^R \circ u^R$.

ÜA: Beweis

Anwendung: Java-Standardbibliothek

Rotieren einer Liste in `java.util.Collections`:

$$\left(\underbrace{x_0, \dots, x_{\text{mid}-1}}_u, \underbrace{x_{\text{mid}}, \dots, x_{\text{size}}}_v \right) \text{ durch } v \circ u = (u^R \circ v^R)^R$$

```
private static void rotate2(List<?> list, int distance) {
    int size = list.size();
    if (size == 0)
        return;
    int mid = -distance % size;
    if (mid < 0)
        mid += size;
    if (mid == 0)
        return;

    reverse(list.subList(0, mid));
    reverse(list.subList(mid, size));
    reverse(list);
}
```

WH: Relationen zwischen Wörtern

Präfix $\sqsubseteq \subseteq A^* \times A^*$:

$$\forall u \in A^* \forall v \in A^* : ((u \sqsubseteq v) \leftrightarrow (\exists w \in A^* (u \circ w = v)))$$

z.B. *tom* \sqsubseteq *tomate* (mit $w = \text{ate}$)

Suffix (Postfix):

$$\forall u \in A^* \forall v \in A^* : (u \text{ Suffix von } v \leftrightarrow (\exists w \in A^* (w \circ u = v)))$$

z.B. *enten* ist Suffix von *studenten* (mit $w = \text{stud}$)

Infix (Faktor, zusammenhängendes Teilwort):

$$\forall u \in A^* \forall v \in A^* : (u \text{ Infix von } v \leftrightarrow (\exists w \in A^* \exists w' \in A^* : (w \circ u \circ w' = v)))$$

z.B. *oma* ist Infix von *tomate* (mit $w = t$ und $w' = te$)

Präfix-, Suffix- und Infixrelation sind **Halbordnungen**
(aber keine totalen Ordnungen).

Weitere Ordnungen auf Wörtern

Jede totale Ordnung $<$ auf dem Alphabet A definiert totale Ordnungen auf A^* :

lexikographische Ordnung auf A^* ($\leq_{\text{lex}} \subseteq A^* \times A^*$):

$\forall u, v \in A^* : u \leq_{\text{lex}} v$ gdw.

1. $u \sqsubseteq v$ oder
2. $\exists w \in A^* \exists x, y \in A : x < y \wedge wx \sqsubseteq u \wedge wy \sqsubseteq v$

quasi-lexikographische Ordnung auf A^* ($\leq_{\text{qlex}} \subseteq A^* \times A^*$):

$\forall u, v \in A^* : u \leq_{\text{qlex}} v$ gdw.

1. $|u| < |v|$ oder
2. $|u| = |v| \wedge u \leq_{\text{lex}} v$

Beispiele: für $A = \{a, b\}$ mit $a < b$

- ▶ $ab \sqsubseteq aba$, $ab \leq_{\text{lex}} aba$, $ab \leq_{\text{qlex}} aba$
- ▶ $abab \not\sqsubseteq abba$, aber $abab \leq_{\text{lex}} abba$ und $abab \leq_{\text{qlex}} abba$,
- ▶ $aaa \leq_{\text{lex}} ab$, aber $aaa \not\leq_{\text{qlex}} ab$
- ▶ $ab \not\leq_{\text{lex}} aaba$, aber $ab \leq_{\text{qlex}} aaba$

WH: Sprachen als Mengen

Sprachen $L \subseteq A^*$ sind **Mengen** von Wörtern

Eigenschaften: leer, endlich, abzählbar, überabzählbar

Mengenrelationen auf Sprachen:

$$L \subseteq L' \quad \text{gdw.} \quad \forall w \in A^* : w \in L \rightarrow w \in L' \text{ gilt}$$

$$L = L' \quad \text{gdw.} \quad \forall w \in A^* : w \in L \leftrightarrow w \in L' \text{ gilt}$$

Mengenoperationen auf Sprachen:

$$L \cup L' = \{w \mid w \in L \vee w \in L'\}$$

$$L \cap L' = \{w \mid w \in L \wedge w \in L'\}$$

$$L \setminus L' = \{w \mid w \in L \wedge w \notin L'\}$$

$$L \Delta L' = (L \setminus L') \cup (L' \setminus L)$$

Komplement einer Sprache $L \subseteq A^*$: $\bar{L} = A^* \setminus L$

Beispiel:

$$L = \bigcup_{n \in 3\mathbb{N}} A^n \qquad \bar{L} = \bigcup_{n \in \{3i+1 \mid i \in \mathbb{N}\}} A^n \cup \bigcup_{n \in \{3i+2 \mid i \in \mathbb{N}\}} A^n$$

WH: Operationen auf Sprachen

Spiegelung $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$

Verkettung \circ von Sprachen:

$$L_1 \circ L_2 = \{u \circ v \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$$

iterierte Verkettung von Sprachen $L \subseteq A^*$

$$L^0 = \{\varepsilon\} \quad \forall n \in \mathbb{N}: L^{n+1} = L^n \circ L = \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n+1\text{-mal}}$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \quad L^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} L^n$$

Spezialfall $L = \{u\} \in A^*$:

$$u^n = \underbrace{u \cdots u}_{n\text{-mal}} \in A^*, \quad u^* = \{u\}^* = \{u^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A^*$$

$$u^+ = u^* \setminus \{\varepsilon\} = \{u\}^+ = \{u^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq A^*$$

WH: Reguläre Ausdrücke – Syntax

Die Menge $\text{RegExp}(A)$ aller **regulären Ausdrücke** über einem Alphabet A ist (induktiv) definiert durch:

- IA $\emptyset \in \text{RegExp}(A)$,
 $\varepsilon \in \text{RegExp}(A)$ und
für jedes Symbol $a \in A$ gilt $a \in \text{RegExp}(A)$
- IS für alle $E \in \text{RegExp}(A)$ und $F \in \text{RegExp}(A)$ gilt
 $(E + F), EF, (E)^* \in \text{RegExp}(A)$.

Beispiele: $\varepsilon + a$, $\varepsilon + \emptyset$, $(a + \emptyset)^*$, $\varepsilon + ((ab)^* a)^*$

dieselbe Definition kürzer: $\text{RegExp}(A) = \text{Term}(\Sigma_F, \emptyset)$

für die Signatur

$\Sigma_F = \{(\emptyset, 0), (\varepsilon, 0), (*, 1), (+, 2), (\cdot, 2)\} \cup \{(a, 0) \mid a \in A\}$
(Baumdarstellung)

WH: Reguläre Ausdrücke – Semantik

Jeder reguläre Ausdruck $E \in \text{RegExp}(A)$ repräsentiert eine Sprache $L(E) \subseteq A^*$.

$$\begin{aligned} L(\emptyset) &= \emptyset \\ L(\varepsilon) &= \{\varepsilon\} \\ \forall a \in A : L(a) &= \{a\} \\ \forall E, F \in \text{RegExp}(A) : L(E + F) &= L(E) \cup L(F) \\ \forall E, F \in \text{RegExp}(A) : L(EF) &= L(E) \circ L(F) \\ \forall E, F \in \text{RegExp}(A) : L(E^*) &= (L(E))^* \end{aligned}$$

Eine Sprache $L \subseteq A^*$ heißt genau dann **regulär**, wenn ein regulärer Ausdruck $E \in \text{RegExp}(A)$ mit $L = L(E)$ existiert.

Beispiel: Die Menge L aller Dezimaldarstellungen natürlicher Zahlen ist regulär wegen $L = L(0 + (1 + 2 + \dots + 9)(0 + 1 + \dots + 9)^*)$

WH: Beispiele

Für $A = \{a, b\}$ gilt

$$L(ab^*) = \{a, ab, abb, abbb, abbbb, \dots\} = \{ab^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L((ab)^*) = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\} = \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L((a + b)^*) = \{a, b\}^*$$

$$L(a^*b^*) = \{u \circ v \mid u \in a^* \wedge v \in b^*\}$$

$$L((a^*b^*)^*) = \{a, b\}^*$$

$$L((a + b)^*aba) = \{u \circ aba \mid u \in A^*\}^*$$

Reguläre Ausdrücke ermöglichen eine **endliche** Darstellung **unendlicher** Sprachen.

Äquivalenz regulärer Ausdrücke

Zwei reguläre Ausdrücke $E, F \in \text{RegExp}(A)$ heißen genau dann **äquivalent**, wenn $L(E) = L(F)$ gilt.

Beispiele (ÜA):

- ▶ $(a + b)^*$, $(a^* + b^*)^*$ und $a^*(ba^*)^*$ sind paarweise äquivalent
- ▶ ab^* und $(ab)^*$ sind nicht äquivalent
- ▶ $(11 + 0 + 110 + 011)^*$ und $(11 + 0)^*$ sind ...

Fakt

Die Äquivalenz regulärer Ausdrücke ist eine Äquivalenzrelation.

ÜA: Beweis

Interessante Fragen für formale Sprachen

- ▶ Ist ein gegebenes Wort w in der Sprache L enthalten? (häufig **Wortproblem** genannt)
- ▶ Enthält die Sprache L nur endlich viele Wörter?
- ▶ Gilt $L_1 \subseteq L_2$ für zwei gegebene Sprachen L_1 und L_2 ?
- ▶ Gilt $L_1 = L_2$ für zwei gegebene Sprachen L_1 und L_2 ?

Fragen zur Regularität:

- ▶ Lässt sich die Sprache L durch einen regulären Ausdruck definieren? (Gilt $\exists E \in \text{RegExp}(A) : L = L(E)$?)
- ▶ Woran kann man erkennen, ob sich eine Sprache durch einen regulären Ausdruck definieren lässt?
- ▶ Gilt $L(E) = \emptyset$ für einen gegebenen regulären Ausdruck E ?
- ▶ Gilt $L(E) = A^*$ für einen gegebenen regulären Ausdruck E ?
- ▶ Ist ein gegebenes Wort w in der durch den regulären Ausdruck E definierten Sprache $L(E)$ enthalten?

Alle Antworten sind für endliche Sprachen einfach, aber für unendliche Sprachen oft schwierig.

Wortproblem praktisch

Eingabe : Sprache $L \subseteq A^*$, Wort $w \in A^*$

Frage: Gilt $w \in L$?

Ausgabe: ja oder nein

Beispiele:

- ▶ Syntaktische Tests:
 - ▶ Ist die gegebene Zeichenkette die Dezimaldarstellung einer ganzen Zahl?
(Sprache: Menge aller gültigen Dezimaldarstellungen)
 - ▶ Ist die gegebene Zeichenkette eine korrekt geformte Email-Adresse (der HTWK)?
 - ▶ Ist der gegebene Quelltext ein syntaktisch korrektes Java-Programm?
 - ▶ Ist die gegebene Zeichenkette die Binärdarstellung einer geraden Zahl? (durch drei teilbaren Zahl, usw.)
- ▶ Folgen von Aktionen:
 - ▶ An- und Ausziehen (in umgekehrter Reihenfolge)
 - ▶ Ist eine Folge von Aktionen möglich / zulässig ?
 - ▶ Führt eine Folge von Eingaben zu einem Fehler?

Wortersetzungssysteme

Alphabet A

Wortersatzungsregel $(l, r) \in A^* \times A^*$ (geschrieben $l \rightarrow r$)

Wortersetzungssystem endliche Menge von Wortersatzungsregeln

Beispiele:

- ▶ Regel $ba \rightarrow ab$,
- ▶ Wortersetzungssystem $S = \{a \rightarrow ab, ba \rightarrow c, abc \rightarrow \varepsilon\}$

Anwendung von Wortersetzungsregeln

Eine Regel $l \rightarrow r$ ist auf ein Wort $w \in A^*$ **anwendbar**, falls l ein Infix von w ist.

Beispiel: Regel $oma \rightarrow o$ ist

- ▶ auf *isomatte* anwendbar, $u = is, v = tte$,
- ▶ auf *tomate* anwendbar, $u = t, v = te$,
- ▶ auf *matte, sommer* und *normal* nicht anwendbar.

Eine **Anwendung** der Regel $l \rightarrow r$ auf ein Wort $w = u \circ l \circ v$ ergibt das Wort $u \circ r \circ v$.
(Ersetzung des Infix l durch r)

Beispiel: $ab \rightarrow a$ angewendet auf $baababa = u \circ l \circ v$

- ▶ mit $u = ba$ und $v = aba$ ergibt *baaaba*
- ▶ mit $u = baab$ und $v = a$ ergibt *baabaa*

Anwendung einer **Regel** auf ein **Wort** an einer **Position** im Wort

Ableitungsschritt

Ableitungsschritt $(u, (l \rightarrow r), p, v)$ im Wortersetzungssystem S mit

- ▶ Ausgangswort u ,
- ▶ auf u anwendbare Regel $l \rightarrow r$ aus S ,
- ▶ Position $p \in \{1, \dots, |u|\}$ im Wort u , an der der Infix l beginnt
- ▶ v ist das nach Anwendung der Regel $l \rightarrow r$ an Position p auf u entstandene Wort.

Beispiel:

$S = \{ab \rightarrow ba, a \rightarrow b\}$, $u = aba$

mögliche Ableitungsschritte in S

$(aba, (ab \rightarrow ba), 1, baa)$

$(aba, (a \rightarrow b), 3, abb)$

$(aba, (a \rightarrow b), 1, bba)$

Ein-Schritt-Ableitungsrelation

Jedes Wortersetzungssystem $S \subseteq A^* \times A^*$ definiert eine Relation $\rightarrow_S \subseteq A^* \times A^*$, wobei genau dann $u \rightarrow_S v$ gilt, wenn ein Ableitungsschritt $(u, (l \rightarrow r), p, v)$ mit $(l \rightarrow r) \in S$ existiert.

Beispiel: Für $S = \{ab \rightarrow ba, a \rightarrow b\}$ gilt

- ▶ $aba \rightarrow_S baa$ wegen $(aba, (ab \rightarrow ba), 1, baa)$
- ▶ $aba \rightarrow_S bba$ wegen $(aba, (a \rightarrow b), 1, bba)$
- ▶ $aba \rightarrow_S abb$ wegen $(aba, (a \rightarrow b), 3, abb)$
- ▶ $aba \not\rightarrow_S bbb$

Ableitungen

Eine Folge von Ableitungsschritten

$(u, (l_1 \rightarrow r_1), p_1, u_2), (u_2, (l_2 \rightarrow r_2), p_2, u_3), \dots, (u_{n-1}, (l_{n-1} \rightarrow r_{n-1}), p_{n-1}, v)$

im Wortersetzungssystem S heißt **Ableitung** von u nach v in S .

Beispiel: $S = \{ab \rightarrow ba, a \rightarrow b\}$, $u = aba$

Folge von Ableitungsschritten

$(aba, (ab \rightarrow ba), 1, baa), (baa, (a \rightarrow b), 3, bab), (bab, (a \rightarrow b), 2, bbb)$

$$\underline{a}ba \xrightarrow{ab \rightarrow ba} ba\underline{a} \xrightarrow{a \rightarrow b} ba\underline{b} \xrightarrow{a \rightarrow b} bbb$$

Länge der Ableitung = Anzahl der Ableitungsschritte

In jedem System S existiert für jedes $u \in A^*$ die **leere Ableitung** (der Länge 0) von u nach u .

Wiederholung: Hüllen binärer Relationen

$R \cup I_M$ heißt **reflexive Hülle** von $R \subseteq M^2$

(mit Identität $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$)

$R \cup R^{-1}$ heißt **symmetrische Hülle** von $R \subseteq M^2$

(mit inverser Relation $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$)

Wiederholung: Verkettung \circ der Relationen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq M^2$

$$R \circ S = \{(x, z) \in M^2 \mid \exists y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

Iterierte Verkettung von $R \subseteq M^2$ mit sich selbst:

$$R^0 = I_M$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} R^n \subseteq M^2 \quad \text{transitive Hülle}$$

$$R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n \subseteq M^2 \quad \text{reflexiv-transitive Hülle}$$

Ersetzungsrelation

Jedes Wortersetzungssystem $S \subseteq (A^* \times A^*)$ definiert die **Ersetzungsrelation** $\rightarrow_S^* \subseteq (A^* \times A^*)$, wobei genau dann $u \rightarrow_S^* v$ gilt, wenn eine Ableitung von u nach v existiert.

Beispiel: $S = \{a \rightarrow aa\}$,

► für jedes $n \geq 1$ gilt $ba \rightarrow_S^* \underbrace{ba \cdots a}_n$

wegen $ba \rightarrow_S baa \rightarrow_S baaa \rightarrow_S \cdots \rightarrow_S \underbrace{ba \cdots a}_n$

► $b \rightarrow_S^* b$, aber für kein Wort $w \neq b$ gilt $b \rightarrow_S^* w$

(\rightarrow_S^* ist die reflexive transitive Hülle von \rightarrow_S)

Münzenspiel als Wortersetzungssystem

Symbole Höhe der Stapel $A = \{0, \dots, 4\}$

Konfiguration Wort $w \in A^5$

Startkonfiguration Wort $W = 00400$

Spielzug Anwendung einer Regel aus dem Wortersetzungssystem

$$S = \left\{ i(j+2)k \rightarrow (i+1)j(k+1) \mid \begin{array}{l} i, j, k \in \{0, \dots, 4\} \\ \wedge i + (j+2) + k \leq 4 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} 040 \rightarrow 121, 220 \rightarrow 301, 022 \rightarrow 103 \\ 030 \rightarrow 111, 130 \rightarrow 211, 031 \rightarrow 112, \\ 020 \rightarrow 101, 120 \rightarrow 201, 021 \rightarrow 102, 121 \rightarrow 202 \end{array} \right\}$$

Das Paar $(S, 00400)$ definiert die Menge (Sprache) aller aus 00400 durch \rightarrow_S^* erreichbaren Konfigurationen:

$$L(S, 00400) = \{00400, 01210, 02020, 10120, 02101, 10201, 11011\}$$

Auf das Wort 11011 ist keine Regel aus S anwendbar.
Deshalb heißt 11011 **Normalform** bzgl. S

Was bisher geschah

- ▶ Alphabet, Wort, Sprache
- ▶ Operationen und Relationen auf Wörtern und Sprachen
- ▶ interessante Fragen für Sprachen und Wörter

Reguläre Ausdrücke

- ▶ Syntax, Semantik
- ▶ endliche Darstellung evtl. unendlicher Sprachen

Wortersetzungssysteme $P \subseteq A^* \times A^*$

- ▶ Wortersetzungsregel $l \rightarrow r$ mit $l, r \in A^*$
- ▶ Ableitung in P : endliche Folge von Ersetzungsschritten
- ▶ Ausdrucksstärke:
 - ▶ Repräsentation von (evtl. unendlichen) Sprachen
 - ▶ Modellierung von Zustandsübergängen

Wortersetzungssysteme – Beispiele

$S_1 = \{||| \rightarrow | \}$ mit $u = |||||$ und $v = |||$

Was wird hier „berechnet“?

$S_2 = \{11 \rightarrow 1, 00 \rightarrow 1, 01 \rightarrow 0, 10 \rightarrow 0\}$ und $u = 1101001$

Wirkung verschiedener Ableitungreihenfolgen?

$S_3 = \{c \rightarrow aca, c \rightarrow bcb, c \rightarrow a, c \rightarrow b, c \rightarrow \varepsilon\}$ und $u = c$

Menge aller in S_3 aus c ableitbaren Wörter, die kein c enthalten?

