

Was bisher geschah: klassische Aussagenlogik

Syntax Symbole und Struktur

- ▶ Menge P von **Aussagenvariablen** $(p, q, r, \dots)$
- ▶ **Junktoren** (je mit Stelligkeit):
 $\top(0), \perp(0), \neg(1), \vee(2), \wedge(2), \rightarrow(2), \leftrightarrow(2)$
- ▶ **aussagenlogische Formeln** $AL(P)$ (induktive Def.):
 - IA Atome (Aussagenvariablen) $\in P$
 - IS zusammengesetzte Formeln $(\varphi, \psi, \eta, \dots)$:
Verknüpfung von Formeln durch Junktoren

Prinzip der strukturellen Induktion über **Baumstruktur** von Formeln

Semantik (Bedeutung der Syntaxelemente)

- ▶ einer **Aussagenvariablen**: **Wahrheitswert** $\in \{0, 1\}$
- ▶ aller Aussagenvariablen einer Menge P :
Belegung (Interpretation) $W : P \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ eines n -stelligen **Junktors** $*$:
Wahrheitswertfunktion $\llbracket * \rrbracket : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ einer Formel unter einer Belegung W :
Funktion $W : AL(P) \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ **Modell** (erfüllende Belegung) für $\varphi \in AL(P)$:
Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ mit $W(\varphi) = 1$
- ▶ **Modellmenge** $\text{Mod}(\varphi)$ der Formel $\varphi \in AL(P)$:
Menge aller Modelle von φ

WH: Modelle aussagenlogischer Formeln

Die Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ der Aussagenvariablen in P **erfüllt** die Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ (ist ein **Modell** von φ) genau dann, wenn $W(\varphi) = 1$.

Modellmenge (Menge aller Modelle) der Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$:

$$\text{Mod}(\varphi) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi) = 1\}$$

(Diese Darstellung ist oft kürzer als die WW-Tabelle)

Beispiele:

- ▶ $\text{Mod}(p \vee (q \wedge \neg p)) = \{W_{10}, W_{01}, W_{11}\},$
- ▶ $\text{Mod}(p \rightarrow p) = \{W_0, W_1\} = \{W : \{p\} \rightarrow \{0, 1\}\}$
(alle möglichen Belegungen für p),
- ▶ $\text{Mod}(p \wedge \neg p) = \emptyset$

Modellierungsbeispiel Party

umgangssprachliche Beschreibung der Situation (Kontext):

Anna geht zur Party, wenn Max oder Paul hingehen. (1)

Max geht zur Party, wenn Paul nicht hingeht. (2)

Anna geht nirgends ohne ihren Hund hin. (3)

formale Beschreibung der Situation:

► elementare Aussagen (Atome):

a Anna geht zur Party.

m Max geht zur Party.

p Paul geht zur Party.

h Annas Hund geht zur Party.

$P = \{a, h, m, p\}$ (Menge der Aussagenvariablen)

► zusammengesetzte Aussage (aussagenlogische **Formel**):

$$\varphi = \underbrace{((m \vee p) \rightarrow a)}_{(1)} \wedge \underbrace{(\neg p \rightarrow m)}_{(2)} \wedge \underbrace{\neg(a \wedge \neg h)}_{(3)} \in \text{AL}(P)$$

Modellmenge $\text{Mod}(\varphi) = \dots$

Menge aller Situationen, in denen alle Aussagen wahr sind

Welche dieser Situationen ist Hunde-frei? $\text{Mod}(\varphi \wedge \neg h) = \dots$

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von Formeln

Definition: Eine Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ heißt

erfüllbar , wenn $\text{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$,

also (wenigstens) eine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ mit $W(\varphi) = 1$ existiert

Beispiel: $\neg p \rightarrow p$

unerfüllbar (Widerspruch), wenn $\text{Mod}(\varphi) = \emptyset$,

also keine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ mit $W(\varphi) = 1$ existiert.

(wenn also für jede Belegung W gilt $W(\varphi) = 0$),

Beispiel: $p \wedge \neg p$

allgemeingültig (Tautologie), wenn $\text{Mod}(\varphi) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\}\}$,

also für jede Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ gilt $W(\varphi) = 1$

(wenn also keine Belegung W mit $W(\varphi) = 0$ existiert).

Beispiel: $p \rightarrow p$

Fakt

Eine Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ ist genau dann allgemeingültig, wenn die Formel $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

Beweis: ...

