Was bisher geschah

Grundlagen der (Logik-basierten) künstlichen Intelligenz

- klassische Aussagenlogik
- klassische Prädikatenlogik

- jeweils WH Syntax und Semantik
- Grundinstanziierung: (unter bestimmten Voraussetzungen mögliche) Übersetzung von Prädikaten- in Aussagenlogik

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in Logiken:

- Entscheidungbäume
- Entscheidungtabellen
- Mengen von Regeln ohne / mit Alternative
  Schließen durch Vorwärts- oder Rückwärtsverkettung

WH: Sätze in FOL

- gebundene (durch Quantoren) und freie Variablenvorkommen in Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$
- $\mathrm{bvar}(\varphi)$ Menge der in $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ gebunden vorkommenden Variablen
- $\mathrm{fvar}(\varphi)$ Menge der in $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ frei vorkommenden Variablen

Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ mit $\mathrm{fvar}(\varphi) = \emptyset$ heißt Satz.

Beispiele:

- $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$ ist ein Satz.
- $R(x, y) \to R(y, x), \forall x (R(x, y) \to R(y, x)),$ $\exists y (R(x, y) \to R(y, x)), \forall x (R(x, y) \to \forall y R(y, x))$ sind keine Sätze.

für $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ mit $\mathrm{fvar}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

universeller Abschluss $\forall \varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$

existentieller Abschluss $\exists \varphi := \exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi$

Fakt

Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ sind $\forall \varphi$ und $\exists \varphi$ Sätze.

WH: Wichtige Äquivalenzen mit Quantoren

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\varphi &\equiv \exists x\neg\varphi \\
\neg\exists x\varphi &\equiv \forall x\neg\varphi \\
\forall x\varphi \wedge \forall x\psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\
\exists x\varphi \vee \exists x\psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi) \\
\forall x\forall y\varphi &= \forall y\forall x\varphi \\
\exists x\exists y\varphi &= \exists y\exists x\varphi
\end{aligned}
$$

für $x \notin \mathrm{fvar}(\psi)$ gilt außerdem

$$
\begin{aligned}
\forall x\varphi \vee \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \\
\exists x\varphi \vee \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi) \\
\forall x\varphi \wedge \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\
\exists x\varphi \wedge \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Normalformen

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ heißt in

bereinigter Form , wenn $\mathrm{bvar}(\varphi) \cap \mathrm{fvar}(\varphi) = \emptyset$ und jeder Quantor eine andere Variable bindet
z.B. $\forall x(p(x) \to \exists y(r(y,z) \vee r(z,y)))$

Pränexform , wenn $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \psi$, wobei $\forall i : Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und in ψ keine Quantoren vorkommen.
z.B. $\forall x \exists y(p(x) \to (r(y,z) \vee r(z,y)))$

Skolemform , wenn $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_m \psi$, wobei $\mathrm{fvar}(\varphi) = \emptyset$ (Satz), alle x_i verschiedene Variablen sind und in ψ keine Quantoren vorkommen.
z.B. $\forall x \forall z(p(x) \to (r(a,z) \vee r(z,a)))$

Klauselform , wenn $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_m \psi$, wobei alle x_i verschiedene Variablen und ψ eine CNF sind.
z.B. $\forall x \forall z((\neg p(x) \vee r(a,z)) \wedge (\neg p(x) \vee r(z,a)))$
Darstellung als Regelmenge möglich:
$\{p(x) \to r(a,z), p(x) \to r(z,a)\}$

Erfüllbarkeits-Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln φ, ψ heißen Erfüllbarkeits-äquivalent, wenn gilt:
φ ist genau dann erfüllbar, wenn ψ erfüllbar ist.

($\mathrm{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$ gdw. $\mathrm{Mod}(\psi) \neq \emptyset$)

Achtung:

- Erfüllbarkeits-Äquivalenz ist schwächer als semantische Äquivalenz.

  Beispiel: $p \vee q$ und r sind erfüllbarkeitsäquivalent,
  $p \vee q \equiv r$ gilt aber nicht. (Warum?)

- Erfüllbarkeits-Äquivalenz bleibt beim Einsetzen in Formeln i.A. nicht erhalten.

  Beispiel: p und q sind Erfüllbarkeits-äquivalent,
  aber $p \wedge \neg p$ und $p \wedge \neg q$ nicht.