Sprachen aus Wortersetzungssystemen

Jedes Paar (Wortersetzungssystem S , Anfangswort w) über einem Alphabet A definiert die Sprache

$$L(S, w) = \{v \in A^* \mid w \rightarrow_S^* v\}$$

(Menge aller Wörter v , die von w durch eine Ableitung in S erreicht werden)

Beispiel: $S = \{c \rightarrow aca, c \rightarrow bcb\}$, $w = c$

$L(S, w) = \{v \circ c \circ v^R \mid v \in \{a, b\}^*\}$ (Menge aller Palindrome über $\{a, b, c\}$, die genau an der mittleren Position ein c enthalten)

Jedes Paar (Wortersetzungssystem S , Menge M von Wörtern) über einem Alphabet A definiert die Sprache

$$L(S, M) = \bigcup_{w \in M} L(S, w)$$

(alle Wörter v , die von irgendeinem $w \in M$ durch eine Ableitung in S erreicht werden)

Beispiel: Für $S = \{a \rightarrow aa\}$ und $M = \{b, ba\}$ ist $L(S, M) = L(ba^*)$

Ausdrucksstärke von Wortersetzungssystemen

Wortersetzungssysteme

- ▶ ermöglichen eine **endliche Darstellung unendlicher Sprachen**.

(als Erzeugungsvorschrift für alle Wörter der Sprache)

Beispiele: $L(\{\varepsilon \rightarrow aaa\}, \varepsilon) = \{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\} = L(aaa)^*$

$L(\{2 \rightarrow 020, 2 \rightarrow 121\}, 2) = \{w2w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

- ▶ können zur **Modellierung** von Zuständen und Übergängen dazwischen verwendet werden

z.B. Spiele, Ausführung von Programmen,

Programmverifikation

Beispiel: Lineares Solitaire

- ▶ können **Berechnungen** simulieren

(Bestimmung von erreichbaren Wörtern ohne Nachfolger)

Beispiel: $\varepsilon \in L(\{||| \rightarrow | \}, |||||)$

Wortproblem für durch Wortersetzungssysteme definierte Sprachen

Ist ein gegebenes Wort w in der Sprache $L(S, u)$ enthalten?

alternative Formulierung: Gilt $u \rightarrow_S^* w$?

Ableitungsrelation \rightarrow_S als

(unendlicher) gerichteter Graph $G_S = (V, E)$ mit

Knoten: $V = A^*$

Kanten: $E = \{(u, v) \mid u \rightarrow_S v\}$

$u \rightarrow_S^* w$ gilt genau dann, wenn in G_S ein Pfad von u nach w existiert.

Beispiel: (Tafel) $S = \{ab \rightarrow ba\}$,

$abab \rightarrow_S^* baba$, aber $abab \not\rightarrow_S^* abaa$, $abab \not\rightarrow_S^* aabb$

Sprachen aus Wortersetzungssystemen

Lösung des Wortproblems und anderer Fragen zu Sprachen ist für endliche Sprachen einfach, für unendliche Sprachen oft nicht.

Darstellung der Sprache durch ein Wortersetzungssystem kann helfen.

Lösung des Wortproblem $w \in L(S, u)$ durch Standardverfahren:
Suche eines Pfades von u nach w im Ableitungsgraphen des Wortersetzungssystems S

Problem:

- ▶ Pfadsuche ist Standardverfahren für endliche Graphen.
- ▶ Ableitungsgraphen von Wortersetzungssystemen sind aber meist unendlich.

Standardverfahren ist in Spezialfällen anwendbar, für welche die Suche in einem endlichen Teilgraphen genügt

Nichtverlängernde Wortersetzungssysteme

Ein Wortersetzungssystem S heißt genau dann **nichtverlängernd**, wenn für jede Regel $(l \rightarrow r) \in S$ gilt: $|l| \geq |r|$.

Wortproblem (L, w) :

Eingabe : Sprache $L \subseteq A^*$, Wort $w \in A^*$

Frage: Gilt $w \in L$?

Ausgabe ja oder nein

Beispiel: $S = \{ab \rightarrow ba, ac \rightarrow a\}$, $u = abcac$, $v = aacb$

Satz

Es gibt einen Algorithmus, welcher für jedes nichtverlängernde Wortersetzungssystem $S \subseteq A^ \times A^*$ und beliebige Wörter $u, w \in A^*$ das Wortproblem $(L(S, u), w)$ in endlicher Zeit korrekt löst.*

Idee:

Suche im endlichen Teilgraphen aller Wörter $v \in A^*$ mit $|v| \leq |u|$

Nichtverkürzende Wortersetzungssysteme

Ein Wortersetzungssystem S heißt genau dann **nichtverkürzend**, wenn für jede Regel $(l \rightarrow r) \in S$ gilt: $|l| \leq |r|$.

Beispiel: $S = \{a \rightarrow ba, b \rightarrow a\}$, $u = b$, $w = aba$, $w' = ab$

Satz

Es gibt einen Algorithmus, welcher für jedes nichtverkürzende Wortersetzungssystem $S \subseteq A^ \times A^*$ und beliebige Wörter $u, w \in A^*$ das Wortproblem $(L(S, u), w)$ in endlicher Zeit korrekt löst.*

Idee:

Suche im endlichen Teilgraphen aller Wörter $v \in A^*$ mit $|u| \leq |v| \leq |w|$

Wortersetzungssysteme mit verlängernden und verkürzenden Regeln

Beispiel:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow baaca, \\ c \rightarrow aacba, \\ c \rightarrow bbcabb, \\ aca \rightarrow d, \\ bcb \rightarrow d, \\ ada \rightarrow d, \\ bdb \rightarrow d \end{array} \right\}$$

Gilt $c \rightarrow_S^* d$?

Für Wortersetzungssysteme S mit verlängernden und verkürzenden Regeln existiert im Allgemeinen **kein** Algorithmus, der für beliebige Wörter $u, w \in A^*$ feststellt, ob $u \rightarrow_S^* w$ gilt.

Ableitbare Wörter über Teilalphabet

Beispiele: $A = \{a, b, c\}$,

$$S = \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow aca, \\ c \rightarrow bcb, \\ c \rightarrow \varepsilon, \\ c \rightarrow a, \\ c \rightarrow b \end{array} \right\}$$

$$L(S, c) = \{u \circ d \circ u^R \mid u \in \{a, b\}^* \wedge d \in \{a, b, c, \varepsilon\}\}$$

Menge aller Wörter in $L(S, c) \cap \{a, b\}^*$:

alle Palindrome in $\{a, b\}^*$

c ist **Hilfssymbol** zur Erzeugung der Palindrome

Natürliche Sprache

Wortersetzungssystem S enthält die Regeln:

Satz	→	Subjekt Prädikat .
Subjekt	→	mArtikel mSubstantiv
Subjekt	→	wArtikel wSubstantiv
mArtikel	→	Der
wArtikel	→	Die
mSubstantiv	→	Hund
wSubstantiv	→	Sonne
Prädikat	→	bellt
Prädikat	→	scheint

Alphabet $A = \{\text{Der, Die, Hund, Sonne, scheint, bellt, .}\} \cup$
 $\{\text{Satz, Subjekt, Prädikat, wArtikel, mArtikel, wSubstantiv, mSubstantiv}\}$

Ableitbare Wörter in $L(S, \text{Satz})$ ohne Hilfssymbole aus der Menge
 $\{\text{Satz, Subjekt, Prädikat, mArtikel, wArtikel, mSubstantiv, wSubstantiv}\}$:
Menge korrekter deutscher Sätze (dieser einfachen Form mit
ausschließlich den Worten **Der, Die, Hund, Sonne, scheint, bellt**).

Aussagenlogische Formeln

Wortersetzungssystem S enthält die Regeln

Formel	\rightarrow	Variable
Formel	\rightarrow	Konstante
Formel	\rightarrow	(\neg Formel)
Formel	\rightarrow	(Formel \vee Formel)
Formel	\rightarrow	(Formel \wedge Formel)
Variable	\rightarrow	p
Variable	\rightarrow	q
Konstante	\rightarrow	t
Konstante	\rightarrow	f

Alphabet $A = \{\mathbf{t}, \mathbf{f}, p, q, \neg, \vee, \wedge, (,)\} \cup \{\text{Formel}, \text{Variable}, \text{Konstante}\}$

$$\text{Formel} \rightarrow_S (\text{Formel} \wedge \text{Formel}) \rightarrow_S^2 (\text{Formel} \wedge \mathbf{f}) \rightarrow_S^* ((p \vee (\neg q)) \wedge \mathbf{f})$$

Wörter in $L(S, \text{Formel}) \cap \{\mathbf{t}, \mathbf{f}, p, q, \neg, \vee, \wedge, (,)\}^*$:

Menge $AL(\{p, q\})$ aller aussagenlogischen Formeln mit

Aussagenvariablen aus der Menge $\{p, q\}$

Aussagenlogische DNF

Wortersetzungssystem S enthält die Regeln

DNF \rightarrow Minterm \vee DNF

DNF \rightarrow Minterm

Minterm \rightarrow Literal \wedge Minterm

Minterm \rightarrow Literal

Literal \rightarrow \neg Variable

Literal \rightarrow Variable

Variable \rightarrow p

Variable \rightarrow q

Alphabet $A = \{p, q, \neg, \vee, \wedge\}$
 $\cup \{ \text{DNF, Minterm, Literal, Variable} \}$

$\text{DNF} \rightarrow_S \text{Minterm} \vee \text{DNF} \rightarrow_S^3 p \vee \text{DNF} \rightarrow_S^* p \vee q \wedge \neg p \vee \neg q$

Wörter in $L(S, \text{DNF}) \cap \{p, q, \neg, \vee, \wedge\}^*$:

Menge $AL(\{p, q\})$ aller disjunktiven Normalformen mit

Aussagenvariablen aus der Menge $\{p, q\}$

Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen

Wortersetzungssystem S enthält die Regeln

Zahl \rightarrow 0

Zahl \rightarrow 1Ziffernfolge

\vdots

Zahl \rightarrow 9Ziffernfolge

Ziffernfolge \rightarrow 0Ziffernfolge

\vdots

Ziffernfolge \rightarrow 9Ziffernfolge

Ziffernfolge \rightarrow ε

Alphabet $\{0, \dots, 9\} \cup \{ \text{Zahl}, \text{Ziffernfolge} \}$

$\text{Zahl} \rightarrow_S 3\text{Ziffernfolge} \rightarrow_S 32\text{Ziffernfolge} \rightarrow_S 327\text{Ziffernfolge} \rightarrow_S 327$

Wörter in $L(S, \text{Zahl}) \cap \{0, \dots, 9\}^*$:

Menge aller Dezimaldarstellungen natürlicher Zahlen

Definition Grammatik

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist definiert durch

Nichtterminalsymbole: endliche Menge N
(Hilfssymbole)

Terminalsymbole: endliche Menge T
(Alphabet der erzeugten Sprache)

Wortersetzungssystem: $P \subseteq (N \cup T)^+ \times (N \cup T)^*$ (Produktionen)

Startsymbol $S \in N$

Beispiel: $G = (N, T, P, S)$ mit

$$N = \{S\},$$

$$T = \{0, 1\},$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0S1 \\ S \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

Grammatiken: Beispiele

- $G = (N, T, P, E)$ mit $N = \{E, F, G\}$, $T = \{(\,), a, +, \cdot\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow G, \\ E \rightarrow E + G, \\ G \rightarrow F, \\ G \rightarrow G \cdot F, \\ F \rightarrow a, \\ F \rightarrow (E) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow G \mid E + G, \\ G \rightarrow F \mid G \cdot F, \\ F \rightarrow a \mid (E) \end{array} \right\}$$

- $G = (N, T, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSBC, \\ S \rightarrow aBC, \\ CB \rightarrow BC, \\ aB \rightarrow ab, \\ bB \rightarrow bb, \\ bC \rightarrow bc, \\ cC \rightarrow cc \end{array} \right\}$$

Ableitungen in Grammatiken

Ableitung in Grammatik $G = (N, T, P, S)$:

Ableitung im Ersetzungssystem P mit Startwort S

Beispiel: $G = (N, T, P, S)$ mit

$$N = \{S, A, B\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0SA \\ S \rightarrow 0A \\ A \rightarrow 1 \\ B \rightarrow A \end{array} \right\}$$

Durch Grammatiken definierte Sprachen

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definiert die Sprache

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \rightarrow_P^* w\} = L(P, S) \cap T^*$$

Beispiel: $G = (N, T, P, S)$ mit

$$N = \{S, Z\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1Z, \\ S \rightarrow 0, \\ Z \rightarrow 0Z, \\ Z \rightarrow 1Z, \\ Z \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

definiert die Sprache $L(G) = \dots$

Äquivalenz von Grammatiken

Zwei Grammatiken G_1 und G_2 heißen genau dann **äquivalent**, wenn $L(G_1) = L(G_2)$ gilt.

Beispiel: $G_1 = (N_1, \{0, 1\}, P_1, S)$ mit $N_1 = \{S, A, B\}$ und

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0SA \\ S \rightarrow 0A \\ A \rightarrow 1 \\ B \rightarrow A \end{array} \right\}$$

und $G_2 = (N_2, \{0, 1\}, P_2, S')$ mit $N_2 = \{S'\}$ und

$$P_2 = \{S' \rightarrow 0S'1, S' \rightarrow 01\}$$

sind äquivalent wegen $L(G_1) = L(G_2) = \dots$

Äquivalenz von Grammatiken ist eine Äquivalenzrelation. (ÜA)

Was bisher geschah: Formale Sprachen

- ▶ Alphabet, Wort, Sprache
Operationen und Relationen auf Wörtern und Sprachen
- ▶ reguläre Ausdrücke: Syntax, Semantik, Äquivalenz
- ▶ Wortersetzungssysteme
 - ▶ Wortersatzungsregeln und -systeme
 - ▶ Ableitungen, Ableitungsgraph
 - ▶ durch Wortersetzungssysteme definierte Sprachen
 - ▶ Wortproblem in Wortersetzungssystemen
im Allgemeinen nicht algorithmisch lösbar,
aber algorithmisch lösbar für
 - ▶ nichtverlängernde Systeme
 - ▶ nichtverkürzende Systeme
- ▶ Grammatiken
 - ▶ Terminal-, Nichtterminalsymbole
 - ▶ Ableitungen in Grammatiken
 - ▶ durch Grammatiken definierte Sprachen
 - ▶ Äquivalenz von Grammatiken

Grammatiken mit ε -Regeln

ε -Regel : Grammatik-Regel der Form $I \rightarrow \varepsilon$

Beispiele:

- ▶ $G_1 = (\{A, B\}, \{0, 1\}, P_1, A)$ mit
 $P_1 = \{A \rightarrow 1B0, B \rightarrow 1B0, B \rightarrow \varepsilon\}$
ist äquivalent zu $G_2 = (\{A\}, \{0, 1\}, P_2, A)$ mit
 $P_2 = \{A \rightarrow 1A0, A \rightarrow 10\}$
(ohne ε -Regel)
- ▶ $G = (\{A\}, \{0, 1\}, P, A)$ mit $P = \{A \rightarrow 1A0, A \rightarrow \varepsilon\}$
ist nicht äquivalent zu einer Grammatik ohne ε -Regel

Chomsky-Hierarchie

(Noam Chomsky)

Eine **Grammatik** $G = (N, T, P, S)$ ist vom Chomsky-Typ

0 immer,

1 , falls für jede Regel $(l \rightarrow r) \in P$ gilt: $|l| \leq |r|$
(monoton, kontextsensitiv)

2 , falls Typ 1 und für jede Regel $(l \rightarrow r) \in P$ gilt: $l \in N$
(kontextfrei)

3 , falls Typ 2 und für jede Regel $(l \rightarrow r) \in P$ gilt:
 $l \in N$ und $r \in (T \cup (T \circ N))$
(regulär)

Eine **Sprache** $L \subseteq T^*$ heißt **vom (Chomsky-)Typ i** für $i \in \{0, \dots, 3\}$, falls i die größte Zahl ist, für die eine Grammatik G vom Typ i mit $L \setminus \{\varepsilon\} = L(G)$ existiert.

\mathcal{L}_i bezeichnet die Menge aller Sprachen vom Typ i .

Achtung: Es gibt Sprachen, die **nicht** durch eine Grammatik erzeugt werden können, also **keinen** Chomsky-Typ haben (Warum?)

Beispiele

- ▶ $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab, S \rightarrow a, S \rightarrow b\}$ ist vom Typ 2
- ▶ $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow a, S \rightarrow b, S \rightarrow \varepsilon\}$ ist vom Typ 0
- ▶ $G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}$ ist vom Typ 3
- ▶ $G_4 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow SS, S \rightarrow ab\}$ ist vom Typ 2
- ▶ $G_5 = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow aABC, \\ A \rightarrow aBC, \\ CB \rightarrow BC, \\ aB \rightarrow ab, \\ bB \rightarrow bb, \\ bC \rightarrow bc, \\ cC \rightarrow cc \end{array} \right\}$$

ist vom Typ 1

Wortproblem für Typ-1-Sprachen

gegeben : Grammatik $G = (N, T, P, S)$ vom Chomsky-Typ 1,
Wort $w \in T^*$

Frage : Gilt $w \in L(G)$?

Satz

Es existiert ein Algorithmus, welcher für jede beliebige Eingabe (G, w) , wobei

- ▶ *T ein endliches Alphabet,*
- ▶ *$w \in T^*$ und*
- ▶ *G eine monotone Grammatik (Chomsky-Typ 1) über T sind*

die Wahrheit der Aussage $w \in L(G)$ (in endlicher Zeit) korrekt beantwortet.

(folgt aus entsprechendem Satz für nichtverkürzende
Wortersetzungssysteme)

Im weiteren Verlauf dieses Moduls:

spezielle (effizientere) Verfahren für Grammatiken von Typ 2 und 3

WH: Mächtigkeit unendlicher Mengen

Eine Menge A heißt

abzählbar gdw. $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow A$ surjektiv

überabzählbar sonst

Abschlusseigenschaften der Menge aller abzählbaren Mengen:

Sind alle Mengen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ abzählbar, dann sind auch

▶ jede Teilmenge $B \subseteq A_1$ abzählbar

▶ $B = A_1 \cup A_2$ abzählbar

▶ $B = A_1 \times A_2$ abzählbar

(nach **erstem Diagonalverfahren von Cantor**)

z.B. $B_k = ((A_1)_m, (A_2)_n)$ für $k = \sum_{i=0}^{m+n} i + m$ (ÜA)

▶ $\forall k \in \mathbb{N} : B = A_1^k$ abzählbar (ÜA)

Ist jede der abzählbar vielen Mengen A_0, A_1, A_2, \dots abzählbar, dann sind auch

▶ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar (Hilberts Hotel)

▶ $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar

(formale Beweise durch Induktion nach i)

WH: Abzählbare Mengen – Beispiele

A abzählbar gdw. $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow A$ surjektiv

Beispiele:

- ▶ jede endliche Menge $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ mit

$$\forall i \in \mathbb{N} : f(i) = \begin{cases} a_1 & , \text{ falls } i \leq n \\ a_0 & , \text{ falls } i > n \end{cases}$$

- ▶ \mathbb{N} mit $f = \text{Identität}$
- ▶ jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$
- ▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (nach erstem Diagonalverfahren von Cantor)
- ▶ $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
- ▶ $\mathbb{Q} = \{m/n \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})\}$
- ▶ $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{N}^k$
- ▶ $\{0, 1\}^*$ (z.B. quasilexikographische Aufzählung)
- ▶ A^* für jedes endliche Alphabet A

(ÜA)

WH: Überabzählbare Mengen

Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Mengen natürlicher Zahlen ist überabzählbar, also mächtiger als \mathbb{N} .

(Es gibt überabzählbar viele Mengen natürlicher Zahlen.)

(indirekter) Beweis, dass $2^{\mathbb{N}}$ überabzählbar

zweites Diagonalverfahren von Cantor

Annahme: Es existiert eine surjektive Funktion $M : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, d.h. für **jede** Menge $L \subseteq \mathbb{N}$ gilt also $L = M(k)$ für (wenigstens) ein $k \in \mathbb{N}$.

