

Was bisher geschah: klassische Aussagenlogik

Syntax Symbole und Struktur, **Junktoren**: $\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Prinzip der strukturellen Induktion über **Baumstruktur** von Formeln, arithmetischen Ausdrücken usw.

- ▶ induktive Definition von (unendlichen) **Mengen**
- ▶ induktive Definition von **Funktionen** auf induktiv definierten Mengen

Semantik (Bedeutung der Syntaxelemente)

- ▶ eines Junktors: Wahrheitswertfunktion
- ▶ einer Aussagenvariablen: Wahrheitswert
- ▶ einer Formel aus $AL(P)$ unter einer Belegung
 $W : P \rightarrow \{0, 1\}$: Funktion $W : AL(P) \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ einer Formel aus $AL(P)$ unter allen möglichen Belegungen:
Boolesche Funktion
- ▶ **Modelle** (erfüllende Belegungen) von Formeln
- ▶ **Modellmengen** aussagenlogischer Formeln
- ▶ **Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit** von Formeln
- ▶ **semantische Äquivalenz** von Formeln

WH: Semantische Äquivalenz aussagenlogischer Formeln

Definition

Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ heißen genau dann
(semantisch) äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\psi)$.

alternative Formulierung:

$\varphi \equiv \psi$ gdw. für jede Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ gilt $W(\varphi) = W(\psi)$.

Äquivalente Formeln haben dieselbe Semantik (Wahrheitswertfunktion).

Beispiele: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

allgemein: Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ gilt

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Achtung: Das Symbol $\equiv$ ist kein Junktor (Syntax), sondern ein
Symbol für eine Beziehung zwischen Formeln (Semantik).

Aber: Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ lässt sich beweisen:

$\varphi \equiv \psi$ gilt genau dann, wenn die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

WH: Wichtige Äquivalenzen

Für alle aussagenlogischen Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \text{AL}(P)$ gilt:

- ▶ $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \vee \mathbf{f} \equiv \varphi, \quad \varphi \wedge \mathbf{t} \equiv \varphi$
- ▶ $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
(Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \vee (\psi \vee \eta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \eta$
 $\varphi \wedge (\psi \wedge \eta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \eta$
(Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \eta)$
 $\varphi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \eta)$
(Distributivgesetze)
- ▶ $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (Doppelnegation)
- ▶ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
(DeMorgansche Regeln)
- ▶ $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \quad \varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
(Dualität von $\wedge$ und $\vee$)
- ▶ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (Kontraposition)
- ▶ $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \psi$ (Fallunterscheidung)

WH: Nachweis von Aussagen über alle Formeln

Aussagen der Form: Für **alle** Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ gilt ...
lassen sich **nicht** mit Wahrheitstabellen nachweisen.

Beispiel:

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ gilt $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

Nach Definition von $\equiv$ ist zu zeigen: **Mod**($\varphi \rightarrow \psi$) = **Mod**($\neg\varphi \vee \psi$)

$$\begin{aligned}\text{Mod}(\varphi \rightarrow \psi) &\stackrel{\text{Def. Mod}}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi \rightarrow \psi) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \rightarrow \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi) \leq W(\psi)\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \leq}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi) = 0 \text{ oder } W(\psi) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \neg \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\varphi) = 1 \text{ oder } W(\psi) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. max}}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid \max(W(\neg\varphi), W(\psi)) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \vee \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\varphi \vee \psi) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. Mod}}{=} \text{Mod}(\neg\varphi \vee \psi)\end{aligned}$$

WH: Strukturelle Induktion

Induktive Definition von Mengen

Beispiel: Menge $AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\})$ aller aussagenlogischen Formeln, die nur die Aussagenvariablen p, q und die Junktoren $\neg$ und $\rightarrow$ enthalten

IA: Grundbausteine, im Bsp.: elementare Formeln (Atome) p, q

IS: Regeln zur Konstruktion zusammengesetzter Elemente

im Bsp.: Zusammensetzen von Formeln durch Junktoren

Für alle Formeln φ_1 und φ_2 aus der Menge $AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\})$ sind auch $\neg\varphi_1$ und $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ in der Menge $AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\})$.