Konstruktion prädikatenlogischer NF

gebundene Umbenennung $\theta : X \to X$ einer Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$
ersetzt jedes gebundene Variablen-Vorkommen (auch beim bindenden Quantor) durch eine Variable, die in φ noch nicht vorkommt.

Zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{FOL}(\Sigma, X)$ lassen sich konstruieren:

- eine äquivalente Formel in bereinigter Form,
  (Konstruktion durch gebundene Umbenennungen)
- eine äquivalente Formel in Pränexform,
  (Konstruktion durch äquivalente Umformungen)
- eine Erfüllbarkeits-äquivalente Formel (Satz) in Skolemform,
  aus deren Modellen sich Modelle für φ konstruieren lassen
  (existenzieller Abschluss und schrittweise Eliminierung der $\exists$ von links nach rechts durch Einführung neuer Funktionssymbole)
- eine Erfüllbarkeits-äquivalente Formel (Satz) in Klauselform.

Beispiele:

- $\exists x \forall y \exists z \forall u \exists v P(x, y, z, u, v)$
- $(\neg \exists x (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y))) \vee \forall y P(g(z, y), z))$

Syntaktisches Schließen in der Prädikatenlogik

Modellmengen prädikatenlogischer Formeln (und Formelmengen) sind i.A. unendlich.

Aussagen wie
In jeder Äquivalenzrelation gilt φ, d.h.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x\ R(x,x) \\ \forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \\ \forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \end{array} \right\} \models \varphi$$

lassen sich i.A. nicht durch Nachprüfen aller Interpretationen beweisen.

Syntaktisches Schließen ist daher in der Prädikatenlogik noch wichtiger als in der Aussagenlogik.

Substitutionen (WH aus FOP)

Substitution: partielle Funktion $\theta : X \to \text{Term}(\Sigma, X)$
Notation $\{x \mapsto t_1, y \mapsto t_2, \ldots\}$
Anwendung einer Substitution:

- $s\{x \mapsto t\}$ ist der Term, welcher aus dem Term s durch Ersetzung jedes Vorkommens der Variable x durch t entsteht
- $\varphi\{x \mapsto t\}$ ist die Formel, die aus der Formel φ durch Ersetzung jedes freien Vorkommens der Variable x durch t entsteht

Beispiele:

- $g(x, f(a))\{x \mapsto b\} = g(b, f(a))$
- $P(y, x, f(g(y, a)))\{x \mapsto g(a, z), y \mapsto a\} = P(a, g(a, z), f(g(a, a)))$
- $g(x, f(a))\{x \mapsto b, y \mapsto a\} = g(b, f(a))$
- $g(b, f(y))\{x \mapsto b, y \mapsto a\} = g(b, f(a))$
- $(P(b, f(y)) \to Q(x))\{x \mapsto b, y \mapsto f(a)\} = (P(b, f(f(a))) \to Q(b))$
- für $\theta = \{x \mapsto b\}, \sigma = \{y \mapsto f(a)\}$ (auch $\theta(x) = b, \sigma(y) = f(a)$) gilt
  $(P(b, f(y)) \to Q(x))\theta\sigma = \sigma(\theta(P(b, f(y)) \to Q(x))) =$
  $= P(b, f(f(a))) \to Q(b)$

Unifikator

Substitution θ heißt genau dann Unifikator der Terme (Atome, Literale) t_1 und t_2 (θ unifiziert t_1 und t_2), wenn $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ gilt.
Beispiele:

1. $\theta = \{x \mapsto b, y \mapsto a\}$ unifiziert $t_1 = g(x, f(a))$ und $t_2 = g(b, f(y))$
2. $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$ (und $f(g(z), g(y))$.
3. $\{x \mapsto g(g(a)), y \mapsto a, z \mapsto g(a)\}$
   unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$.
4. $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y), v \mapsto f(a)\}$
   unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$.

Terme (Atome, Literale) t_1, t_2 heißen genau dann unifizierbar, wenn ein Unifikator für t_1 und t_2 existiert.
Beispiele:

1. $g(x, f(a))$ und $g(b, f(y))$ sind unifizierbar,
   $f(g(a, x))$ und $f(g(f(x), a))$ nicht. Warum?
2. $\neg P(a, f(x), g(a, y))$ und $\neg P(x, f(y), z)$ sind unifizierbar,
   $R(f(a), x)$ und $R(x, a)$ nicht.