	0	1	2	...	k	...
M(0)	0 \in M(0)	1 \in M(0)	2 \in M(0)	...	k \in M(0)	...
M(1)	0 \in M(1)	1 \in M(1)	2 \in M(1)	...	k \in M(1)	...
M(2)	0 \in M(2)	1 \in M(2)	2 \in M(2)	...	k \in M(2)	...
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
M(k)	0 \in M(k)	1 \in M(k)	2 \in M(k)	...	k \in M(k)	...
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

Definiere Menge $L = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin M(i)\} \subseteq \mathbb{N}$

Wegen $L \subseteq \mathbb{N}$ existiert nach Annahme ein $k \in \mathbb{N}$ mit $L = M(k)$ und damit **$k \in M(k)$ gdw. $k \notin M(k)$** (Widerspruch),

d.h. Annahme falsch, also $2^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar

Beispiele überabzählbarer Mengen

Mit dem **zweiten Diagonalverfahren von Cantor** lässt sich zeigen:

- \mathbb{R} ist überabzählbar (mächtiger als \mathbb{N}).
(Es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen.)
- $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist überabzählbar.
(Intervall $[0, 1]$ enthält überabzählbar viele reelle Zahlen.)
- $2^{\{0,1\}^*}$ Menge aller Sprachen $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ist überabzählbar, also mächtiger als $\{0, 1\}^*$.
- $2^{(A^*)}$ ist für jedes nichtleere endliche Alphabet A überabzählbar.
(Für jedes nichtleere endliche Alphabet A ist die Menge aller Sprachen über A überabzählbar.) (ÜA)

Ist jede Sprache regulär ?

Existiert für jedes endliche Alphabet A zu jeder Sprache $L \subseteq A^*$ ein regulärer Ausdruck E mit $L = L(E)$?

Nein (Gegenbeispiel $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, Nachweis später)

Begründung:

1. Wieviele **Sprachen** $L \subseteq A^*$ gibt es? (Mächtigkeit von $2^{(A^*)}$)
überabzählbar viele
2. Wieviele **reguläre Ausdrücke** über dem endlichen Alphabet A gibt es?
abzählbar viele, weil
 - ▶ Alphabet $A' = A \cup \{\emptyset, \varepsilon, +, *, (,), \}$ endlich
 - ▶ Menge $(A')^*$ aller Wörter über A' abzählbar
 - ▶ jeder reguläre Ausdruck über A ist ein Wort aus $(A')^*$ (endliche Beschreibung)
 - ▶ Menge aller regulären Ausdrücke über A ist Teilmenge der abzählbaren Menge $(A')^*$, also selbst abzählbar

Damit existieren sogar sehr viel mehr (überabzählbar viele) nicht reguläre Sprachen.

Warum sind reguläre Ausdrücke trotzdem interessant?

Wird jede Sprache von einer Grammatik erzeugt?

Existiert für jedes endliche Alphabet A zu jeder Sprache $L \subseteq A^*$ eine Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $L = L(G)$?

Nein (Gegenbeispiel später)

Begründung:

1. Wieviele **Sprachen** $L \subseteq A^*$ gibt es? (Mächtigkeit von $2^{(A^*)}$)
überabzählbar viele
2. Wieviele Grammatiken $G = (N, T, P, S)$ gibt es?
abzählbar viele, weil
 - ▶ Alphabet $A' = N \cup T \cup \{ (,), ,, {, }, \rightarrow, \varepsilon \}$ endlich
 - ▶ Menge $(A')^*$ aller Wörter über A' abzählbar
 - ▶ jede Grammatik ist ein Wort aus $(A')^*$
(endliche Beschreibung der Sprache)
 - ▶ Menge aller Grammatiken ist Teilmenge der abzählbaren Menge $(A')^*$, also selbst abzählbar

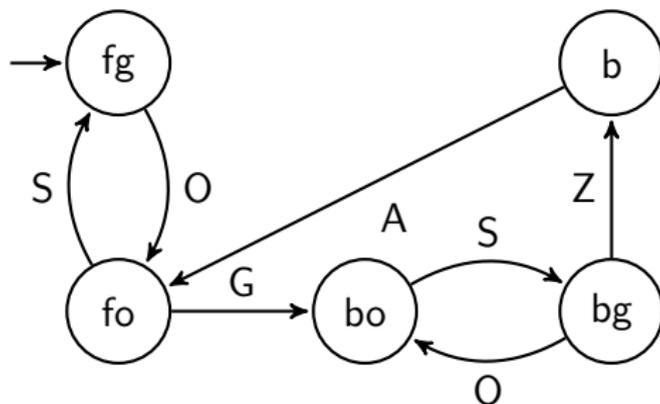
Also existieren überabzählbar viele Sprachen, die nicht durch Grammatiken erzeugt werden können.

Warum sind Grammatiken trotzdem interessant?

Was bisher geschah

- ▶ Alphabet, Wort, Sprache
- ▶ Operationen auf Wörtern und Sprachen
- ▶ Wortersetzungssysteme
- ▶ Grammatiken
- ▶ Äquivalenz von Grammatiken
- ▶ Besonderheit ε -Regeln
- ▶ Chomsky-Hierarchie
- ▶ Existenz nicht durch Grammatiken erzeugter Sprachen (Mächtigkeitsargument, nicht konstruktiv)

WH: Zustandsübergangssystem Münzschließfach



Aktionen: **A** aufschließen
Z zuschließen
O Tür öffnen
S Tür schließen
G Geld einwerfen

Zustände : **fg** frei, Tür zu
fo frei, Tür offen
bo bezahlt, Tür offen
bg bezahlt, Tür zu
b belegt

WH: Endliche Automaten – Definition

NFA (nondeterministic finite automaton)

$A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit

X endliches Alphabet,

Q endliche Menge von Zuständen,

δ Übergangsrelationen $\delta : X \rightarrow 2^{(Q \times Q)}$,

$I \subseteq Q$ Startzustände,

$F \subseteq Q$ akzeptierende Zustände.

WH: NFA – Beispiel

$A = (X, Q, \delta, \{0, 3\}, \{2, 3, 4\})$ mit

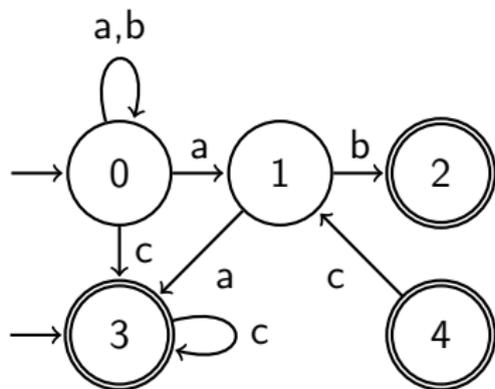
$$X = \{a, b, c\}$$

$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\delta(a) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 3)\}$$

$$\delta(b) = \{(0, 0), (1, 2)\}$$

$$\delta(c) = \{(0, 3), (3, 3), (4, 1)\}$$



Eigenschaften endlicher Automaten

NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ heißt

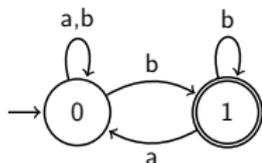
vollständig, falls $\forall a \in X \forall p \in Q : |\{q \mid (p, q) \in \delta(a)\}| \geq 1$

deterministisch (DFA), falls

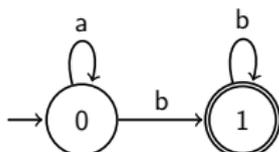
1. $|I| = 1$ und

2. $\forall a \in X \forall p \in Q : |\{q \mid (p, q) \in \delta(a)\}| \leq 1$

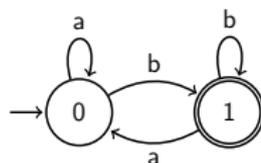
Beispiele:



vollständig
nicht deterministisch



nicht vollständig
deterministisch



vollständig
deterministisch

Isomorphie endlicher Automaten

Zwei NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ und $B = (X, Q', \delta', I', F')$ sind genau dann **isomorph**,

wenn eine bijektive Funktion $h : Q \rightarrow Q'$ existiert, so dass

1. $\forall s \in Q ((s \in I) \leftrightarrow (h(s) \in I'))$
2. $\forall f \in Q ((f \in F) \leftrightarrow (h(f) \in F'))$
3. $\forall a \in X \forall (p, q) \in Q^2 (((p, q) \in \delta(a)) \leftrightarrow ((h(p), h(q)) \in \delta'(a)))$

Beispiel: NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{0\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ und $\delta(b) = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}$

und

NFA $B = (\{a, b\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \delta, \{\beta\}, \{\beta\})$ mit

$\delta(a) = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$ und $\delta(b) = \{(\alpha, \gamma), (\beta, \alpha), (\gamma, \beta)\}$

sind isomorph durch die Bijektion

$h : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}$ mit $h(0) = \beta, h(1) = \gamma, h(2) = \alpha$.

(Graphisomorphie zwischen gerichteten Graphen mit markierten Kanten und Knoten)

Fakt

Isomorphie von NFA ist eine Äquivalenzrelation.

(ÜA)

WH: zweistellige Relationen

Verkettung der Relationen $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$:

$$R \circ S = \{(a, b) \mid \exists c \in M : (a, c) \in R \wedge (c, b) \in S\}$$

Beispiel mit Darstellung als
gerichtetem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = M$ und $E = R$

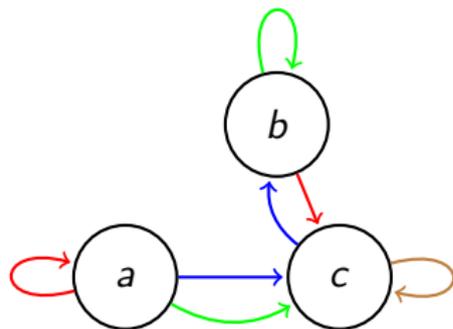
$$M = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, a), (b, c)\}$$

$$S = \{(a, c), (c, b)\}$$

$$R \circ S = \{(a, c), (b, b)\}$$

$$S \circ R = \{(c, c)\}$$



in NFA:

- ▶ Übergangsrelation $\delta(a)$ zu jedem Symbol $a \in X$
- ▶ Verkettung der Symbole ab entspricht Verkettung der Relationen $\delta(a) \circ \delta(b)$

WH: Darstellung als Matrix

mit Booleschen Einträgen

$$M = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, a), (b, c)\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \{(a, c), (c, b)\} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verkettung als Matrixmultiplikation mit Booleschen Operationen

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \circ R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übergangsrelation auf Wörtern

Fortsetzung der Übergangsrelationen $\delta : X \rightarrow (Q \times Q)$
auf Wörter $\delta^* : X^* \rightarrow (Q \times Q)$:

$$\begin{aligned}\delta^*(\varepsilon) &= \{(q, q) \mid q \in Q\} = I_Q && \text{(Identität auf } Q\text{)} \\ \delta^*(wa) &= \delta^*(w) \circ \delta(a) \\ &= \{(p, q) \mid \exists r \in Q : (p, r) \in \delta^*(w) \wedge (r, q) \in \delta(a)\}\end{aligned}$$

für alle $w \in X^*$, $a \in X$

Es gilt also für alle

$$\begin{aligned}a \in X &: \delta^*(a) = \delta^*(\varepsilon) \circ \delta(a) = \delta(a) \\ w = w_1 \cdots w_n \in X^n &: \delta^*(w) = \delta(w_1) \circ \cdots \circ \delta(w_n)\end{aligned}$$

(Multiplikation der Matrizen $\delta(w_1), \dots, \delta(w_n)$)

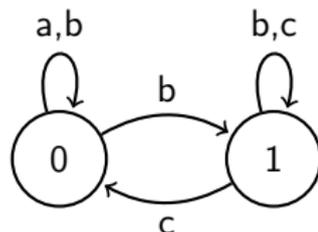
Beispiel

$A = (\{a, b, c\}, \{0, 1\}, \delta, I, F)$ mit

$\delta(a) = \{(0, 0)\}$ und

$\delta(b) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

$\delta(c) = \{(1, 0), (1, 1)\}$



$$\delta(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta^*(ba) = \delta(b)\delta(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^*(abb) = \delta(a)\delta(b)\delta(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^*(ac) = \delta(a)\delta(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Von einem NFA akzeptierte Wörter

NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ **akzeptiert** ein Wort $w \in X^*$ genau dann, wenn

$$\delta^*(w) \cap (I \times F) \neq \emptyset$$

alternative Formulierung:

A akzeptiert w genau dann, wenn ein **akzeptierender Weg** für w in A existiert,

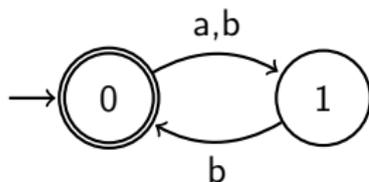
d.h. eine Folge $(q_0, \dots, q_{|w|}) \in Q^*$ von Zuständen $q_i \in Q$, für die gilt:

1. $\forall i \in \{1, \dots, |w|\} : (q_{i-1}, q_i) \in \delta(w_i)$,
2. $q_0 \in I$ (Startzustand) und
3. $q_{|w|} \in F$ (akzeptierender Zustand).

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_n} q_n \quad \text{mit} \quad q_0 \in I \text{ und } q_n \in F$$

Beispiel

$A = (\{a, b\}, \{0, 1\}, \delta, \{0\}, \{0\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1)\}$, $\delta(b) = \{(0, 1), (1, 0)\}$



$$I \times F = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^*(abbb) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A akzeptiert $abbb$ über den Weg $0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 0 \in F$

$$\delta^*(bbb) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A akzeptiert bbb nicht $0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 1 \notin F$

$$\delta^*(aaba) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A akzeptiert $aaba$ nicht $0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} ?$

NFA-akzeptierbare Sprachen

NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ akzeptiert die Sprache

$$L(A) = \{w \in X^* \mid \exists s \in I \exists f \in F : (s, f) \in \delta^*(w)\}$$

Beispiel: $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 0), (2, 2)\}$ und $\delta(b) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2)\}$
akzeptiert $L(A) = \dots$

Sprache $L \subseteq X^*$ heißt genau dann **NFA-akzeptierbar**, wenn ein NFA A mit $L = L(A)$ existiert.

Menge aller NFA-akzeptierbaren Sprachen: **REC(NFA)**
(recognizable)

Beispiele:

- ▶ $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält Infix } aa \text{ oder Präfix } bba\}$ ist NFA-akzeptierbar.
- ▶ $L' = \{0^i 10^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht NFA-akzeptierbar (Nachweis später).

Beispiele NFA-akzeptierbarer Sprachen

- ▶ $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \text{ ist ungerade} \}$
- ▶ $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ba \}$
- ▶ $L_3 = L(G)$ mit $G = (\{S, T\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 11T, T \rightarrow 0S, T \rightarrow 0\}$
- ▶ $L_4 = L(E)$ mit $E = (a + b)^* ab^*$
- ▶ $L_5 = L(F)$ mit $F = ((a + b)c)^*$

Äquivalenz endlicher Automaten

Zwei NFA A, B heißen genau dann **äquivalent**, wenn $L(A) = L(B)$.

Beispiel: Der NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 1)\}$ und $\delta(b) = \{(1, 1), (1, 2)\}$

und der NFA $B = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$ und
 $\delta(b) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

sind äquivalent. Warum?

Fakt

Äquivalenz endlicher Automaten ist eine Äquivalenzrelation. (ÜA)

Fakt

Isomorphe endliche Automaten sind immer äquivalent. (ÜA)

(Achtung: Umkehrung gilt nicht)

Vervollständigung von NFA

Motivation:

In vollständigen NFA existiert zu jedem Wort wenigstens ein Weg, Akzeptanz jedes Wortes durch Menge der mit dem letzten Symbol erreichten Zustände auf allen Wegen feststellbar.

Satz

Zu jedem NFA A existiert ein äquivalenter vollständiger NFA B .

Konstruktionsidee für $A = (X, Q_A, \delta_A, I, F)$ zu $B = (X, Q_B, \delta_B, I, F)$:

1. Hinzufügen eines zusätzlichen nichtakzeptierenden Zustandes e
 $Q_B = Q_A \cup \{e\}$
2. Hinzufügen zusätzlicher Kanten (p, e)
 $\forall a \in X : \delta_B(a) = \delta_A(a) \cup \{(p, e) \mid \neg \exists q \in Q_A : (p, q) \in \delta_A(a)\}$

Beispiel: $B = (\{a, b, c\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \delta, \{0\}, \{2, 4\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 0), (1, 2), (3, 4), (4, 4), (2, 5), (5, 5)\}$,

$\delta(b) = \{(0, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$

und $\delta(c) = \{(3, 0), (0, 5), (1, 5), (2, 5), (4, 5), (5, 5)\}$

(A enthält nur schwarze Elemente, Vervollständigung B auch alle roten)

Was bisher geschah

- ▶ Operationen auf Sprachen:
 - ▶ Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \bar{}, \Delta$
 - ▶ Sprachoperationen $R, \circ, *$

- ▶ reguläre Ausdrücke $\text{RegExp}(X)$:

IA: $\{\varepsilon, \emptyset\} \cup X \subseteq \text{RegExp}(X)$

IS: $\forall E, F \in \text{RegExp}(X) : \{E + F, EF, E^*\} \subseteq \text{RegExp}(X)$

Die Menge aller regulären Sprachen ist abgeschlossen unter $\cup, \circ, *$

- ▶ Grammatiken, Chomsky-Hierarchie

endliche Automaten: NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$

- ▶ vollständige, deterministische NFA
- ▶ Akzeptanz von Wörtern durch NFA
- ▶ von NFA, DFA, akzeptierte Sprache $L(A)$
- ▶ Menge $\text{REC}(\text{NFA})$ aller NFA-akzeptierbare Sprachen
- ▶ Zu jedem NFA existiert ein äquivalenter vollständiger NFA.
(Vervollständigung, Tafel: Nachweis der Korrektheit)

WH: Beispiele NFA-akzeptierbarer Sprachen

Tafel: Angabe passender NFA für

- ▶ $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \text{ ist ungerade} \}$
(Tafel: NFA und Nachweis)
- ▶ $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ba \}$
- ▶ $L_3 = L(G)$ mit $G = (\{S, T\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 11T, T \rightarrow 0S, T \rightarrow 0\}$
- ▶ $L_4 = L(E)$ mit $E = (a + b)^* ab^*$
- ▶ $L_5 = L(F)$ mit $F = ((a + b)c)^*$

Konstruktion von DFA aus NFA

Motivation: In DFA existiert zu jedem Wort w höchstens ein akzeptierender Weg, Feststellen der Akzeptanz in $|w|$ Schritten möglich.

Beispiel: $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \delta, \{0, 4\}, \{3\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 0), (4, 4), (0, 1), (1, 3), (3, 3)\}$ und

$\delta(b) = \{(0, 0), (4, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: NFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$

gesucht: DFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit $L(A) = L(B)$

Potenzmengenkonstruktion: NFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit

$Q_B = 2^{Q_A}$ (Einschränkung auf von I_B erreichbare genügt)

$I_B = \{I_A\}$

$F_B = \{M \subseteq Q_A \mid F_A \cap M \neq \emptyset\}$

$\forall a \in X : \delta_B(a) = \{(M, N) \mid N = \{q \mid \exists p \in M : (p, q) \in \delta_A(a)\}\}$

Satz

Der nach der Potenzmengenkonstruktion aus dem NFA A konstruierte NFA B ist vollständig, deterministisch und äquivalent zu A .