Beispiel: $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p) \in AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\})$, $\neg p \vee q \notin AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\})$

ermöglicht induktive Definition von Funktionen auf induktiv definierten Mengen (Beispiel: Funktion $f : AL_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p, q\}) \rightarrow \mathbb{Z}$):

IA: Funktionswert für Grundbausteine, z.B. $f(p) = 2$, $f(q) = 3$

IS: Vorschrift zur Berechnung des Funktionswertes des zusammengesetzten Elementes aus Funktionswerten der Teilstrukturen

z.B. $f(\neg\varphi_1) = 2f(\varphi_1)$, $f(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = f(\varphi_1) + 3f(\varphi_2)$

Beispiel: $f(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) = 40$

Beweise durch strukturelle Induktion

Induktiver **Nachweis von Eigenschaften** (E) jedes Elementes induktiv definierter Mengen

Beispiel: Für jede Formel $\varphi \in \text{AL}_{\{\neg, \rightarrow\}}(\{p\})$ gilt $f(\varphi) > \text{varcount}(\varphi)$ (E)

IA: Nachweis der Eigenschaft (E) für Grundbausteine,

im Bsp.: $f(p) \stackrel{(\text{Def. } f)}{=} 2 > 1 \stackrel{(\text{Def. varcount})}{=} \text{varcount}(p)$

IS: Nachweis der Eigenschaft (E) für zusammengesetzte Elemente aus den Nachweisen der Eigenschaft für die Teilstrukturen

IH (Induktionshypothese): Eigenschaft (E) für Teilstrukturen
im Bsp.: $f(\varphi_1) > \text{varcount}(\varphi_1)$ und $f(\varphi_2) > \text{varcount}(\varphi_2)$

IB (Induktionsbehauptung): Eigenschaft (E) für die (aus diesen Teilstrukturen) zusammengesetzten Elemente, im Bsp.:

$f(\neg\varphi_1) > \text{varcount}(\neg\varphi_1)$, $f(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) > \text{varcount}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$

B (Induktionsbeweis): Nachweis, dass IB aus IH folgt, Bsp.:

$$f(\neg\varphi_1) = 2f(\varphi_1) \stackrel{(\text{IH})}{>} 2\text{varcount}(\varphi_1) \geq \text{varcount}(\varphi_1) = \text{varcount}(\neg\varphi_1)$$

$$\begin{aligned} f(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) &= f(\varphi_1) + 3f(\varphi_2) \stackrel{(\text{IH})}{>} \text{varcount}(\varphi_1) + 3\text{varcount}(\varphi_2) \\ &\geq \text{varcount}(\varphi_1) + \text{varcount}(\varphi_2) = \text{varcount}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \end{aligned}$$

Junktorbasen (vollständige Operatorensysteme)

Zu einer Menge J von Junktoren ist die Menge $AL_J(P)$ definiert durch

IA: Für jede Aussagenvariable $p \in P$ gilt $p \in AL_J(P)$

- IS:
- ▶ für jeden 0-stelligen Junktor $*$ $\in J$ gilt $*$ $\in AL_J(P)$
 - ▶ für jeden 1-stelligen Junktor $*$ $\in J$ und alle Formeln $\varphi \in AL_J(P)$ gilt $*\varphi \in AL_J(P)$
 - ▶ für jeden 2-stelligen Junktor $*$ $\in J$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in AL_J(P)$ gilt $\varphi * \psi \in AL_J(P)$

Definition: Eine Menge J von Junktoren heißt genau dann **Junktorbasis** (vollständiges Operatorensystem), wenn zu jeder Formel $\varphi \in AL(P)$ eine Formel $\psi \in AL_J(P)$ mit $\varphi \equiv \psi$ existiert.

Beispiele:

- ▶ Die Mengen $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ sind Junktorbasen.
- ▶ Die Mengen $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\text{ff}, \rightarrow\}$ sind Junktorbasen. (ÜA)
- ▶ Die Mengen $\{\vee, \wedge\}$ und $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ sind keine Junktorbasen. (ÜA)

Beweis durch strukturelle Induktion – Beispiel

Fakt: Die Menge $\{\neg, \vee, \wedge\}$ ist eine Junktorbasis.

alternative Formulierung:

Zu jeder Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ existiert eine Formel ψ mit den Eigenschaften

E1 $\psi \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ und

E2 $\varphi \equiv \psi$ (d.h. $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\psi)$)

Beweis: induktiv über die Struktur von $\varphi \in \text{AL}(P)$

(Konstruktion einer Formel ψ mit den Eigenschaften E1 und E2):

Induktionsanfang: $\varphi = p \in P$

Zu jedem $\varphi = p \in P$ erfüllt $\psi = p$ (Ansatz) beide Eigenschaften

E1 $\psi \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$, nach IA in der Def. von $\text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ und

E2 $\varphi \equiv \psi$, wegen $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(p) = \text{Mod}(\psi)$

Beweis durch strukturelle Induktion – IH und IB

Induktionsschritt: φ ist eine zusammengesetzte Formel

IH : Zu $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{AL}(P)$ existieren Formeln ψ_1, ψ_2 mit