Formelmengen

Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}(P)$

(Menge von Bedingungen)

Beispiele:

- ▶ $\{p, p \rightarrow q\} \subseteq \text{AL}(P)$
- ▶ $\{p, p \rightarrow q, \neg q\} \subseteq \text{AL}(P)$
- ▶ $\{p \rightarrow q\} \subseteq \text{AL}(P)$
- ▶ $\emptyset \subseteq \text{AL}(P)$

Semantik von Formelmengen

Eine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ erfüllt eine Menge $\Phi \subseteq \text{AL}(P)$ von Formeln genau dann, wenn W **jede** Formel $\varphi \in \Phi$ erfüllt.

Beispiele:

- ▶ einziges Modell für $\{p, p \rightarrow q\}$: W_{11}
- ▶ $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ hat kein Modell,
- ▶ Modelle für $\{p \rightarrow q\}$: W_{00}, W_{01}, W_{11}
- ▶ Jede Belegung ist ein Modell für die Formelmenge $\emptyset$.

Modellmengen von Formelmengen

Menge aller Modelle einer Menge $\Phi \subseteq \text{AL}(P)$ von Formeln:

$$\text{Mod}(\Phi) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid \text{für jedes } \psi \in \Phi \text{ gilt } W \in \text{Mod}(\psi)\}$$

kürzere Formulierung derselben Definition:

$$\text{Mod}(\Phi) = \bigcap_{\psi \in \Phi} \text{Mod}(\psi)$$

Beispiele:

- ▶ $\text{Mod}(\{p, p \rightarrow q\}) = \text{Mod}(\{p\}) \cap \text{Mod}(\{p \rightarrow q\})$
 $= \{W_{10}, W_{11}\} \cap \{W_{00}, W_{01}, W_{11}\} = \{W_{11}\},$
- ▶ $\text{Mod}(\{p, p \rightarrow q, \neg q\}) = \emptyset,$
- ▶ $\text{Mod}(\{p \rightarrow q\}) = \{W_{00}, W_{01}, W_{11}\}$
- ▶ $\text{Mod}(\emptyset) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\}\}$ (Menge aller Belegungen)

Fakt

Eine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ erfüllt eine endliche Formelmenge

$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ genau dann, wenn sie die Formel $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ erfüllt.

kürzere Formulierung derselben Aussage:

$$\text{Mod}(\Phi) = \text{Mod} \left(\bigwedge_{\psi \in \Phi} \psi \right)$$

Modellierung durch aussagenlogische Formelmengen

Aussagen:

1. Es wird nicht mehr viel Eis gekauft, wenn es kalt ist.
2. Der Eisverkäufer ist traurig, wenn nicht viel Eis gekauft wird.
3. Es ist kalt.

Darstellung als Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}(\{k, t, v\})$:

$$\Phi = \{k \rightarrow \neg v, \neg v \rightarrow t, k\}$$

$$\text{Mod}(\Phi) = \{W_{110}\}$$

neue zusätzliche Aussage:

4. Der Eisverkäufer ist nicht traurig.

Erweiterung der Formelmenge Φ zu

$$\Phi' = \Phi \cup \{\neg t\} = \{k \rightarrow \neg v, \neg v \rightarrow t, k, \neg t\}$$

$$\text{Mod}(\Phi') = \emptyset$$

(Formelmenge Φ' unerfüllbar)

Semantische Äquivalenz aussagenlogischer Formeln

Definition

Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ heißen genau dann
(semantisch) äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\psi)$.

alternative Formulierung:

$\varphi \equiv \psi$ gdw. für jede Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ gilt $W(\varphi) = W(\psi)$.

Äquivalente Formeln haben dieselbe Semantik (Wahrheitswertfunktion).

Beispiele: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

allgemein: Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ gilt

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Achtung: Das Symbol $\equiv$ ist kein Junktor (Syntax), sondern ein
Symbol für eine Beziehung zwischen Formeln (Semantik).

Aber: Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ lässt sich beweisen:

$\varphi \equiv \psi$ gilt genau dann, wenn die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

Wichtige Äquivalenzen

Für alle aussagenlogischen Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \text{AL}(P)$ gilt:

- ▶ $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \vee \text{f} \equiv \varphi, \quad \varphi \wedge \text{t} \equiv \varphi$
- ▶ $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
(Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \vee (\psi \vee \eta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \eta$
 $\varphi \wedge (\psi \wedge \eta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \eta$
(Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \eta)$
 $\varphi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \eta)$
(Distributivgesetze)
- ▶ $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (Doppelnegation)
- ▶ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
(DeMorgansche Regeln)
- ▶ $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \quad \varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
(Dualität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (Kontraposition)
- ▶ $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \psi$ (Fallunterscheidung)