Beispiel Potenzmengenkonstruktion

gegeben: NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 1)\}$ und $\delta(b) = \{(1, 1), (1, 2)\}$

Potenzmengenkonstruktion: NFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit

$$Q_B = 2^{Q_A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

$$I_B = \{\{0\}\}$$

$$F_B = \{\{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

$$\delta_B(a) = \left\{ \begin{array}{l} (\emptyset, \emptyset), (\{0\}, \{1\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1, 2\}, \{1\}), \\ (\{2\}, \emptyset), (\{0, 1\}, \{1\}), (\{0, 2\}, \emptyset), (\{0, 1, 2\}, \{1\}) \end{array} \right\}$$

$$\delta_B(b) = \left\{ \begin{array}{l} (\emptyset, \emptyset), (\{0\}, \emptyset), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\}), \\ (\{2\}, \emptyset), (\{0, 1\}, \{1, 2\}), (\{0, 2\}, \emptyset), (\{0, 1, 2\}, \{1, 2\}) \end{array} \right\}$$

(rot: **Einschränkung** auf aus dem Startzustand erreichbare Zustände)

Einschränkung isomorph zum DFA $B' = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, \delta, \{0\}, \{2\})$

mit $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$ und

$\delta(b) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

mit Isomorphismus $h : Q_B \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ mit

$h(\{0\}) = 0$, $h(\{1\}) = 1$, $h(\{1, 2\}) = 2$, $h(\emptyset) = 3$

Was bisher geschah

- ▶ Operationen auf Sprachen:
 - ▶ Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \bar{}, \Delta$
 - ▶ Sprachoperationen $R, \circ, *$
 - ▶ reguläre Ausdrücke $\text{RegExp}(X)$:
 - IA: $\{\varepsilon, \emptyset\} \cup X \subseteq \text{RegExp}(X)$
 - IS: $\forall E, F \in \text{RegExp}(X) : \{E + F, EF, E^*\} \subseteq \text{RegExp}(X)$
- Die Menge aller regulären Sprachen ist abgeschlossen unter $\cup, \circ, *$
- ▶ Grammatiken, Chomsky-Hierarchie

endliche Automaten: NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$

- ▶ vollständige, deterministische NFA
- ▶ Akzeptanz von Wörtern durch NFA
- ▶ von NFA, DFA, akzeptierte Sprache $L(A)$
- ▶ Menge $\text{REC}(\text{NFA})$ aller NFA-akzeptierbare Sprachen
- ▶ Zu jedem NFA existiert ein äquivalenter vollständiger NFA.
(Vervollständigung, Tafel: Nachweis der Korrektheit)
- ▶ Zu jedem NFA existiert ein äquivalenter DFA.
(Potenzmengenkonstruktion)

NFA für Komplement NFA-akzeptierbarer Sprachen

Beispiel:

vollständiger DFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ und

$\delta(b) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: vollständiger DFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$

(falls notwendig vorher Potenzmengenkonstruktion)

gesucht: NFA B mit $L(B) = \overline{L(A)}$

Konstruktion: NFA $B = (X, Q, \delta, I, Q \setminus F)$

Satz

Der oben definierte NFA B akzeptiert die Sprache $\overline{L(A)}$.

Die Menge $\text{REC}(\text{NFA})$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

NFA für Vereinigung NFA-akzeptierbarer Sprachen

Beispiel: NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_A, \{0\}, \{0\})$ mit

$\delta_A(a) = \{(0, 1), (1, 0)\}$ und $\delta_A(b) = \emptyset$

NFA $B = (\{a, b\}, \{2, 3, 4\}, \delta_B, \{2\}, \{4\})$ mit

$\delta_B(a) = \{(2, 3), (4, 3)\}$ und $\delta_B(b) = \{(3, 4)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: NFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$ und

NFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit $Q_A \cap Q_B = \emptyset$

(Zustände disjunkt umbenennen, falls notwendig)

gesucht: NFA C mit $L(C) = L(A) \cup L(B)$

Konstruktion: NFA $C = (X, Q_A \cup Q_B, \delta_C, I_A \cup I_B, F_A \cup F_B)$ mit

$\forall a \in X : \delta_C(a) = \delta_A(a) \cup \delta_B(a)$

Satz

Der oben definierte NFA C akzeptiert die Sprache $L(A) \cup L(B)$.

Die Menge **REC(NFA)** ist **abgeschlossen unter Vereinigung**.

NFA für Schnitt NFA-akzeptierbarer Sprachen

WH (deMorgan):

Für alle Mengen M, N gilt $M \cap N = \overline{\overline{M} \cup \overline{N}}$

bisher: Konstruktionen für

1. NFA $A \mapsto$ vollst. DFA A' mit $L(A') = L(A)$
2. vollst. DFA $A \mapsto$ vollst. DFA A' mit $L(A') = \overline{L(A)}$
3. NFA $A, B \mapsto$ NFA C mit $L(C) = L(A) \cup L(B)$

Zu gegebenen NFA A und B lässt sich damit auch ein NFA C konstruieren mit

$$L(C) = L(A) \cap L(B) = \overline{\overline{L(A)} \cup \overline{L(B)}}$$

Die Menge **REC(NFA)** ist also **abgeschlossen unter Schnitt**.

Diese Konstruktion ist aber meist aufwendig. Es geht besser.

DFA für Schnitt – Produktkonstruktion

Beispiel: DFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_A, \{0\}, \{1\})$ mit

$\delta_A(a) = \{(0, 0)\}$ und $\delta_A(b) = \{(0, 1), (1, 1)\}$

DFA $B = (\{a, b\}, \{2, 3\}, \delta_B, \{2\}, \{3\})$ mit

$\delta_B(a) = \{(2, 3), (3, 3)\}$ und $\delta_B(b) = \{(3, 3)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: DFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$, DFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$

gesucht: DFA $C = (X, Q_C, \delta_C, I_C, F_C)$ mit $L(C) = L(A) \cap L(B)$

Konstruktion: (Produktautomat)

DFA $C = (X, Q_A \times Q_B, \delta_C, I_A \times I_B, F_A \times F_B)$ mit

$\forall a \in X : \delta_C(a) = \{((p, q), (r, s)) \mid (p, r) \in \delta_A(a) \wedge (q, s) \in \delta_B(a)\}$

Satz

Der oben definierte DFA C akzeptiert die Sprache $L(A) \cap L(B)$.

Modifikation (Tafel):

dieselbe Konstruktion des DFA C aus vollständigen DFA A und B

- ▶ mit akzeptierenden Zuständen $F_C = F_A \times F_B$
akzeptiert $L(A) \cap L(B)$
- ▶ mit akzeptierenden Zuständen $F_C = (F_A \times Q_B) \cup (Q_A \times F_B)$
akzeptiert $L(A) \cup L(B)$

NFA mit ε -Übergängen

ε -NFA: NFA ohne Einschränkung $\delta(\varepsilon) = I_Q$, stattdessen $I_Q \subseteq \delta(\varepsilon)$
(zusätzliche Kanten im Automatengraphen mit Beschriftung ε)

ε -NFA vereinfachen oft die Modellierung von Sprachen und Abläufen.

Beispiel: $A = (\{a, b, c\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 0)\}$, $\delta(b) = \{(1, 1)\}$, $\delta(c) = \{(2, 2)\}$, $\delta(\varepsilon) = \{(0, 1), (1, 2)\}$

Akzeptanz von Wörtern **durch ε -NFA** analog zu NFA:

ε -NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ akzeptiert ein Wort $w \in X^*$ genau dann, wenn $\delta^*(w) \cap (I \times F) \neq \emptyset$.

$$\delta^*(w) = \delta^*(\varepsilon) \circ \delta(w_1) \circ \delta^*(\varepsilon) \circ \dots \circ \delta^*(\varepsilon) \circ \delta(w_n) \circ \delta^*(\varepsilon)$$

akzeptierender Pfad für w in ε -NFA A :

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_i \xrightarrow{w_1} q_{i+1} \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_k \xrightarrow{w_{|w|}} q_{k+1} \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_n$$

Der ε -NFA A im Beispiel oben akzeptiert die Sprache $L(A) = a^*b^*c^*$.

Fakt

Zu jedem NFA A existiert ein äquivalenter ε -NFA B mit genau einem Startzustand und genau einem akzeptierenden Zustand.

Eliminierung der ε -Übergänge aus ε -NFA

$\delta^*(\varepsilon)$ ist der transitive Abschluss der Relation $\delta(\varepsilon)$

ε -Hülle eines Zustandes $q \in Q$: $H_\varepsilon(q) = \{p \mid (q, p) \in \delta^*(\varepsilon)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: ε -NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit $\delta(\varepsilon) \supseteq I_Q$

gesucht: NFA B ohne ε -Übergänge mit $L(B) = L(A)$

Konstruktion (ε -Eliminierung): $B = (X, Q, \delta', I', F)$ mit

$$I' = \bigcup_{q \in I} H_\varepsilon(q)$$

$$\forall a \in X : \delta'(a) = \delta(a) \cup \{(p, q') \mid (p, q) \in \delta(a) \wedge q' \in H_\varepsilon(q)\}$$

Satz

Der durch ε -Eliminierung aus dem ε -NFA A konstruierte NFA B enthält keine ε -Übergänge und ist äquivalent zu A .

NFA für Verkettung NFA-akzeptierbarer Sprachen

Beispiel:

NFA $A = (\{a, b\}, \{0\}, \delta_A, \{0\}, \{0\})$ mit $\delta_A(a) = \emptyset$ und $\delta_A(b) = \{(0, 0)\}$

NFA $B = (\{a, b\}, \{1, 2, 3\}, \delta_B, \{1, 3\}, \{2\})$ mit

$\delta_B(a) = \{(3, 2), (3, 3)\}$ und $\delta_B(b) = \{(1, 2)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: NFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$ und

NFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit $Q_A \cap Q_B = \emptyset$

gesucht: NFA C mit $L(C) = L(A) \circ L(B)$

Konstruktion (eines ε -NFA C' , anschließend ε -Eliminierung zu NFA C):

1. ($A' \equiv A \wedge |F_{A'}| = 1$): ε -NFA $A' = (X, Q_A \cup \{f_A\}, \delta'_A, I_A, \{f_A\})$ mit $\forall a \in X : \delta'_A(a) = \delta_A(a)$ und $\delta'_A(\varepsilon) = \delta_A(\varepsilon) \cup \{(q, f_A) \mid q \in F_A\}$
2. ($B' \equiv B \wedge |I_{B'}| = 1$): ε -NFA $B' = (X, Q_B \cup \{s_B\}, \delta'_B, \{s_B\}, F_B)$ mit $\forall a \in X : \delta'_B(a) = \delta_B(a)$ und $\delta'_B(\varepsilon) = \delta_B(\varepsilon) \cup \{(s_B, q) \mid q \in I_B\}$
3. (\circ): ε -NFA $C' = (X, Q_A \cup Q_B \cup \{f_A, s_B\}, \delta_{C'}, I_A, F_B)$ mit $\forall a \in X : \delta_{C'}(a) = \delta'_A(a) \cup \delta'_B(a)$, $\delta_{C'}(\varepsilon) = \delta'_A(\varepsilon) \cup \delta'_B(\varepsilon) \cup \{(f_A, s_B)\}$

Fakt

Der oben definierte ε -NFA C' akzeptiert die Sprache $L(A) \circ L(B)$.

Folgerung: Die Menge **REC(NFA)** ist **abgeschlossen unter Verkettung**.

NFA für iterierte Verkettung

Beispiel: NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, \delta_A, \{0\}, \{3\})$ mit $\delta_A(a) = \{(0, 1), (2, 3)\}$ und $\delta_A(b) = \{(1, 2)\}$

allgemeines Verfahren:

gegeben: NFA $A = (X, Q, \delta_A, I, F)$

gesucht: NFA B mit $L(B) = L(A)^*$

Konstruktion (ε -NFA B' , anschließend ε -Eliminierung zu NFA B):

1. ($A' \equiv A \wedge |I_{A'}| = 1 \wedge |F_{A'}| = 1$):

ε -NFA $A' = (X, Q_A \cup \{s_A, f_A\}, \delta'_A, \{s_A\}, \{f_A\})$ mit

$\forall a \in X : \delta'_A(a) = \delta_A(a)$ und

$\delta'_A(\varepsilon) = \{(s_A, q) \mid q \in I_A\} \cup \{(q, f_A) \mid q \in F_A\}$

2. (*): ε -NFA $B' = (X, Q_A \cup \{s_A, f_A\}, \delta_B, \{s_A\}, \{f_A\})$ mit

$\forall a \in X : \delta_{B'}(a) = \delta'_A(a)$ und

$\delta_{B'}(\varepsilon) = \delta'_A(\varepsilon) \cup \{(s_A, f_A), (f_A, s_A)\}$

Fakt

Der oben definierte ε -NFA B' akzeptiert die Sprache $(L(A))^*$.

Folgerung: **REC(NFA)** ist abgeschlossen unter iterierter Verkettung.

Abschlusseigenschaften der Menge $\text{REC}(\text{NFA})$

$$\text{REC}(\text{NFA}) = \text{REC}(\text{DFA}) = \text{REC}(\varepsilon\text{-NFA})$$

Sind L und L' NFA-akzeptierbare Sprachen, dann sind auch die Sprachen

- ▶ $L \cup L'$ (Vereinigung)
- ▶ \bar{L} (Komplement)
- ▶ $L \cap L'$ (Schnitt)
- ▶ $L \circ L'$ (Verkettung)
- ▶ L^n, L^* (iterierte Verkettung)
- ▶ L^R (Spiegelung)

NFA-akzeptierbar.

dieselbe Aussage kürzer: $\text{REC}(\text{NFA})$ ist abgeschlossen unter

- ▶ Mengenoperationen: $\cup, \cap, \bar{}, \setminus, \Delta$
- ▶ Sprachoperationen $\circ, *, ^R$

Was bisher geschah

- ▶ Die Menge aller NFA-akzeptierbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den
 - ▶ Mengenoperationen $\cup, \cap, \overline{}, \setminus, \Delta$
 - ▶ Sprachoperationen $\circ, *, R$
- ▶ reguläre Ausdrücke $\text{RegExp}(X)$:
 - IA: $\{\varepsilon, \emptyset\} \cup X \subset \text{RegExp}(X)$
 - IS: $\forall E, F \in \text{RegExp}(X) : \{E + F, EF, E^*\} \subset \text{RegExp}(X)$
- ▶ NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$
- ▶ Akzeptanz von Wörtern durch NFA, DFA
- ▶ von NFA, DFA, akzeptierte Sprache $L(A)$
- ▶ NFA-akzeptierbare Sprachen $\text{REC}(\text{NFA})$
- ▶ Für jede Sprache $L \subseteq X^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
 1. $L \in \text{REC}(\text{NFA})$, d.h. es existiert ein NFA A mit $L = L(A)$.
 2. Es existiert ein vollständiger NFA B mit $L = L(B)$.
 3. $L \in \text{REC}(\text{DFA})$, d.h. es existiert ein DFA C mit $L = L(C)$.
 4. Es existiert ein vollständiger DFA D mit $L = L(D)$.
 5. Es existiert ein ε -NFA E mit $L = L(E)$.

Minimale DFA

Ein vollständiger DFA A heißt genau dann **minimal** für die Sprache $L(A)$, wenn kein vollständiger DFA B mit $L(A) = L(B)$ und weniger Zuständen als A existiert.

Beispiel: Für die vollständigen DFA

- ▶ $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \delta, \{0\}, \{4\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ und
 $\delta(b) = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 0), (4, 4)\}$
- ▶ $B = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 2)\}$
und $\delta(b) = \{(0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$

gilt $L(A) = L(B) = L((ab + b)^* aa(a + b))$, also ist A nicht minimal

Bestimmung minimaler vollständiger DFA:

Idee (für gegebenen vollständigen DFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$)

- ▶ für jedes Paar (p, q) von Zuständen in Q :
Suche nach einem (kürzesten) unterscheidenden Wort
- ▶ Zustände sind äquivalent, wenn kein unterscheidendes Wort existiert
- ▶ Zerlegung von Q in Äquivalenzklassen von Zuständen
- ▶ diese Klassen sind die Zustände des minimalen DFA.

Äquivalente Zustände in DFA

Beispiel: DFA $(\{a,b\}, \{0,1,2,3\}, \delta, \{0\}, \{3\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1)\}$ und $\delta(b) = \{(0, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

allgemein:

Jedes Paar aus DFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ und Zustand $q \in Q$
definiert den DFA $A_q = (X, Q, \delta, \{q\}, F)$

Zustände $p, q \in Q$ heißen genau dann
äquivalent in A ($p \sim_A q$), wenn $L(A_p) = L(A_q)$ gilt.

Beispiel (oben):

$1 \sim_A 2$, weil $L(A_1) = L(A_2) = \{b\}$

Ein Wort $w \in X^*$ **unterscheidet** die Zustände $p \in Q$ und $q \in Q$
(beweist $p \not\sim_A q$) gdw. $w \in L(A_p) \Delta L(A_q)$

Beispiel (oben): $1 \not\sim_A 3$, weil $\varepsilon \in L(A_3) \setminus L(A_1)$

Algorithmus zur Bestimmung äquivalenter Zustände

Fakt

Falls das Wort $w \in X^*$ die Zustände $p', q' \in Q$ im DFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ unterscheidet und für ein $a \in X$ gilt $(p, p') \in \delta(a)$ und $(q, q') \in \delta(a)$, dann unterscheidet das Wort $aw \in X^*$ die Zustände $p, q \in Q$ in A .

Induktive Berechnung einer Folge R_i von Äquivalenzrelationen auf Q :

$$R_0 = (Q \setminus F)^2 \cup F^2$$

$$R_{i+1} = R_i \setminus \left\{ (p, q) \mid \exists a \in X \exists p', q' \in Q : \begin{pmatrix} (p, p') \in \delta(a) \\ \wedge (q, q') \in \delta(a) \\ \wedge (p', q') \notin R_i \end{pmatrix} \right\}$$

(R_i : Menge aller durch kein w mit $|w| < i$ unterscheidbaren Paare)
oft dargestellt als Tabelle (Beispiel Tafel)

Satz

- ▶ Für jeden vollständigen DFA A existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n = R_{n+1}$.
- ▶ Für dieses n gilt $R_n = \sim_A$

Minimalautomat

gegeben: vollständiger DFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$

Beispiel: DFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \delta, \{0\}, \{4\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ und

$\delta(b) = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 0), (4, 4)\}$

Minimalautomat für $L(A)$:

DFA $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit

$$Q_B = \{[q]_{\sim_A} \mid q \in Q\} \quad \text{Äquivalenzklassen bzgl. } \sim_A$$

$$\forall a \in X : \delta_B(a) = \{([p]_{\sim_A}, [q]_{\sim_A}) \mid (p, q) \in \delta_A(a)\}$$

$$I_B = \{[q]_{\sim_A} \mid q \in I_A\}$$

$$F_B = \{[q]_{\sim_A} \mid q \in F_A\}$$

Satz

Zu jeder NFA-akzeptierbaren Sprache $L \subseteq X^*$ existiert ein (bis auf Isomorphie) **eindeutiger** vollständiger DFA A mit $L = L(A)$ und einer minimalen Anzahl von Zuständen (**Minimalautomat** für L).

Algorithmus zur Entscheidung der Äquivalenz von NFA

Eingabe: NFA A, B

Ausgabe: 1 (ja), falls A und B äquivalent (also $L(A) = L(B)$)
0 (nein), sonst

Algorithmus:

1. Konstruktion der DFA A' und B' mit $L(A') = L(A)$ und $L(B') = L(B)$ (Potenzmengenkonstruktion),
2. Konstruktion der Minimalautomaten A'' zu A' und B'' zu B'
3. Test, ob A'' und B'' isomorph sind (Isomorphietest für Graphen).

Fakt

Die NFA A und B sind genau dann äquivalent, wenn die Automaten A'' und B'' isomorph sind.

Regulärer Ausdruck \rightarrow NFA

Fakt

Jede durch einen regulären Ausdruck definierte Sprache ist NFA-akzeptierbar.