Ordung auf Unifikatoren

Für zwei Unifikatoren σ, θ der Terme t_1, t_2 gilt:

σ heißt genau dann allgemeiner als θ, wenn eine Substitution ρ (die nicht nur Umbenennung ist) existiert, so dass
$t_1\theta = t_1\sigma\rho = t_2\sigma\rho = t_2\theta$

(analog Teilerrelation)

Beispiele: Unifikatoren für $f(x, g(y)), f(g(z), z)$

1. Unifikator $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ ist allgemeiner als $\{x \mapsto g(g(a)), z \mapsto g(a), y \mapsto a\}$
   $\rho = \{y \mapsto a\}$
2. Unifikator $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ ist allgemeiner als $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y), v \mapsto g(b)\}$
   $\rho = \{v \mapsto g(b)\}$

Allgemeinster Unifikator

Zu unifizierbaren Termen (Atomen, Literalen) s, t existiert (bis auf Umbenennung der Variablen) genau ein Unifikator θ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jeden Unifikator σ für s, t ist θ allgemeiner als σ.
Dieser heißt allgemeinster Unifikator $\theta = \text{mgu}(s, t)$ von s und t.

(analog ggT)

Beispiele:

- $\text{mgu}(f(x, a), f(g(b), y)) = \{x \mapsto g(b), y \mapsto a\}$
- $\text{mgu}(f(x, g(y)), f(g(z), z)) = \{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$

Unifizierbarkeit

- t ist mit t unifizierbar (mit Unifikator $\theta = \emptyset$)
- t ist mit $x \in \mathbb{X}$ unifizierbar (Unifikator $\theta = \{x \mapsto t\}$) gdw. x in t nicht vorkommt
- $f(t_1, \ldots, t_n), g(s_1, \ldots, s_m)$ sind nicht unifizierbar, falls $n \neq m$ oder $f \neq g$
- θ ist Unifikator für $f(t_1, \ldots, t_n), f(s_1, \ldots, s_n)$ gdw. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \theta$ unifiziert t_i und s_i

Unifikationsalgorithmus

zur Bestimmung des $\mathrm{mgu}(s,t)$ für $s,t \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ oder $s,t \in \mathrm{Atom}(\Sigma, \mathbb{X})$ (sofern dieser existiert)

Algorithmus: Unifikationsalgorithmus

Eingabe: $s,t \in \mathrm{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ (oder $\in \mathrm{Atom}(\Sigma, \mathbb{X})$)
Ausgabe: $\theta = \mathrm{mgu}(s,t)$ oder „nicht unifizierbar“

wenn $s = t$ **dann**
| $\theta \leftarrow \emptyset$
sonst wenn $s \in \mathbb{X}$ **dann**
| **wenn** $s \in \mathrm{var}(t)$ **dann** „nicht unifizierbar“
| **sonst** $\theta \leftarrow \{s \mapsto t\}$
sonst wenn $t \in \mathbb{X}$ **dann**
| $\theta \leftarrow \mathrm{mgu}(t,s)$
sonst wenn $s = f(s_1,\ldots,s_m), t = g(t_1,\ldots,t_n)$ **dann**
| **wenn** $f = g$ *(und* $m = n$*)* **dann**
| $\theta \leftarrow \mathrm{mgu}(s_1,t_1) \circ \cdots \circ \mathrm{mgu}(s_m,t_m)$
| **sonst** „nicht unifizierbar“

Dabei gilt für jede Substitution θ:

$$\theta \circ \text{„nicht unifizierbar“} = \text{„nicht unifizierbar“} \circ \theta = \text{„nicht unifizierbar“}$$

Unifikationsalgorithmus – Beispiele

- $\mathrm{mgu}(f(x, h(y), y), f(g(z), z, a)) =$
  $\{x \mapsto g(h(a)), z \mapsto h(a), y \mapsto a\}$
- $\mathrm{mgu}\,(P(f(x), g(y, h(a, z))), P(f(g(a, b)), g(g(u, v), w)))) =$
  $\{x \mapsto g(a, b), y \mapsto g(u, v), w \mapsto h(a, z)\}$
- $\mathrm{mgu}(P(f(a), g(x)), P(y, y))$ existiert nicht
- $\mathrm{mgu}(f(x, g(a, z)), f(f(y), f(x))$ existiert nicht
- $\mathrm{mgu}(f(x, x), f(y, g(y))$ existiert nicht
- $\mathrm{mgu}(f(x, g(y)), f(y, x)$ existiert nicht