E1 $\psi_1, \psi_2 \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ und

E2 $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$

IB : für jede mögliche Struktur (Junktor in der Wurzel) von φ

IB $\neg$: zu $\varphi = \neg\varphi_1$ existiert eine Formel ψ mit

E1 $\psi \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ und

E2 $\varphi \equiv \psi$

IB $\vee$: zu $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

IB $\wedge$: zu $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

IB $\rightarrow$: zu $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

IB $\leftrightarrow$: zu $\varphi = \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

IB $\mathbb{t}$: zu $\varphi = \mathbb{t}$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

IB $\mathbb{f}$: zu $\varphi = \mathbb{f}$ existiert eine Formel ψ mit E1 und E2

Beweis durch strukturelle Induktion – (einfache) Beweise

Induktionsschritt: Beweise

(Schritt B für jede mögliche Struktur der Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$)

B $\neg$: z.z.: aus IH folgt $\text{IB}\neg$, **Ansatz:** $\psi = \neg\psi_1$

Beweis: Für $\psi = \neg\psi_1$ gelten

E1 $\psi \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ gilt wegen $\psi_1 \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ (nach IH) und IS (für $\neg$) in der Definition von $\text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$

E2 $\varphi \equiv \psi$ (wird gezeigt durch $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$)

$$\begin{array}{lll} \text{Mod}(\psi) & \stackrel{\text{Def. } \psi}{=} & \text{Mod}(\neg\psi_1) \\ & \stackrel{\text{Def. Mod}}{=} & \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\psi_1) = 1\} \\ & \stackrel{\text{Def. } \llbracket \neg \rrbracket}{=} & \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\psi_1) = 0\} \\ \text{IH: } \psi_1 \equiv \varphi_1 & \stackrel{\text{IH}}{=} & \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi_1) = 0\} \\ & \stackrel{\text{Def. } \llbracket \neg \rrbracket}{=} & \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\varphi_1) = 1\} \\ & \stackrel{\text{Def. Mod}}{=} & \text{Mod}(\neg\varphi_1) \stackrel{\text{Struktur von } \varphi}{=} \text{Mod}(\varphi) \end{array}$$

B $\vee$: z.z.: aus IH folgt $\text{IB}\vee$, **Ansatz:** $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$

Beweis: Für $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ gelten E1 wegen ..., E2 wegen ...

B $\wedge$: z.z.: aus IH folgt $\text{IB}\wedge$, **Ansatz:** $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, Beweis : ...

Beweis durch strukturelle Induktion – Beweise

$B \rightarrow$: z.z.: aus IH folgt $IB \rightarrow$, **Ansatz**: $\psi = \neg\psi_1 \vee \psi_2$

Beweis: Für $\psi = \neg\psi_1 \vee \psi_2$ gelten

E1 $\psi \in \text{AL}_{\{\neg, \vee, \wedge\}}(P)$ wegen ...

E2 $\varphi \equiv \psi$ (gezeigt durch $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$)

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\psi) &\stackrel{\text{Def. } \psi}{=} \text{Mod}(\neg\psi_1 \vee \psi_2) \\ &\stackrel{\text{Def. Mod}}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\psi_1 \vee \psi_2) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \vee \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid \max(W(\neg\psi_1), W(\psi_2)) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. max}}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\neg\psi_1) = 1 \text{ oder } W(\psi_2) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \neg \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\psi_1) = 0 \text{ oder } W(\psi_2) = 1\} \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi_1) = 0 \text{ oder } W(\varphi_2) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \leq}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi_1) \leq W(\varphi_2)\} \\ &\stackrel{\text{Def. } \llbracket \rightarrow \rrbracket}{=} \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = 1\} \\ &\stackrel{\text{Def. Mod}}{=} \text{Mod}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \stackrel{\text{Struktur von } \varphi}{=} \text{Mod}(\varphi) \end{aligned}$$

analog: $B \leftrightarrow$, $B \uparrow$ (Ansatz: $p \vee \neg p$ für ein beliebiges $p \in P$), $B \text{f}$

Umformen von Formeln

Nebenwirkung des (induktiven) Beweises zur
Junktorbasis-Eigenschaft:

Fakt:

Jede aussagenlogische Formel kann schrittweise durch Ersetzung
äquivalenter Teilformeln in semantisch äquivalente Formeln
umgeformt werden.

(Änderung der Syntax bei unveränderter Semantik)

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \neg(p \rightarrow q) & \begin{array}{l} (\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi) \\ \equiv \end{array} & \neg(\neg p \vee q) \\ & \begin{array}{l} \text{(deMorgan)} \\ \equiv \end{array} & \neg\neg p \wedge \neg q \\ & \begin{array}{l} (\neg\neg\varphi \equiv \varphi) \\ \equiv \end{array} & p \wedge \neg q \end{array}$$