Beispiel: $ab^* + b$

induktiver Beweis:

(Induktion über die Struktur des regulären Ausdruckes)

IA $L(\emptyset)$, $L(\varepsilon)$ und $L(a)$ für alle $a \in X$ sind NFA-akzeptierbar
(Tafel)

IS sind $L(E)$ und $L(F)$ NFA-akzeptierbar, dann sind auch

- ▶ $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$,
- ▶ $L(EF) = L(E) \circ L(F)$ und
- ▶ $L(E^*) = L(E)^*$

NFA-akzeptierbar

(wegen Abgeschlossenheit von $\text{REC}(\text{NFA})$ unter $\cup, \circ, *$)

DFA \rightarrow regulärer Ausdruck

(SS22 nicht besprochen)

Beispiel: $A = (\{a, b\}, \{1, 2\}, \delta, \{1\}, \{1\})$ mit

$\delta(a) = \{(1, 2)\}$ und $\delta(b) = \{(1, 1)(2, 1)\}$

gegeben: DFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit $Q = \{1, \dots, n\}$ und $I = \{1\}$

schrittweise Konstruktion regulärer Ausdrücke

(Dynamische Programmierung):

$R(k, i, j)$ beschreibt die Menge aller Wörter, für die ein Pfad von i zu j nur über (Zwischen-)Zustände $\leq k$ existiert

$$R(0, i, j) = \begin{cases} \{a \in X \mid (i, j) \in \delta(a)\} & \text{falls } i \neq j \\ \varepsilon + \{a \in X \mid (i, j) \in \delta(a)\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

$$R(k+1, i, j) = R(k, i, j) + (R(k, i, k+1)R(k, k+1, k+1)^*R(k, k+1, j))$$

Fakt

Für den so konstruierten regulären Ausdruck $E = \sum_{f \in F} R(n, 1, f)$ gilt $L(E) = L(A)$.

NFA und reguläre Ausdrücke

Schon gezeigt:

Fakt

Jede NFA-akzeptierbare Sprache wird durch einen regulären Ausdruck definiert.

Fakt

Jede durch einen regulären Ausdruck definierte Sprache ist NFA-akzeptierbar.

Das ergibt zusammen:

Satz

*Eine Sprache ist **genau dann** NFA-akzeptierbar ($\in \text{REC}(\text{NFA})$), wenn sie regulär (durch einen regulären Ausdruck definiert) ist. (REC(NFA) ist genau die Menge aller regulären Sprachen.)*

Folgerung aus Satz und Abschlusseigenschaften von REC(NFA):
Jeder erweiterte reguläre Ausdruck ist äquivalent zu einem (einfachen) regulären Ausdruck.

Entscheidung der Äquivalenz regulärer Ausdrücke

Eingabe: Reguläre Ausdrücke E, F

Ausgabe: 1 (ja), falls E und F äquivalent ($L(E) = L(F)$)
0 (nein), sonst

Algorithmus:

1. Konstruktion der NFA A_E und A_F
mit $L(A_E) = L(E)$ und $L(A_F) = L(F)$,
2. Konstruktion der DFA A'_E und A'_F mit
 $L(A'_E) = L(E)$ und $L(A'_F) = L(F)$
(Potenzmengenkonstruktion),
3. Konstruktion der Minimalautomaten
 A''_E zu A'_E und A''_F zu A'_F
4. Test, ob A''_E und A''_F isomorph sind
(Isomorphietest für Graphen)

Fakt

Die regulären Ausdrücke E und F sind genau dann äquivalent, wenn die Automaten A''_E und A''_F isomorph sind.

Beispiel: $(ab)^+a$ und $a(ba)^*ba$

NFA und reguläre Grammatiken

Beispiel: NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit $\delta(a) = \{(0, 1)\}$ und $\delta(b) = \{(1, 0), (1, 2)\}$

reguläre Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow aB, B \rightarrow bS, B \rightarrow b\}$

definieren beide die Sprache

$$L(A) = L(G) = L((ab)^+) = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Satz: $\text{REC}(\text{NFA}) = \mathcal{L}_3$

dieselbe Aussage ausführlicher:

Eine Sprache $L \subseteq X^*$ ist genau dann NFA-akzeptierbar, wenn $L \setminus \{\varepsilon\}$ von einer regulären Grammatik (Chomsky-Typ 3) erzeugt wird.

Konstruktion: reguläre Grammatik \rightarrow NFA

gegeben: reguläre Grammatik $G = (N, X, P, S)$ (Chomsky 3)

Konstruktion: NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit

$$Q = N \cup \{f\} \quad \text{mit } f \notin N$$

$$I = \{S\}$$

$$F = \{f\}$$

$$\begin{aligned} \text{für jedes } a \in X: \delta(a) = & \{(A, B) \mid (A \rightarrow aB) \in P\} \\ & \cup \{(A, f) \mid (A \rightarrow a) \in P\} \end{aligned}$$

Beispiel: Konstruktion ergibt für die reguläre Grammatik

$G = (\{S, B\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow 0B, B \rightarrow 0B, B \rightarrow 1S, B \rightarrow 0\}$

den NFA $A = (\{0, 1\}, \{S, B, f\}, \delta, \{S\}, \{f\})$ mit

$\delta(0) = \{(S, B), (B, B), (B, f)\}$ und $\delta(1) = \{(B, S)\}$

Fakt ($\text{REC}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}_3$): Für den wie oben zur Grammatik G konstruierten NFA A gilt $L(G) = L(A)$.

Konstruktion: NFA \rightarrow reguläre Grammatik

gegeben: NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$

Konstruktion: reguläre Grammatik $G = (N, X, P, S)$ mit

$$N = Q \dot{\cup} \{S\} \quad (\text{mit } S \notin Q)$$

$$P = \bigcup_{a \in X} \{p \rightarrow aq \mid (p, q) \in \delta(a)\}$$

$$\cup \bigcup_{a \in X} \{S \rightarrow aq \mid \exists s \in I : (s, q) \in \delta(a)\}$$

$$\cup \bigcup_{a \in X} \{p \rightarrow a \mid \exists f \in F : (p, f) \in \delta(a)\}$$

$$\cup \bigcup_{a \in X} \{S \rightarrow a \mid \exists s \in I \exists f \in F : (s, f) \in \delta(a)\}$$

Beispiel: $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{2\})$ mit

$\delta(a) = \{(0, 1), (1, 2)\}$ und $\delta(b) = \{(1, 1), (2, 1)\}$

konstruierte Grammatik $G = (\{S, 0, 1, 2\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{0 \rightarrow a1, 1 \rightarrow b1, 1 \rightarrow a2, 2 \rightarrow b1, S \rightarrow a1, 1 \rightarrow a\}$

Fakt ($\mathcal{L}_3 \subseteq \text{REC}(\text{NFA})$): Für die wie oben aus dem NFA A konstruierte Grammatik G gilt $L(G) = L(A) \setminus \{\varepsilon\}$.

Ergebnisse über reguläre Sprachen

Für jede Sprache $L \subseteq X^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- ▶ L hat den Chomsky-Typ 3.
- ▶ Es existiert eine reguläre Grammatik G mit $L \setminus \{\varepsilon\} = L(G)$.
- ▶ Es existiert eine reguläre Grammatik G mit ε -Regel und $L = L(G)$.
- ▶ $L = L(E)$ für einen regulären Ausdruck E .
- ▶ L ist NFA-akzeptierbar.
- ▶ Es existiert ein DFA A mit $L = L(A)$.

Die Menge aller Sprachen vom Chomsky-Typ 3 ist abgeschlossen unter

- ▶ Mengenoperationen: $\cup, \cap, \bar{}, \setminus, \Delta$
- ▶ Sprachoperationen: $\circ, *, ^R$

Algorithmische Lösungen für reguläre Sprachen

alle Sprachen in Eingaben endlich beschrieben, z.B. als NFA

- Wortproblem** Eingabe: (L, w) ,
Ausgabe: ja, falls $w \in L$, sonst nein
(Suche nach mit w markiertem Pfad im Automatengraphen)
- Leerheit** Eingabe: L , Ausgabe: ja, falls $L = \emptyset$, sonst nein
(Erreichbarkeit akzeptierender Zustände in NFA für L)
- Vollständigkeit** Eingabe: L , Ausgabe: ja, falls $L = X^*$, sonst nein
(Erreichbarkeit im Automaten für \bar{L})
- (Un-)Endlichkeit** Eingabe: L , Ausgabe: ja, falls L (un-)endlich, sonst nein
(Suche nach einem akzeptierenden Weg mit Schleife)
- Inklusion** Eingabe: L_1, L_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L_1 \subseteq L_2$, sonst nein
(Test $L_1 \cap \bar{L}_2 = \emptyset$)
- Gleichheit** Eingabe: L_1, L_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L_1 = L_2$, sonst nein
(isomorphe Minimalautomaten oder Test $L_1 \Delta L_2 \stackrel{?}{=} \emptyset$)
- Disjunktheit** Eingabe: L_1, L_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, sonst nein

Anwendung von NFA und regulären Sprachen

- ▶ Modellierung vom Verhalten von Zustandsübergangssystemen, z.B.
 - ▶ reale Geräte und Anlagen
 - ▶ Softwaresysteme
- Überprüfung, ob Zustandsübergangssystem bestimmte Anforderungen erfüllt
- ▶ Beschreibung der Syntax von Programmiersprachen z.B.
 - ▶ endlicher Mengen (z.B. Mengen aller Schlüsselwörter)
 - ▶ Folgen von Zeichen und Zeichenketten
 - ▶ Zahlendarstellungen
- ▶ lexikalische Analyse im Compiler
- ▶ Suche nach Zeichenketten in Texten (string matching)
- ▶ Textverarbeitung, z.B. Wortvervollständigung

Was bisher geschah

Sprache L ist vom Chomsky-Typ i gdw.

eine Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ existiert.

Chomsky-Hierarchie: G ist vom Chomsky-Typ

0 immer,

1 , $\forall (l \rightarrow r) \in P : |l| \leq |r|$ (monoton, kontextsensitiv)

2 , $\forall (l \rightarrow r) \in P : |l| \leq |r| \wedge l \in N$ (kontextfrei)

3 , $\forall (l \rightarrow r) \in P : |l| \leq |r| \wedge l \in N \wedge r \in (T \cup (T \circ N))$ (regulär)

reguläre Sprachen ($\mathcal{L}_3 = \text{REG} = \text{REC}(\text{NFA}) = \text{REC}(\text{DFA})$):

▶ endliche Repräsentation durch

▶ Darstellung als reguläre Ausdrücke

▶ Erzeugung durch reguläre Grammatiken,

▶ Akzeptanz durch NFA (DFA, ε -NFA, ...),

▶ abgeschlossen unter $\cup, \cap, \overline{}, \circ, *, R$

▶ algorithmisch entscheidbar sind z.B.

Wortproblem $w \stackrel{?}{\in} L$ (in $\mathcal{O}(|w|)$ mit vollst. DFA),

Leerheit, Endlichkeit, Gleichheit

Fragen für kontextfreie Sprachen

Wiederholung:

Eine Sprache $L \subseteq X^*$ heißt genau dann **kontextfrei**, wenn für eine kontextfreie Grammatik (Chomsky-Typ 2) G gilt $L \setminus \{\varepsilon\} = L(G)$.

CF ($= \mathcal{L}_2$): Menge aller kontextfreien Sprachen

- ▶ Unter welchen der Operationen $\cup, \cap, \bar{}, \circ, *, R$ ist CF abgeschlossen?
- ▶ Gibt es ein passendes (deterministisches, eindeutiges) Maschinenmodell für kontextfreie Sprachen?
- ▶ Existieren algorithmische Lösungsverfahren für folgende Probleme für kontextfreie Sprachen:
 - ▶ Wortproblem
 - ▶ Leerheit, Vollständigkeit, Endlichkeit
 - ▶ Inklusion, Gleichheit, Disjunktheit
- ▶ Wie kann man zeigen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist?

Kontextfreie Grammatiken – Wiederholung

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ vom Chomsky-Typ 2

Alle Regeln in P haben die Form $l \rightarrow r$ mit

$l \in N$ und $r \in (N \cup T)^+$

w in G ableitbar gdw. $S \rightarrow_P^* w$

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ erzeugt die Sprache

$L(G) = \{w \in T^* \mid S \rightarrow_P^* w\}$

Beispiel: Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb \mid ab\}, S)$

- ▶ ist vom Chomsky-Typ 2
- ▶ Ableitung für $aaabbb$ in G : $S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaabbb$
- ▶ G erzeugt die Sprache $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
(vom Chomsky-Typ 2)

Für $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ gilt $L \in \text{CF} \setminus \text{REG}$, d.h.

- ▶ L ist kontextfrei.
- ▶ L ist nicht regulär. (Wie kann man das zeigen?)

WH: Schubfachschluss-Prinzip

Für $|O| > |S|$ existiert keine injektive Funktion $f : O \rightarrow S$.

Anschaulich: Schubfachschluss-Prinzip (Pigeonhole principle)

Verteilt man mehr als n Objekte in n Schubfächer, dann gibt es (wenigstens) ein Schubfach, welches (wenigstens) zwei Objekte enthält.

$$\forall O \forall S \forall f : ((|O| > |S| \wedge f : O \rightarrow S) \rightarrow \exists x \exists y : (x \neq y \wedge f(x) = f(y)))$$

Beispiele:

- ▶ Von 13 Personen haben mindestens zwei im selben Monat Geburtstag.
- ▶ Wieviele Karten aus einem Skatblatt muss man ziehen, damit zwei derselben Farbe dabei sind?
- ▶ vier verschiedenfarbige Paare Socken im Dunklen:
Wieviele Socken muss man (blind) nehmen, damit ein vollständiges Paar dabei ist?
- ▶ Bei jeder Wanderung mit $> n$ Pausen in einem Gebiet mit n Rastplätzen waren wenigstens zwei Pausen am selben Platz.
- ▶ Auf jeder Party (mit ≥ 2 Personen) gibt es wenigstens zwei Personen mit derselben Anzahl an Gesprächspartnern. (keine Selbstgespräche)

Nichtreguläre Sprachen

Fakt

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist nicht NFA-akzeptierbar.

WH Definition REC(NFA): $L \in \text{REC(NFA)}$ gdw. \exists NFA $A : (L(A) = L)$

Vorbereitung für Beweis (indirekt):

$$\begin{aligned} \forall L \subseteq X^* : L \notin \text{REC(NFA)} & \text{ gdw. } \neg \exists A : (L(A) = L) & \text{ gdw. } \forall A : \neg (L(A) = L) \\ & \text{ gdw. } \forall A : (\underbrace{(L(A) = L)}_{\text{Annahme } P(A)} \rightarrow \underbrace{\neg(L(A) = L)}_{\text{Folgerung } \neg P(A)}) \end{aligned}$$

Beweis: Annahme: für NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit $|Q| = k$ gilt $L(A) = L$

Wegen $a^k b^k \in L$ existiert ein akzeptierender Pfad für $a^k b^k$ in A :

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_k \xrightarrow{b} q_{k+1} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} q_{2k} \quad \text{mit } q_0 \in I, q_{2k} \in F$$

SFS: O: Positionen im a^k -Teil $|\{0, \dots, k\}| > k$, S: Zustände $|Q| = k$

Nach SFS existieren $i, j \in \{0, \dots, k\}$ mit $i < j$ und $q_i = q_j$.

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_i = q_j \xrightarrow{a} q_{j+1} \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_k \xrightarrow{b} q_{k+1} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} q_{2k}$$

ist also akzeptierender Pfad für $a^{k-(j-i)} b^k$ in A , d.h. $a^{k-(j-i)} b^k \in L(A)$

Aus $a^{k-(j-i)} b^k \notin L$ folgt $\neg(L(A) = L)$ im Widerspruch zur Annahme.

Also ist die Annahme falsch, d.h. es existiert kein NFA A mit $L = L(A)$.

Weitere nichtreguläre Sprachen

hilfreiches Prinzip:

Da REC(NFA) unter \cap abgeschlossen ist, d.h. $\forall L, L', L'' \subseteq X^*$

$$(L \cap L' = L'' \wedge L \in \text{REC(NFA)} \wedge L' \in \text{REC(NFA)}) \rightarrow L'' \in \text{REC(NFA)}$$

gilt für alle Sprachen L, L', L'' : (ÜA)

$$(L \cap L' = L'' \wedge L' \in \text{REC(NFA)} \wedge L'' \notin \text{REC(NFA)}) \rightarrow L \notin \text{REC(NFA)}$$

- ▶ $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b > 0\} \notin \text{REC(NFA)}$
(wegen $L \cap \underbrace{L(a^*b^*)}_{\in \text{REC(NFA)}} = \{a^n b^n \mid n > 0\} \notin \text{REC(NFA)}$)
- ▶ $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2|w|_a = |w|_b \in \mathbb{N}\} \notin \text{REC(NFA)}$
(wegen $L \cap L(a^*b^*) = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\} \notin \text{REC(NFA)}$
nach Schubfachschluss).
- ▶ $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\} \notin \text{REC(NFA)}$ (Palindrome)
(wegen $L \cap L(a^*ba^*) = \{a^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \text{REC(NFA)}$)
- ▶ $L = \{a^{(n^2)} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \text{REC(NFA)}$
(nach Schubfachschluss, Wortlängen)

Ableitungsbäume für kontextfreie Grammatiken

Beispiel: Grammatik $G = (N, T, P, E)$ mit $N = \{E, F\}$,
 $T = \{a, b, c, (,), +, *\}$,

$$P = \{E \rightarrow (E + E), E \rightarrow F * F, F \rightarrow E, E \rightarrow a, E \rightarrow b, E \rightarrow c\}$$

Ableitung für $w = (c * a + (b + a * a))$

allgemein: Grammatik $G = (N, T, P, S)$

Ableitung $S \rightarrow_P w_1 \rightarrow_P w_2 \rightarrow_P \dots \rightarrow_P w_n = w$ für w in G

Ableitungsbaum zu einem Wort w in der kontextfreien Grammatik G (induktive Definition):

- ▶ Wurzel mit Markierung S
- ▶ für jeder Anwendung einer Regel $A \rightarrow_P r_1 \dots r_n$:
Verzweigung bei Symbol A in n Kinder mit Markierungen $r_1 \dots, r_n$
- ▶ Markierung der Blätter (von links nach rechts): Wort w

Ein Ableitungsbaum repräsentiert i.A. mehrere Ableitungen.

Rechts- und Linksableitungen

Eine Ableitung für w in G heißt

Linksableitung , falls in jedem Schritt das am weitesten links stehende Nichtterminal

Rechtsableitung , falls in jedem Schritt das am weitesten rechts stehende Nichtterminal

ersetzt wird.

Zu jedem Ableitungsbaum für w in G existieren

- ▶ genau eine Linksableitung für w in G und
- ▶ genau eine Rechtsableitung für w in G .

Mehrdeutige kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik G heißt

eindeutig , falls für jedes Wort $w \in L(G)$
genau ein Ableitungsbaum in G existiert.

mehrdeutig , sonst.

Beispiel: Ableitungsbäume für $w = aaa$ in der Grammatik
 $G = (N, T, P, E)$ mit $N = \{S\}$, $T = \{a\}$, $P = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow a\}$

Eindeutigkeit von Grammatiken ist wichtig beim Entwurf von
Programmiersprachen (Syntax)

„dangling else“-Problem:

```
<Anw> ::= if <Ausdr> then <Anw>
```

```
<Anw> ::= if <Ausdr> then <Anw> else <Anw>
```

Was bedeutet:

```
if C1 then if C2 then A else B
```

(Anwendungen im Modul Prinzipien von Programmiersprachen)

Inhärent mehrdeutige Sprachen

Sprachen L , für die keine eindeutige Grammatik G mit $L = L(G)$ existieren, heißen **inhärent mehrdeutig**.

Fakt

Die kontextfreie Sprache

$$L = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n > 0 \wedge (l = m \vee m = n)\}$$

ist inhärent mehrdeutig.

Dyck-Sprachen

Klammerpaar, z.B. (und)

Dyck-Sprache: Menge aller korrekt geklammerten Ausdrücke, d.h.

$L(G)$ für die Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS\}, S)$

Beispiele:

- ▶ $()(()) \in L(G)$
- ▶ $() \notin L(G)$
- ▶ $\varepsilon \in L(G)$

Achtung:

- ▶ G hat Chomsky-Typ 0
- ▶ $G' = (\{S\}, \{(,)\}, \{S \rightarrow () \mid (S) \mid SS\}, S)$ hat Chomsky-Typ 2 und es gilt $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$
- ▶ Dyck-Sprache $L(G)$ hat also Chomsky-Typ 2

praktische Vereinbarung (Zulassung der ε -Sonderregel):

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ hat auch dann Chomsky-Typ i , wenn sie

- ▶ nur Regeln der für Chomsky-Typ i erlaubten Form
- ▶ und evtl. die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ enthält (nur für Startsymbol S)

Allgemeine Dyck-Sprachen

Menge aller korrekt geklammerten Ausdrücke
mit n Paaren von Klammern: $(i,)_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$
erzeugt durch Grammatik

$$G = (\{S\}, \{(i,)_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}, P, S) \quad \text{mit}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \varepsilon \\ S \rightarrow SS \end{array} \right\} \cup \{S \rightarrow (iS)_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Symbole müssen nicht notwendig Klammern sein, z.B.
 $aacdacababdbbbcabdb \in \text{Dyck-Sprache mit}$
 a statt $(_1$, b statt $)_1$, c statt $(_2$ und d statt $)_2$

Beispiel HTML

mehrere Paare öffnender und schließender Klammern (Tags)

`<html> </html>` , `<head> </head>` , `<title> </title>` , ...

```
<html>
  <head>
    <title>
      Automaten und formale Sprachen
    </title>
  </head>
  <body>
    <h1>
      Automaten und formale Sprachen
    </h1>
    ...
  </body>
</html>
```

Abschlusseigenschaften von CF

Satz

Sind L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen, dann sind auch kontextfrei:

- ▶ $L_1 \cup L_2$
- ▶ $L_1 \circ L_2$
- ▶ L_1^*
- ▶ L_1^R

Konstruktionen für $L_i = L(G_i)$ mit $G_i = (N_i, T_i, P_i, S_i)$ für $i \in \{1, 2\}$,
wobei $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (falls nötig, umbenennen)

neues Nichtterminal $S' \notin N_1 \cup N_2$

$$L_1 \cup L_2 = L(G_U) \text{ mit } G_U = (N_1 \cup N_2 \cup \{S'\}, T_1 \cup T_2, P_U, S'),$$

wobei $P_U = P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S_1, S' \rightarrow S_2\}$

$$L_1 \circ L_2 = L(G_o) \text{ mit } G_o = (N_1 \cup N_2 \cup \{S'\}, T_1 \cup T_2, P_o, S'),$$

wobei $P_o = P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 S_2\}$

$$L_1^* = L(G_*) \text{ mit } G_* = (N_1 \cup \{S'\}, T_1, P_*, S'), \text{ wobei}$$

$P_* = P_1 \cup \{S' \rightarrow \varepsilon, S' \rightarrow S_1 S'\}$

$$L_1^R \text{ war } \ddot{U}A$$

noch offen: CF abgeschlossen unter $\bar{\quad}, \cap$?

Was bisher geschah

reguläre Sprachen (Chomsky-Typ 3):

- ▶ endliche Repräsentation durch
 - ▶ reguläre Grammatiken
 - ▶ NFA (DFA, ε -NFA, ...)
 - ▶ reguläre Ausdrücke
- ▶ abgeschlossen unter $\cup, \cap, \bar{}, \circ, *, R$
- ▶ nicht-reguläre Sprachen (mit Nachweis),
z.B. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$
- ▶ algorithmische Entscheidbarkeit des Wortproblems ($\mathcal{O}(|w|)$),
sowie Leerheit, Endlichkeit, Gleichheit usw. regulärer Sprachen

kontextfreie Sprachen (Chomsky-Typ 2):

- ▶ repräsentiert durch kontextfreie Grammatiken
- ▶ CF abgeschlossen unter $\cup, \circ, *, R$
noch offen: CF auch unter $\cap, \bar{}$ abgeschlossen ?

Erreichbare und erzeugende Nichtterminale

kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$

Nichtterminal $A \in N$ heißt

erreichbar aus $B \in N$, falls

$$\exists u, v \in (N \cup T)^* : B \rightarrow_P^* uAv$$

erreichbar in G falls A aus Startsymbol S erreichbar ist

erzeugend falls $\exists w \in T^* : A \rightarrow_P^* w$

Beispiel:

Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C, D, E\}$,

$T = \{a, b, c\}$,

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow C, A \rightarrow a, D \rightarrow ScA, B \rightarrow b, C \rightarrow BbC\}$$

erreichbar aus S sind S, A, B, C

erzeugend sind S, A, B, D

Eliminierung nutzloser Nichtterminale

gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$

induktive Bestimmung aller erzeugenden Nichtterminale aus N :

$$\begin{aligned}M_0 &= \{A \mid (A \rightarrow w) \in P \wedge w \in T^*\} \\M_{i+1} &= M_i \cup \{A \mid (A \rightarrow w) \in P \wedge w \in (T \cup M_i)^*\}\end{aligned}$$

Es gibt ein $n \in \mathbb{N} : M_n = M_{n+1}$, M_n enthält alle erzeugenden NT

Eliminierung aller nicht-erzeugenden NT:

Löschen aller Regeln, die nicht-erzeugende NT enthalten

induktive Bestimmung aller aus S erreichbaren Nichtterminale:

$$\begin{aligned}M'_0 &= \{S\} \\M'_{i+1} &= M'_i \cup \{A \mid (B \rightarrow uAv) \in P \wedge B \in M'_i \wedge u, v \in (N \cup T)^*\}\end{aligned}$$

Es gibt ein $n \in \mathbb{N} : M'_n = M'_{n+1}$, M'_n enthält alle erreichbaren NT

Eliminierung aller nicht-erreichbaren NT:

Löschen aller Regeln, die nicht-erreichbare NT enthalten

Reduzierte kontextfreie Grammatiken

reduzierte Grammatik enthält nur erreichbare und erzeugende Nichtterminale

Fakt

Zu jeder kontextfreien Grammatik existiert eine äquivalente reduzierte Grammatik.

Erzeugung einer reduzierten Grammatik aus beliebiger kontextfreier Grammatik G :

nacheinander **in dieser Reihenfolge**:

1. G' entsteht durch Eliminierung aller nicht-erzeugenden Nichtterminale in G ,
2. G'' entsteht durch Eliminierung aller nicht-erreichbaren Nichtterminale in G'

Satz: G'' ist reduziert und äquivalent zu G .

Kettenregeln

Kettenregel Regel $l \rightarrow r$ mit $l \in N$ und $r \in N$

Beispiel: $G = (\{A, B, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow 0S0, S \rightarrow 00, S \rightarrow A, A \rightarrow 1A, A \rightarrow B, B \rightarrow 1\}$

Eliminierung der Kettenregeln aus $G = (N, T, P, S)$:

- ▶ induktive Bestimmung aller Ketten-Paare

$$M_0 = \{(A, A) \mid A \in N\}$$

$$M_{i+1} = M_i \cup \{(A, C) \mid (A, B) \in M_i \wedge (B \rightarrow C) \in P\}$$

Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_n = M_{n+1}$.

- ▶ $P' = \{A \rightarrow w \mid (A, B) \in M_n \wedge (B \rightarrow w) \in P \wedge w \notin N\}$
 - ▶ Hinzufügen aller Nicht-Kettenregeln $A \rightarrow w$, für welche P eine Regel $B \rightarrow w$ enthält und $(A, B) \in M_n$ (Ketten-Paar)
 - ▶ Löschen aller Kettenregeln

Satz: Die so erzeugte Grammatik G' ist äquivalent zu G .

Chomsky-Normalform

Kontextfreie Grammatiken $G = (N, T, P, S)$ mit

$\forall (l \rightarrow r) \in P : r \in (T \cup N^2)$ heißen in **Chomsky-Normalform**.

(Ableitungsbäume von Grammatiken in Chomsky-NF sind binäre Bäume.)

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ existiert eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.

Beweis durch Konstruktion:

1. ε -Regeln und Kettenregeln eliminieren
(evtl. zuvor Grammatik reduzieren),
2. Hinzufügen neuer Nichtterminale $\{X_c \mid c \in T\}$ zu N ,
Hinzufügen aller Regeln $\{X_c \rightarrow c \mid c \in T\}$ zu P , Ersetzung jedes
Terminals c durch X_c in allen rechten Regelseiten r mit $|r| > 1$
(resultierende Grammatik hat nur Regeln $l \rightarrow r$ mit $r \in (T \cup N^+)$)
3. Ersetzung jeder Regel $A \rightarrow B_1 \dots B_n$ in P' mit $n > 2$ durch
 $n - 1$ Regeln: $A \rightarrow B_1 C_2, \dots, C_i \rightarrow B_i C_{i+1}, \dots, C_{n-1} \rightarrow B_{n-1} B_n$
mit neuen Nichtterminalen C_i
(resultierende Grammatik hat nur Regeln $l \rightarrow r$ mit $r \in (T \cup N^2)$)

Wortproblem für kontextfreie Sprachen

Eingabe: kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$
(in Chomsky-Normalform)
Wort $w = w_1 \dots w_n \in T^*$

Ausgabe: ja, falls $w \in L(G)$, sonst nein

ist algorithmisch entscheidbar (Warum? Laufzeit?)

Beispiel: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow SA, S \rightarrow a, A \rightarrow BS, B \rightarrow BB, B \rightarrow BS, B \rightarrow b, B \rightarrow c\}$

$aba \in L(G)$, $abc \notin L(G)$, $abacba \stackrel{?}{\in} L(G)$

Idee:

- ▶ für jedes Teilwort $w_i \dots w_j$ Suche nach Nichtterminalen, welche $w_i \dots w_j$ erzeugen,
- ▶ Beginn bei Teilwörtern der Länge 1
- ▶ alle Zerlegungen von $w_i \dots w_j$ in zwei Teilwörter testen

CYK-Algorithmus

(Cocke, Younger, Kasami)

induktive Berechnung der Mengen $N_{i,j} = \{A \in N \mid A \rightarrow_P^* w_i \dots w_j\}$
durch die Rekursionsgleichung:

$$N_{i,j} = \begin{cases} \{A \mid A \rightarrow w_i \in P\} & \text{falls } i = j \\ \bigcup_{i \leq k \leq j-1} \{A \mid A \rightarrow BC \in P \wedge B \in N_{i,k} \wedge C \in N_{k+1,j}\} & \text{falls } i < j \end{cases}$$

(Zerlegungen von $w_i \dots w_j = w_i \dots w_k \circ w_{k+1} \dots w_j$)

dynamische Programmierung: Tabelle (Tafel)

Laufzeit: $\mathcal{O}(|w|^3)$

Fakt

Für kontextfreie Grammatiken $G = (N, T, P, S)$ gilt
 $w \in L(G)$ gdw. $S \in N_{1,|w|}$.

CYK-Algorithmus löst Wortproblem für CF in kubischer Zeit

Was bisher geschah

reguläre Sprachen (Chomsky-Typ 3):

- ▶ endliche Repräsentation durch
 - ▶ reguläre Grammatiken
 - ▶ NFA (DFA, ε -NFA, ...)
 - ▶ reguläre Ausdrücke
- ▶ abgeschlossen unter $\cup, \cap, \bar{}, \circ, *, R$
- ▶ nicht-reguläre Sprachen, z.B. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$, $\{a^{(n^2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- ▶ Wortproblem algorithmisch entscheidbar in $\mathcal{O}(|w|)$,
- ▶ algorithmische Entscheidbarkeit von
Leerheit, Endlichkeit, Gleichheit usw. regulärer Sprachen

kontextfreie Sprachen (Chomsky-Typ 2):

- ▶ repräsentiert durch kontextfreie Grammatiken
- ▶ CF abgeschlossen unter $\cup, \circ, *, R$,
noch unklar: auch abgeschlossen unter \cap und $\bar{}$?
- ▶ reduzierte kontextfreie Grammatiken
- ▶ kontextfreie Grammatiken in Chomsky-NF
- ▶ CYK, Wortproblem algorithmisch entscheidbar in $\mathcal{O}(|w|^3)$

Nicht-kontextfreie Sprachen

Die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow aABC, \\ A \rightarrow aBC, \\ CB \rightarrow BC, \\ aB \rightarrow ab, \\ bB \rightarrow bb, \\ bC \rightarrow bc, \\ cC \rightarrow cc \end{array} \right\}$$

erzeugt die Sprache $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.
(Chomsky-Typ 1, kontextsensitiv)

Fakt

Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ ist nicht kontextfrei.

Nachweis für $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \notin \text{CF}$

Idee: indirekter Beweis mit SFS (analog $\{a^n b^n \mid n > 0\} \notin \text{REG}$)

Beweis (Skizze): z.z.:

\forall CFG $G = (N, T, P, S)$ in Chomsky-NF: $((L(G) = L) \rightarrow \neg(L(G) = L))$

Annahme: für CFG $G = (N, T, P, S)$ mit $|N| = k$ gilt $L(G) = L$

Wegen $w = a^{(2^k)} b^{(2^k)} c^{(2^k)} \in L$ existiert nach Annahme also

ein Ableitungsbaum t für $a^{(2^k)} b^{(2^k)} c^{(2^k)}$ in G (Tafel)

t hat Höhe wenigstens $\lceil \log_2(3 \cdot 2^k) \rceil > \log_2(2 \cdot 2^k) = k + 1$, also existiert

in t ein Pfad $p = [p_0 = S, p_1, \dots, p_{k'}] \in N^* \circ T$ mit $k' > k + 1$

SFS über $p' = [p_0 = S, p_1, \dots, p_{k'-1}] \in N^*$:

O: Positionen auf Pfad p' : $|\{0, \dots, k' - 1\}| = k' > k$,

S: Nichtterminale $|N| = k$

Nach SFS existieren $i, j \in \{0, \dots, k' - 1\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$.

Also ergibt die Ersetzung des Teilbaumes mit Wurzel p_i durch Teilbaum

mit Wurzel p_j in t einen Ableitungsbaum für Wort $w' \neq a^{(2^k)} b^{(2^k)} c^{(2^k)}$.

Tafel: Analyse aller möglichen Wörter w' durch Zerlegungen (definiert durch Pfad p)

In allen Fällen gilt $w' \notin L$ und damit $\neg(L(G) = L)$ im Widerspruch zur Annahme.

Also ist die Annahme falsch und es existiert keine CFG G mit $L = L(G)$.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Sprache $L \subseteq X^*$ hat die **CF-Pump-Eigenschaft** gdw.

$\exists k (k \in \mathbb{N} \wedge \forall w ((w \in L \wedge |w| \geq k) \rightarrow$

$\exists (u, v, x, y, z) ((u, v, x, y, z) \in (X^*)^5 \wedge w = uvxyz \wedge |vxy| \leq k \wedge |vy| \geq 1 \wedge$
 $\forall i (i \in \mathbb{N} \rightarrow uv^i xy^i z \in L)))$

k heißt hier **Pumping-Konstante** für L .

Beispiele: $\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\} = L(a^*)$ mit $k = 1$

$\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $k = 2$, $\{(ab)^i \mid i > 0\} = L((ab)^+)$ mit $k = 3$

Satz (Pumping-Lemma für CF)

Jede kontextfreie Sprache hat die CF-Pump-Eigenschaft.

Ausführlichere Formulierung desselben Satzes:

Satz (Pumping-Lemma für CF)

Für jede kontextfreie Sprache L

existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ (Pumping-Konstante), so dass

für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq k$

eine Zerlegung $w = uvxyz$ existiert, so dass

$u, v, x, y, z \in X^$, $|vy| \geq 1$, $|vxy| \leq k$ und*

für jede Zahl $i \in \mathbb{N}$ gilt $uv^i xy^i z \in L$.

Beispiele nicht-kontextfreier Sprachen

▶ $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

▶ $\{a^n b^m a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(ÜA)

▶ $\{a^{(2^k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen ist geeignet, um zu zeigen, dass eine Sprache **nicht** kontextfrei ist.

Achtung: Umkehrung gilt hier **nicht**.

Es gibt nicht-kontextfreie Sprachen mit CF-Pump-Eigenschaft,

z.B. $L = \{a^j b^k c^l d^m \mid j = 0 \vee k = l = m\}$

Man bemerke: $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = L_1 \cap L_2$ für

$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

L_1 und L_2 sind beide kontextfrei.

Folgerung: CF ist **nicht** unter \cap abgeschlossen.

Was folgt daraus für den Abschluss von CF unter $\bar{\quad}$?

Spezialfall: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Sprache $L \subseteq X^*$ hat die **REG-Pump-Eigenschaft** gdw.

$$\exists k (k \in \mathbb{N} \wedge \forall w ((w \in L \wedge |w| \geq k) \rightarrow \\ \exists (u, v, x) ((u, v, x) \in (X^*)^3 \wedge w = uvx \wedge |uv| \leq k \wedge |v| \geq 1 \wedge \\ \forall i (i \in \mathbb{N} \rightarrow uv^i x \in L))))$$

k heißt **Pumping-Konstante** für L .

Beispiel: $L((ab)^*)$ hat die REG-Pump-Eigenschaft, $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht

Satz (REG-Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die REG-Pump-Eigenschaft.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht.

Es gibt nicht-reguläre Sprachen mit REG-Pump-Eigenschaft,

z.B. $L = \{a^j b^k c^l \mid j = 0 \vee k = l\}$

(ÜA)

Häufige (ausführlichere) Formulierung desselben Satzes:

Satz (REG-Pumping-Lemma)

Für jede reguläre Sprache L

existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ (Pumping-Konstante), so dass

für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq k$

eine Zerlegung $w = uvx$ **existiert**, so dass

$u, v, x \in X^*$, $|v| \geq 1$, $|uv| \leq k$ und **für jede** Zahl $i \in \mathbb{N}$: $uv^i x \in L$.

Maschinenmodelle

Definition (endliche Beschreibung) durch

- ▶ interne Steuerung
(z.B. endliche Menge von Zuständen)
- ▶ externen Speicher mit speziellen Zugriffsmöglichkeiten
 - ▶ Typ des Speicherinhaltes
(z.B. endliches Wort über endlichem Alphabet)
 - ▶ Zugriffsmethode (z.B. Lesen / Schreiben, einmal / wiederholt, feste Reihenfolge)

Konfigurationen (Momentaufnahmen)

und endliche Menge zulässiger lokaler Übergänge zwischen Konfigurationen

schrittweise Berechnung : Folge von Konfigurationen von einer Startkonfiguration über zulässige Konfigurationsübergänge

Akzeptanz einer Eingabe durch akzeptierende Berechnung:
endliche Konfigurationenfolge zu einer akzeptierenden Konfiguration

Definition des Maschinenmodells NFA

Aufgabe: Lösung des Wortproblems $w \in L$ für reguläre Sprachen L
(gegeben durch NFA A mit $L = L(A)$)

NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ als abstrakte Maschine:

externer Speicher Eingabeband aus einzelnen linear angeordneten Speicherzellen
(enthält ein Wort $w \in X^*$, jede Zelle ein Symbol aus dem Alphabet, danach rechtes Randsymbol \square)

interner Speicher enthält Zustand aus Q

Steuerelement Zugriff auf

- ▶ Eingabeband (externer Speicher): Lesen
Bewegung in jedem Schritt eine Zelle nach rechts
- ▶ Zustand (interner Speicher): Lesen und Schreiben

Arbeitsweise des Maschinenmodells NFA

Start Steuerelement (Lesekopf) in einem Startzustand über der ersten Zelle des Eingabewortes

Schritt besteht aus drei Teilen

1. NFA liest Zeichen in der Zelle unter Lesekopf
2. Zustandsübergang im Steuerelement (entsprechend Übergangsrelation und gelesenen Symbol)
3. Lesekopf bewegt sich zur rechten Nachbarzelle (bei ϵ -Übergängen keine Bewegung)

Ende Lesekopf auf der Zelle rechts neben dem letzten Symbol des Eingabewortes (auf dem ersten \square)

Akzeptanz NFA akzeptiert das Eingabewort gdw. akzeptierender Zustand im internen Speicher

Konfigurationen eines NFA

NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$

Konfiguration $(q, w) \in (Q \times X^*)$ mit
aktuellem Zustand $q \in Q$ und
noch nicht gelesenen Teil des Eingabewortes $w \in X^*$

Startkonfiguration (s, u) mit
Startzustand $s \in I$ und Eingabewort $u \in X^*$

akzeptierende Konfiguration (f, ε) mit akzeptierendem Zustand $f \in F$

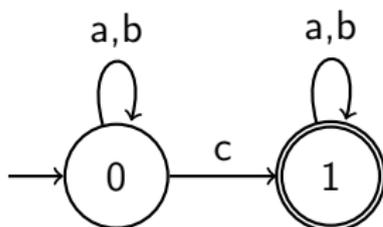
Folgekonfiguration zur Konfiguration (p, aw) mit $a \in X$ und $w \in X^*$:
Konfiguration (q, w) mit $(p, q) \in \delta(a)$
Notation: $(p, aw) \vdash (q, w)$

Berechnung für Eingabewort $w \in X^*$ in A :
Folge $((q_0, u_0), \dots, (q_n, u_n))$ von Konfigurationen, wobei
für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt $(q_i, u_i) \vdash (q_{i+1}, u_{i+1})$

akzeptierende Berechnung für Eingabewort $w \in X^*$ in A :
Berechnung für w mit Endkonfiguration $(q_n, v_n) = (f, \varepsilon)$
(analog zu akzeptierendem Pfad für w in A)

Beispiel

$A = (\{a, b, c\}, \{0, 1\}, \delta, \{0\}, \{1\})$ mit
 $\delta(a) = \delta(b) = \{(0, 0), (1, 1)\}$ und $\delta(c) = \{(0, 1)\}$,



Eingabewort $acba$

Startkonfiguration $(0, acba)$

Endkonfiguration $(1, \varepsilon)$ nach der vollständigen Verarbeitung des
Eingabewortes

akzeptierende Berechnung für Eingabewort $aaba$ in A :

$(0, acba) \vdash (0, cba) \vdash (1, ba) \vdash (1, a) \vdash (1, \varepsilon)$

Man bemerke die Analogie zum akzeptierenden Pfad für $acba$ in A

$0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{c} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 1$

Maschinenmodelle und Algorithmen

- ▶ endliche Beschreibung
- ▶ schrittweise Bearbeitung
- ▶ (Ergebnis nach endlich vielen Schritten)

Jede abstrakte Maschine führt einen **Algorithmus** aus.
(z.B. zur Lösung des Wortproblems (L, w) für reguläre Sprachen L)
verschiedene Maschinenmodelle unterscheiden sich in

- ▶ Art und Kapazität des internen und externen Speichers
- ▶ Art des Zugriffs auf internen und externen Speicher
- ▶ Reihenfolge der Zugriffe (einmalig, wiederholt)
- ▶ Determinismus

Maschinen definieren **Sprachen**:

Menge aller Eingaben mit akzeptierenden Berechnungen

Maschinenmodelle definieren **Sprachklassen**:

Menge aller durch eine solche Maschine definierten Sprachen

Kellerautomaten – Motivation

Die Sprache $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
ist kontextfrei, aber nicht regulär
(nicht NFA-akzeptierbar).

gesucht:

(einfaches) Maschinenmodell, welches die Sprache L akzeptiert

Maschine benötigt Speicher für Reihenfolge der Symbole in w , um auf diese in umgekehrter Reihenfolge zugreifen zu können (LIFO)

geeignete Datenstruktur für Speicher mit dieser Eigenschaft:

Stack (Keller)

Kellerautomat (pushdown automaton, PDA):

Erweiterung von NFA (mit ε -Übergängen)

um internen Speicher (vom Typ Keller, Stack)

Kellerautomaten (PDA) – Definition

nichtdeterministischer **Kellerautomat** (PDA)

$A = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \perp)$ mit

X Alphabet (endlich, nichtleer)

Q Menge von Zuständen (endlich, nichtleer)

Γ Kelleralphabet (endlich, nichtleer)

$q_0 \in Q$ Startzustand

$F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Zustände

$\delta : (X \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow (Q \times Q \times \Gamma \times \Gamma^*)$

für jedes $s \in X \cup \{\varepsilon\}$ eine Übergangsrelation
(mit Änderung des Kellerinhaltes)

$\perp \in \Gamma$ Kellerboden-Symbol

PDA – Beispiel

PDA $A = (\{a, b, c\}, \{q_0, p, q\}, \{\perp, A, B\}, \delta, q_0, \{q\}, \perp)$ mit

$$\delta(a) = \{(q_0, q_0, \perp, A\perp), (q_0, q_0, A, AA), (q_0, q_0, B, AB), (p, p, A, \varepsilon)\}$$

$$\delta(b) = \{(q_0, q_0, \perp, B\perp), (q_0, q_0, A, BA), (q_0, q_0, B, BB), (p, p, B, \varepsilon)\}$$

$$\delta(c) = \{(q_0, p, \perp, \perp), (q_0, p, A, A), (q_0, p, B, B)\}$$

$$\delta(\varepsilon) = \{(p, q, \perp, \perp)\}$$

a : $\perp \mid A\perp$

a : $A \mid AA$

a : $B \mid AB$

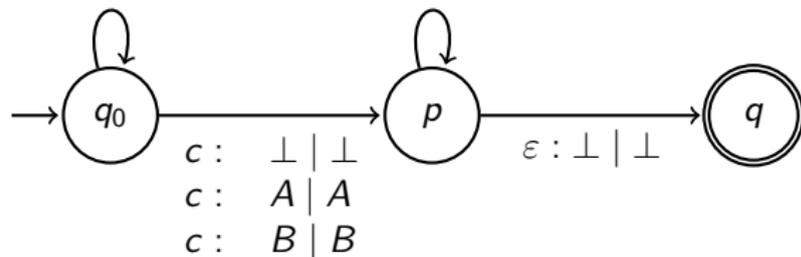
b : $\perp \mid B\perp$

b : $A \mid BA$

b : $B \mid BB$

a : $A \mid \varepsilon$

b : $B \mid \varepsilon$



PDA – Konfigurationen

Konfiguration $(q, w, k) \in Q \times X^* \times \Gamma^*$ mit

- ▶ Zustand $q \in Q$
- ▶ (noch zu lesendes) Eingabewort $w \in X^*$
- ▶ Kellerinhalt $k \in \Gamma^*$
- ▶ Startkonfigurationen (q_0, w, \perp) mit $w \in X^*$ beliebig
- ▶ Übergang zwischen Konfigurationen:
 $(p, aw, Gk) \vdash (q, w, k'k)$ mit $(p, q, G, k') \in \delta(a)$ für $k \in \Gamma^*$
und $(p, w, Gk) \vdash (q, w, k'k)$ mit $(p, q, G, k') \in \delta(\varepsilon)$ für $k \in \Gamma^*$
- ▶ akzeptierende Konfigurationen (q, ε, k) mit $q \in F, k \in \Gamma^*$

akzeptierende Berechnung (Konfigurationsfolge) für w in A :
Folge $(q_0, w_0, k_0) \vdash \cdots \vdash (q_n, w_n, k_n)$ von Konfigurationen mit

- ▶ (q_0, w_0, k_0) eine Startkonfiguration mit $w_0 = w$
- ▶ (q_n, w_n, k_n) eine akzeptierende Konfiguration mit $w_n = \varepsilon$
- ▶ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $(q_{i-1}, w_{i-1}, k_{i-1}) \vdash (q_i, w_i, k_i)$

Von PDA akzeptierte Sprachen

PDA $A = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \perp)$ **akzeptiert** das **Wort** $w \in X^*$ gdw. eine akzeptierende Berechnung (Konfigurationenfolge) mit der Startkonfiguration (q_0, w, \perp) existiert.

PDA $A = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \perp)$ **akzeptiert** die Sprache

$$L(A) = \{w \in X^* \mid A \text{ akzeptiert } w\}$$

Sprache L heißt **PDA-akzeptierbar** gdw. ein PDA A mit $L = L(A)$ existiert.

PDA A und B heißen **äquivalent** gdw. $L(A) = L(B)$

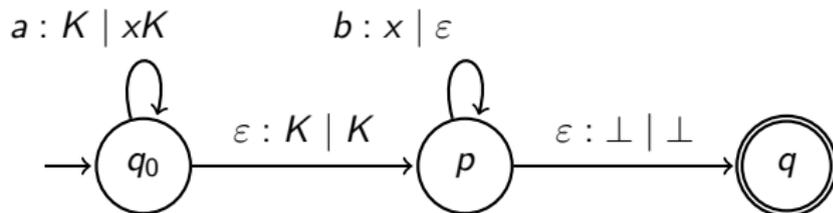
PDA-Akzeptanz – Beispiel

PDA $A = (\{a, b\}, \{q_0, p, q\}, \{\perp, x\}, \delta, q_0, \{q\}, \perp)$ mit

$\delta(a) = \{(q_0, q_0, K, xK)\}$ für $K \in \{x, \perp\}$

$\delta(b) = \{(p, p, x, \varepsilon)\}$

$\delta(\varepsilon) = \{(q_0, p, K, K), (p, q, \perp, \perp)\}$ mit $K \in \{x, \perp\}$



für $K \in \{x, \perp\}$

A akzeptiert das Wort $aabb$ über die Konfigurationenfolge

$$\begin{aligned} & (q_0, aabb, \perp) \vdash (q_0, abb, x\perp) \vdash (q_0, bb, xx\perp) \vdash (p, bb, xx\perp) \\ & \vdash (p, b, x\perp) \vdash (p, \varepsilon, \perp) \vdash (q, \varepsilon, \perp) \end{aligned}$$

und ε über die Konfigurationenfolge $(q_0, \varepsilon, \perp) \vdash (p, \varepsilon, \perp) \vdash (q, \varepsilon, \perp)$

aber nicht abb, aba

Es gilt $L(A) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Damit ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ PDA-akzeptierbar.

Deterministische PDA

PDA $A = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \perp)$ heißt **deterministisch** (DPDA) gdw.

$$\forall a \in X \forall q \in Q \forall K \in \Gamma : |\{(p, B) \mid (q, p, K, B) \in \delta(a) \cup \delta(\varepsilon)\}| \leq 1$$

Sprache L heißt **deterministisch kontextfrei** gdw. ein deterministischer PDA A mit $L = L(A)$ existiert.

Beispiele:

- ▶ $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist deterministisch kontextfrei,
- ▶ $L' = \{wcw^R \in \{a, b, c\}^* \mid w \in \{a, b\}^*\}$
ist deterministisch kontextfrei,
- ▶ $L'' = \{waw^R \in \{a, b\}^* \mid w \in \{a, b\}^*\}$
ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei.

Die Menge aller durch deterministische PDA akzeptierbaren Sprachen ist eine **echte** Teilmenge der Menge aller durch PDA akzeptierbaren Sprachen.

PDA – Akzeptanz durch leeren Keller

alternative Akzeptanzbedingung

akzeptierende Konfigurationen: $(q, \varepsilon, \varepsilon)$ mit $q \in Q$ beliebig

Angabe akzeptierender Zustände überflüssig

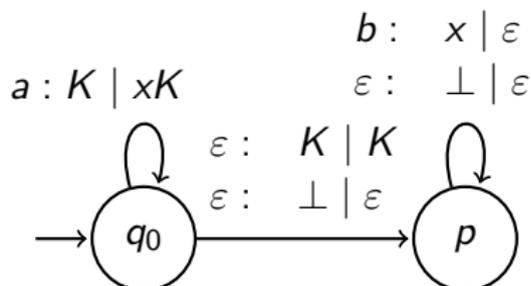
Beispiel: $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist PDA-akzeptierbar durch

PDA $A = (\{a, b\}, \{q_0, p\}, \{\perp, x\}, \delta, q_0, \perp)$ mit

$\delta(a) = \{(q_0, q_0, K, xK)\}$ für $K \in \Gamma$

$\delta(b) = \{(p, p, x, \varepsilon)\}$

$\delta(\varepsilon) = \{(q_0, p, K, K), (q_0, p, \perp, \varepsilon), (p, p, \perp, \varepsilon)\}$ für $K \in \{x, \perp\}$



für $K \in \{x, \perp\}$

Akzeptanzbedingungen für PDA

zwei Möglichkeiten zur Definition akzeptierender Konfigurationen:

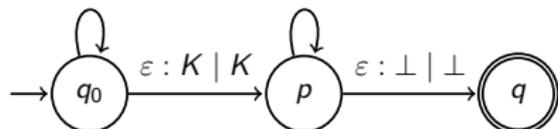
1. Akzeptanz durch akzeptierenden Zustand (analog NFA):
(q, ε, k) mit $q \in F$ und $k \in \Gamma^*$ beliebig
2. Akzeptanz durch leeren Keller:
($q, \varepsilon, \varepsilon$) mit $q \in Q$ beliebig

Beispiel: Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wird

durch **akzeptierende Zustände**
akzeptiert durch den PDA $A =$
 $(\{a, b\}, \{q_0, p, q\}, \{\perp, x\}, \delta, q_0, \{q\}, \perp)$
mit

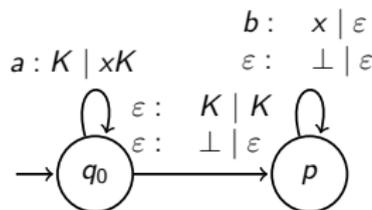
$a: K \mid xK$

$b: x \mid \varepsilon$



für $K \in \{x, \perp\}$

mit **leerem Keller** akzeptiert durch den PDA $B =$
 $(\{a, b\}, \{q_0, p, q\}, \{\perp, x\}, \delta, q_0, \perp)$
mit



Äquivalenz beider Akzeptanzbedingungen

Satz

1. *Zu jedem PDA mit akzeptierenden Zuständen existiert ein äquivalenter PDA, der mit leerem Keller akzeptiert.*
2. *Zu jedem PDA, der mit leerem Keller akzeptiert, existiert ein äquivalenter PDA mit akzeptierenden Zuständen.*

Idee (PDA-Transformationen): (SS22 nicht gezeigt)

1. PDA mit akzeptierenden Zuständen \rightarrow PDA mit leerem Keller:
neues Kellerboden-Symbol und neuen Finalzustand hinzufügen,
ursprünglicher Automat arbeitet „darüber“,
nach Übergang in einen akzeptierenden Zustand ϵ -Übergänge in
diesem akzeptierenden Zustand zum Entfernen aller im Keller
verbliebenen Symbole (einschließlich der Kellerboden-Symbole)
2. PDA mit leerem Keller \rightarrow PDA mit akzeptierenden Zuständen:
neuen (einzigem) akzeptierenden Zustand hinzufügen,
für jeden Übergang in eine Konfiguration mit leerem Keller einen
Übergang in diesen akzeptierenden Zustand hinzufügen.

Schnitt PDA-akzeptierbarer mit regulären Sprachen

Satz

- ▶ Sind L eine PDA-akzeptierbare und L' eine reguläre Sprache, dann ist die Sprache $L \cap L'$ PDA-akzeptierbarer.
- ▶ Sind L eine durch einen DPDA-akzeptierbare und L' eine reguläre Sprache, dann ist die Sprache $L \cap L'$ durch einen DPDA akzeptierbarer.

gegeben: PDA $A = (X, Q_A, \Gamma, \delta_A, i_A, F_A, \perp)$ mit $L = L(A)$

(Akzeptanz durch akzeptierende Zustände)

DFA $B = (X, Q_B, \delta_B, i_B, F_B)$ mit $L' = L(B)$

Produktkonstruktion (SS22 nicht gezeigt):

PDA $C = (X, Q_A \times Q_B, \Gamma, \delta, (i_A, i_B), F_A \times F_B, \perp)$ mit

$$\forall a \in X : \delta(a) = \left\{ ((p_A, p_B), (q_A, q_B), G, k) \mid \begin{array}{l} (p_A, q_A, G, k) \in \delta_A(a) \\ \wedge (p_B, q_B) \in \delta_B(a) \end{array} \right\}$$

$$\delta(\varepsilon) = \{ ((p_A, p_B), (q_A, p_B), G, k) \mid (p_A, q_A, G, k) \in \delta_A(\varepsilon) \}$$

Für den oben konstruierten PDA C gilt $L(C) = L(A) \cap L(B)$.

Ist der PDA A deterministisch, dann ist auch C deterministisch.

Beispiel: $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\} \cap a^* b a^*$

Anwendung zum Schnitt mit regulären Sprachen

$$\forall L, L' \subseteq X^* : ((L \in \text{CF} \wedge L' \in \text{REG}) \rightarrow (L \cap L') \in \text{CF})$$

(CF ist unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen)

$$\forall L, L' \subseteq X^* : ((L' \in \text{REG} \wedge (L \cap L') \notin \text{CF}) \rightarrow L \notin \text{CF})$$

ist dazu äquivalent (Warum ?) und nützlich

Beispiele:

- ▶ Für $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ und $L' = L(a^+b^+c^+) \in \text{REG}$ ist $L \cap L' = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \notin \text{CF}$ (Pumping Lemma) und damit auch $L \notin \text{CF}$
- ▶ Für $L = \{a^j b^k c^l d^m \mid j = 0 \vee k = l = m\}$ ist $L \cap L(ab^*c^*d^*) = \{ab^k c^k d^k \mid k \in \mathbb{N}\} \notin \text{CF}$ (Pumping Lemma) und damit auch $L \notin \text{CF}$

Kontextfreie Grammatiken und PDA

Satz

Die Menge aller kontextfreien (d.h. durch eine kontextfreie Grammatik erzeugten) Sprachen ist genau die Menge aller PDA-akzeptierbaren Sprachen.

1. Konstruktion eines PDA A zu einer gegebenen kontextfreien Grammatik G mit $L(A) = L(G)$
2. Konstruktion einer kontextfreien Grammatik G zu einem gegebenen PDA A mit $L(A) = L(G)$
(SS22 nicht gezeigt)

Kontextfreie Grammatik \rightarrow PDA

Beispiel: Łukasiewicz-Sprache erzeugt durch die Grammatik

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow a, S \rightarrow bSS\}$

Lemma

Zu jeder kontextfreien Grammatik G existiert ein PDA A mit $L(A) = L(G)$.

gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (N, X, P, S)$

Idee: Tiefensuche im Ableitungsbaum (Linksableitung)

Konstruktion: PDA $A = (X, \{q\}, N \cup X, \delta, q, S)$ mit LK-Akzeptanz und

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon) &= \{(q, q, B, w) \mid B \rightarrow w \in P\} \\ \forall a \in X : \delta(a) &= \{(q, q, a, \varepsilon)\}\end{aligned}$$

Für den so konstruierten PDA A gilt $L(A) = L(G)$.

Nachweis: Eindeutige Zuordnung zwischen Linksableitungen

$S \rightarrow u_1 A_1 v_1 \rightarrow u_1 u_2 A_2 v_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_1 \dots u_{m-1} A_{m-1} v_{m-1} \rightarrow w = u_1 \dots u_m$

(mit $u_i \in X^*$, $v_i \in (N \cup X)^*$) und akz. Berechnungen für $w = u_1 \dots u_m$

$$\begin{aligned}(q, w, S) &\vdash (q, u_1 \dots u_m, u_1 A_1 v_1) \vdash \dots \vdash (q, u_2 \dots u_m, A_1 v_1) \\ &\vdash (q, u_2 \dots u_m, u_2 A_2 v_2) \vdash \dots \vdash (q, u_m, u_m) \vdash \dots \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)\end{aligned}$$

CF: Algorithmische Lösungen

algorithmisch lösbar sind für kontextfreie Sprachen (Grammatiken)

- ▶ Wortproblem: Eingabe (G, w)
Ausgabe: ja, falls $w \in L(G)$, sonst nein
(CYK-Algorithmus, $\mathcal{O}(|w|^3)$)
- ▶ Leerheitsproblem: Eingabe G ,
Ausgabe: ja, falls $L(G) = \emptyset$, sonst nein
(ja, falls Startsymbol der Grammatik nicht erzeugend, Reduktion)
- ▶ Endlichkeitsproblem: Eingabe G ,
Ausgabe: ja, falls $L(G)$ endlich, sonst nein
(Gilt $\exists w \in L : n \leq |w| < 2n$ für Pumping-Konstante n ?)

nicht algorithmisch entscheidbar sind (Beweise später in TI Master)

- ▶ Inklusion \subseteq : Eingabe G_1, G_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L(G_1) \subseteq L(G_2)$, sonst nein
- ▶ Gleichheit $=$: Eingabe G_1, G_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L(G_1) = L(G_2)$, sonst nein
- ▶ Disjunktheit: Eingabe G_1, G_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$, sonst nein
- ▶ Kontextfreiheit der Schnittsprache: Eingabe G_1, G_2 ,
Ausgabe: ja, falls $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei, sonst nein

CF – Zusammenfassung

CF kontextfreie Sprachen (Chomsky-Typ 2)

- ▶ $CF = REC(PDA)$
- ▶ CF abgeschlossen unter $\cup, \circ, *, R$, Schnitt mit regulären Sprachen, aber nicht unter $\bar{\quad}, \cap$
- ▶ CYK-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems
- ▶ Leerheit entscheidbar, Gleichheit, Schnitt in CF nicht

DCF deterministisch kontextfreie Sprachen (SS22 nicht betrachtet)

- ▶ $DCF = REC(DPDA)$ ist echte Teilmenge von CF
z.B. $\{wav \mid w, v \in \{a, b\}^* \wedge |w| = |v|\} \in CF \setminus DCF$
- ▶ DCF abgeschlossen unter $R, \bar{\quad}$, Schnitt mit regulären Sprachen, aber nicht unter $\cup, \cap, \circ, *$
- ▶ Lösung des Wortproblems für Sprachen in DCF in $\mathcal{O}(|w|)$
- ▶ Leerheit, Gleichheit entscheidbar, Schnitt in DCF nicht

Was bisher geschah

Chomsky-Hierarchie für formale Sprachen

(definiert über Eigenschaften von Grammatiken): Chomsky-Typ

3 : reguläre Grammatiken / Sprachen

2 : kontextfreie Grammatiken / Sprachen

1 : monotone Grammatiken / kontextsensitive Sprachen

0 : von beliebigen Grammatiken erzeugte Sprachen

Maschinenmodelle zur Lösung des Wortproblems für Sprachen vom Chomsky-Typ

3 : NFA, DFA, ε -NFA

2 : (nichtdeterministische) PDA

$\text{REC}(\text{DPDA}) \subset \text{REC}(\text{PDA})$ (im SS22 nicht bewiesen)

▶ $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \text{REC}(\text{PDA}) \setminus \text{REC}(\text{NFA})$

▶ $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \text{REC}(\text{PDA}) \setminus \text{REC}(\text{NFA})$

▶ $\{wav \mid w, v \in \{a, b\}^* \wedge |w| = |v|\} \in \text{REC}(\text{PDA}) \setminus \text{REC}(\text{NFA})$

1 : ?

0 : ?

Kontextsensitive Sprachen (Chomsky-Typ 1)

erzeugt durch Grammatiken $G = (N, T, P, S)$ mit Regeln der Form $l \rightarrow r$, wobei

- ▶ $l \in (N \cup T)^+$
- ▶ $r \in (N \cup T)^*$ und
- ▶ $|l| \leq |r|$ (nichtverkürzend, monoton)

Beispiel: $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ ist

- ▶ nicht kontextfrei (Nachweis durch SFS, Pumping-Lemma)
- ▶ erzeugt durch Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow aABC, \\ A \rightarrow aBC, \\ CB \rightarrow BC, \\ aB \rightarrow ab, \\ bB \rightarrow bb, \\ bC \rightarrow bc, \\ cC \rightarrow cc \end{array} \right\}$$

Linear beschränkter Automat (LBA) – Idee

Ziel: Maschinenmodell für Sprachen vom Chomsky-Typ 1
Definition (endliche Beschreibung) durch

- ▶ externer Speicher:
 1. Eingabeband aus Zellen
 - ▶ Typ des Speicherinhaltes:
endliches Wort über endlichem Alphabet (Eingabealphabet)
 - ▶ Zugriffsmethode: Lesen
Bewegung des Lese-Kopfes auf das rechte Nachbarfeld

- ▶ interner Speicher:
 2. endliche Menge von Zuständen (Lesen / Schreiben)
 3. **Arbeitsband** aus Zellen
 - ▶ Typ des Speicherinhaltes:
endliches Wort (**Länge = Länge des Eingabewortes**)
über endlichem Alphabet (Arbeitsalphabet)
 - ▶ Zugriffsmethode: **Lesen** und **Schreiben**
Bewegung des Lese/Schreib-Kopfes auf ein Nachbarfeld (R/L)

übliche Vereinfachung der Struktur:

Zusammenfassen der Bänder im internen und externen Speicher zu einem Eingabe- und Arbeitsband (1. und 3.) mit Lese- und Schreib-Zugriff

WH: LBA – Definition

Linear beschränkter Automat (LBA) $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$ mit

X endliches Eingabealphabet

Q endliche Menge von Zuständen

$\Gamma \supset X$ endliches Arbeitsalphabet

$\delta \subseteq (\Gamma \times Q \times \Gamma \times Q \times \{L, R, N\})$
Übergangsrelation

q_0 Startzustand

F akzeptierende Zustände

$\square \in \Gamma \setminus X$ Leere-Zelle-Symbol
(Markierung von Anfang und Ende der Eingabe)

LBA M heißt **deterministisch** gdw.

für jedes $a \in \Gamma$ und jedes $q \in Q$ gilt

$$|\{(a, q, b, p, x) \mid p \in Q, b \in \Gamma, x \in \{L, R, N\}\} \cap \delta| \leq 1$$

LBA – Beispiel

LBA $M =$

$(\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, f\}, \{a, b, c, x, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$ mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (a, q_0, \square, q_1, R), (a, q_1, a, q_1, R), (x, q_1, x, q_1, R) \\ (b, q_1, x, q_2, R), (b, q_2, b, q_2, R), (x, q_2, x, q_2, R) \\ (c, q_2, x, q_3, R), (c, q_3, c, q_3, R), (\square, q_3, \square, q_4, L) \\ (a, q_4, a, q_4, L), (b, q_4, b, q_4, L) \\ (c, q_4, c, q_4, L), (x, q_4, x, q_4, L) \\ (\square, q_4, \square, q_0, R) \\ (x, q_0, \square, q_5, R), (x, q_5, \square, q_5, R), (\square, q_5, \square, f, N) \\ (\square, q_0, \square, f, R) \end{array} \right\}$$

Konfigurationen eines LBA

LBA $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$

Konfiguration $uqv \in (\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*)$ bedeutet:

- ▶ aktueller Bandinhalt: $w = uv$
- ▶ aktueller Zustand des LBA: q
- ▶ Schreib-/Lesekopf des LBA zeigt auf erstes Symbol von v
(Leere-Zelle-Symbol, falls $v = \varepsilon$)

Startkonfigurationen q_0w mit $w \in X^*$

akzeptierende Konfigurationen uqv mit $q \in F$

Konfigurationsübergänge von upv mit $u = u'a$ und $v = bv'$:

für $(b, p, c, q, R) \in \delta$: $upv \vdash ucqv'$

für $(b, p, c, q, L) \in \delta$: $upv \vdash u'qacv'$

für $(b, p, c, q, N) \in \delta$: $upv \vdash uqcv'$

Akzeptanz durch LBA

LBA $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$

M akzeptiert das Wort $w \in X^*$ gdw.

eine Folge k_0, \dots, k_n von Konfigurationen $k_i \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$ existiert, so dass gilt:

1. $k_0 = q_0 w$ ist die Startkonfiguration mit Eingabe w
2. $k_n \in \Gamma^* \times F \times \Gamma^*$ ist eine akzeptierende Konfiguration
3. für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $k_{i-1} \vdash k_i$ ein zulässiger Konfigurationsübergang

M akzeptiert die Sprache $L(M) = \{w \in X^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

$L \subseteq X^*$ heißt **LBA-akzeptierbar** gdw. ein LBA M mit $L = L(M)$ existiert.

Beispiel: Sprache vom Chomsky-Typ 1

monotone Grammatik: Regeln $l \rightarrow r$ mit $l, r \in (T \cup N)^+$ mit $|l| \leq |r|$

$G = (\{S, M, A, B\}, \{a, b, x\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Mx|x \\ M \rightarrow aA|bB|aMA|bMB \\ Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ax \rightarrow ax \\ Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, Bx \rightarrow bx \end{array} \right\}$$

Ableitung für das Wort $abbabbx$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \underline{M}x \rightarrow aM\underline{A}x \rightarrow aM\underline{a}x \\ &\rightarrow abM\underline{B}ax \rightarrow abMa\underline{B}x \rightarrow abM\underline{a}bx \\ &\rightarrow abb\underline{B}abx \rightarrow abba\underline{B}bx \rightarrow abbab\underline{B}x \rightarrow abbabbx \end{aligned}$$

Beobachtung: Für nichtverkürzende Grammatiken ist kein Wort in der Ableitung länger als das abgeleitete Terminalwort.

Satz

Die Menge aller Sprachen, die von einem LBA akzeptiert werden, ist genau die Menge aller Sprachen vom Chomsky-Typ 1.

Eigenschaften der Menge aller kontextsensitiven Sprachen

- ▶ Die Menge aller durch (nichtdeterministische) LBA akzeptierbaren Sprachen ist genau die Menge aller kontextsensitiven Sprachen. (hier ohne Beweis)
- ▶ Abschlusseigenschaften (im SS22 nicht bewiesen):
Sind L_1 und L_2 kontextsensitive Sprachen, dann sind auch
 - ▶ $L_1 \cup L_2$
 - ▶ $L_1 \cap L_2$
 - ▶ $\overline{L_1}$
 - ▶ $L_1 \circ L_2$
 - ▶ L_1^*
 - ▶ L_1^R

kontextsensitive Sprachen.

- ▶ Für kontextsensitive Sprachen ist das Wortproblem (Gilt $w \in L$?) algorithmisch entscheidbar.
- ▶ Ob deterministische und nichtdeterministische LBA die selbe Sprachklasse akzeptieren, ist bisher unbekannt (LBA-Problem)

Beispiel: Sprache vom Chomsky-Typ 0

Regeln $l \rightarrow r$ mit $l \in (T \cup N)^+$, $r \in (T \cup N)^*$

$G = (\{S, T, \}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow 1S101 \\ S & \rightarrow 01S00 \\ S & \rightarrow 110S11 \\ 0S0 & \rightarrow T \\ 0T0 & \rightarrow T \\ 1S1 & \rightarrow T \\ 1T1 & \rightarrow T \\ T & \rightarrow \varepsilon \end{array} \right\}$$

Gilt $\varepsilon \in L(G)$?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 110S11 \rightarrow 1100\underline{1S00}11 \rightarrow 11001\underline{110S11}0011 \\ &\rightarrow 110011101\underline{1S101}110011 \rightarrow 11001110\underline{T}01110011 \\ &\rightarrow^* 110T011 \rightarrow 11T11 \rightarrow 1T1 \rightarrow T \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Beobachtung: Während der Ableitung kommen Wörter vor, die mehr Terminalsymbole enthalten als das abgeleitete Wort.

Turing-Maschinen

wie Maschinenmodell LBA mit dem einzigen Unterschied:

LBA **längenbeschränktes** Arbeitsband

TM **beliebig langes** Arbeitsband

Parameter des Maschinenmodelles TM:

- ▶ externer Speicher: Eingabeband aus Zellen
- ▶ interner Speicher:
 1. Zustand (Zugriff: Lesen und Schreiben) und
 2. **beidseitig unendliches Arbeitsband**
(Zugriff: Lesen und Schreiben, Bewegung auf Nachbarzelle)

- ▶ häufige (äquivalente) Darstellung:
beidseitig unendliches Eingabeband = Arbeitsband

Turing-Maschine – Definition

Turing-Maschine (TM) $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$ mit

X endliches Eingabealphabet

Q endliche Menge von Zuständen

$\Gamma \supset X$ endliches Arbeitsalphabet

$\delta \subseteq (\Gamma \times Q \times \Gamma \times Q \times \{L, R, N\})$

Übergangsrelation

q_0 Startzustand

F akzeptierende Zustände

$\square \in \Gamma \setminus X$ Leere-Zelle-Symbol

TM M heißt **deterministisch** gdw.

für jedes $a \in \Gamma$ und jedes $q \in Q$ gilt

$$|\{(a, q, b, p, x) \mid p \in Q, b \in \Gamma, x \in \{L, R, N\}\} \cap \delta| \leq 1$$

Konfigurationen einer TM

TM $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$

Konfiguration $uqv \in (\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*)$ bedeutet:

- ▶ aktueller Bandinhalt: $w = uv$
- ▶ aktueller Zustand der TM: q
- ▶ Schreib-/Lesekopf der TM zeigt auf erstes Symbol von v
(Leere-Zelle-Symbol, falls $v = \varepsilon$)

Startkonfigurationen q_0w mit $w \in X^*$

akzeptierende Konfigurationen uqv mit $q \in F$

Konfigurationsübergänge von upv mit $u = u'a$ und $v = bv'$:

für $(b, p, c, q, R) \in \delta$: $upv \vdash ucqv'$

für $(b, p, c, q, L) \in \delta$: $upv \vdash u'qacv'$

für $(b, p, c, q, N) \in \delta$: $upv \vdash uqcv'$

Akzeptanz durch TM

TM $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \square)$

M akzeptiert das Wort $w \in X^*$ gdw.

eine Folge k_0, \dots, k_n von Konfigurationen $k_i \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$ existiert, so dass gilt:

1. $k_0 = q_0 w$ ist die Startkonfiguration mit Eingabe w
2. $k_n \in \Gamma^* \times F \times \Gamma^*$ ist eine akzeptierende Konfiguration
3. für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $k_{i-1} \vdash k_i$ ein zulässiger Konfigurationsübergang

M akzeptiert die Sprache $L(M) = \{w \in X^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

$L \subseteq X^*$ heißt **Turing-akzeptierbar** gdw. eine TM M mit $L = L(M)$ existiert.

Beispiele für Turing-Maschinen

- ▶ TM $M_1 = (\{a, b\}, \{q_0, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$ mit

$$\delta = \{(a, q_0, a, q_0, L), (b, q_0, b, q_0, L), (\square, q_0, \square, f, R)\}$$

$$L(M_1) = \{a, b\}^*$$

- ▶ TM $M_2 = (\{a, b\}, \{q_0, q_a, q_b, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$ mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (a, q_0, \square, q_a, R), (b, q_0, \square, q_b, R), \\ (a, q_a, a, q_a, R), (b, q_a, b, q_a, R), \\ (a, q_b, a, q_b, R), (b, q_b, b, q_b, R), \\ (\square, q_0, \square, f, N), (\square, q_a, a, f, N), (\square, q_b, b, f, N) \end{array} \right\}$$

$$L(M_2) = \{a, b\}^*$$

- ▶ TM $M_3 = (\{1\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, f\}, \{1, x, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$ mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (1, q_0, 1, q_1, R), (1, q_1, x, q_2, R), (1, q_2, 1, q_3, R), \\ (1, q_3, x, q_2, R), (1, q_4, 1, q_4, L), (x, q_1, x, q_1, R), \\ (x, q_2, x, q_2, R), (x, q_3, x, q_3, R), (x, q_4, x, q_4, L), \\ (\square, q_1, \square, f, L), (\square, q_2, \square, q_4, L), (\square, q_4, \square, q_0, R) \end{array} \right\}$$

$$L(M_3) = \{1^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{Unärdarstellung aller Zweierpotenzen})$$

Nichtdeterministische TM

TM $M = (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, f\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$ mit

$$\delta = \{ \begin{array}{l} (0, q_0, 1, q_0, R) \\ (1, q_0, 1, q_0, R) \\ (1, q_0, 1, q_1, R) \\ (1, q_1, 1, q_1, R) \\ (\square, q_1, \square, f, L) \end{array} \}$$

akzeptiert z.B. das Wort 11011 mit (u.A.) folgender Berechnung

$$\begin{array}{l} q_0 11011 \vdash 1q_0 1011 \vdash 11q_0 011 \vdash 111q_0 11 \vdash 1111q_1 1 \\ \vdash 11111q_1 \square \vdash 1111f 1 \end{array}$$

Simulation nichtdeterministischer TM

Satz

Zu jeder nichtdeterministischen TM M existiert eine deterministische TM M' mit $L(M) = L(M')$.

Beweisidee:

Menge aller möglichen Berechnungen von M bei Eingabe von w bilden einen Baum (evtl. mit unendlichen Pfaden)

Knoten: Konfigurationen

Wurzel: Startkonfiguration (Startzustand, Eingabewort)

Blätter: akzeptierende Konfiguration

Kanten: zulässige Konfigurationsübergänge in M

M' führt Breitensuche in diesem Baum durch

(simuliert parallele Berechnung aller Möglichkeiten, dovetailing),

Bandinhalt von M' sind Konfigurationen aus M

M' akzeptiert, sobald (u.A.) eine akzeptierende Konfiguration von M auf dem Arbeitsband steht.

Operationen auf TM-akzeptierbaren Sprachen

Die Menge aller Turing-akzeptierbaren Sprachen ist

- ▶ abgeschlossen unter \cap , \cup , \circ , $*$, R ,
- ▶ **nicht** unter Komplement abgeschlossen. (Gegenbeispiel später)

Konstruktionen

gegeben: TM A , TM B (Akzeptanz durch Halt)

gesucht: TM C mit

- \cap : $L(C) = L(A) \cap L(B)$
(sequentieller Akzeptanztest durch beide TM)
- \cup : $L(C) = L(A) \cup L(B)$
(verschränkter Akzeptanztest durch beide TM)
- \circ : $L(C) = L(A) \circ L(B)$
(nichtdeterministische Zerlegung und verschränkter Test)
- $*$: $L(C) = L(A)^*$
(nichtdeterministische Zerlegung und verschränkter Test)
- R : $L(C) = L(A)^R$
(Vorbereitung: auf dem Arbeitsband w durch w^R ersetzen)

mit Turing-Maschinen für „Unterprogramme“, z.B. Verschieben

TM und Sprachen vom Chomsky-Typ 0

Satz

Die Menge aller Sprachen, die von einer TM akzeptiert werden, ist genau die Menge aller Sprachen vom Chomsky-Typ 0.

Idee der Konstruktionen:

▶ Grammatik \rightarrow TM:

M berechnet für das Eingabewort w (letztes Wort einer Ableitung) eine Ableitung in der Grammatik „rückwärts“.

(Bei jeder Regelanwendung wird der aktuelle Bandinhalt geeignet verschoben.)

TM akzeptiert, wenn Bandinhalt = Startsymbol

▶ TM \rightarrow Grammatik:

Grammatik erzeugt „Kandidaten“ w' für jedes Eingabewort w .

Grammatik-Regeln beschreiben die lokalen Änderungen bei Konfigurationsübergängen der TM.

(Simulation der Berechnung der TM auf w durch Ableitung in der Grammatik)

Wird in der Ableitung ein akzeptierender Zustand erreicht, Übersetzung des Kandidaten w' in Terminalwort w .